Leibnizens mathematische Schriften

herausgegeben

von

C. I. Gerhardt.

Erste Abtheilung.

Band III.

Briefwechsel zwischen Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli und Nicolaus Bernoulli.

HALLE,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1855.





BRIEFWECHSEL

zwischen

Leibniz

und

Jacob Bernoulli.



Jacob Bernoulli war der ältere jenes Brüderpaars, das nach Leibnizens eigenem Geständniss sehr bald nach der Entdeckung der höheren Analysis um die Vervollkommnung und Ausbreitung derselben sich bei weitem die grössten Verdienste erworben hat. Er studirte nach dem Willen seines Vaters Theologie; indess regte sich in ihm schon früh eine entschiedene Hinneigung zu den mathematischen Disciplinen, die aber von Seiten seines Vaters durchaus gemissbilligt und auf keine Weise unterstützt wurde. Jac. Bernoulli konnte sich deshalb nur im Geheimen mit seiner Lieblingswissenschaft beschäftigen und befriedigte seine Wissbegier auf diesem Gebiete durch geliehene Bücher, wie sie der Zufall ihm gerade in die Hände spielte. So wurde Jac. Bernoulli in der Mathematik Autodidact und frühzeitig in selbstständiger Besiegung der Schwierigkeiten, die diese Wissenschaft so reichlich darbietet, geübt; zugleich gewöhnte er sich aber auch, wie es wohl vorzugsweise mit dieser Art des Studiums verbunden ist, an ein klares und vollständiges Durchdringen der mathematischen Wahrheiten, ein Zug, der in allen seinen spätern Arbeiten besonders hervortritt. Auf diese Weise kam freilich Jac. Bernoulli während seiner Studienzeit nicht über die ersten Elemente der mathematischen Wissenschaften hinaus. Auf seiner ersten Reise, die er im Jahre 1676 durch ganz Frankreich antrat, hatte er sich um Vervollkommnung in seinen Lieblingsstudien wenig bekümmert; um so mehr suchte er auf einer zweiten Reise durch Holland und England dies Versäumniss nachzuholen. Zu Amsterdam hörte er den Professor der Mathematik, Alexander de Bie, zu Leyden unter andern den Philosophen de Volder; der Umgang mit diesen Männern bestimmte ihn, sich angelegentlichst mit den mathematischen Wissenschaften zu beschäftigen und er vertiefte sich namentlich in das Studium der Carte-

sianischen Geometrie. Während seines Aufenthalts in Holland gab er zwei Schriften heraus: Conamen novi systematis Cometarum pro motu eorum sub calculum revocando et apparitionibus praedicendis, und: De Gravitate Aetheris; beide erschienen zu Amsterdam, die erste im Jahre 1682, die zweite im folgenden Jahre. Von Holland ging Jac. Bernoulli über Calais nach England, wo er die Bekanntschaft Boyle's und Robert Hooke's machte, und kehrte über Hamburg durch Deutschland im Jahre 1682 nach Basel zurück. Nachdem er noch die ganze Schweiz bereist, nahm er seinen festen Wohnsitz in seiner Vaterstadt und gründete, um seine Landsleute für die mathematischen Wissenschaften zu interessiren, ein Collegium experimentale Physico-Mechanicum daselbst. Seine alte Neigung für die Mathematik erwachte mit unwiderstehlicher Kraft von neuem; er wurde mehr als je sich bewusst, dass die mathematischen Disciplinen das Gebiet seien, auf dem er einmal etwas leisten könnte. Er legte daher alle andern Studien bei Seite und beschloss sich ganz seinen Lieblingswissenschaften zu widmen. Jac. Bernoulli begann nun mit seinem jüngern Bruder Johann, der bereits in die Elemente der Mathematik eingeweiht war, alle wichtigen mathematischen Schriftsteller zu studiren. Ohne irgend eine weitere Anleitung, nur durch eigene Kraft und Beharrlichkeit drang Jac. Bernoulli in die Tiefen der Wissenschaft und gewann dadurch, dass er zugleich seinen jüngeren Bruder unterrichtete, eine klarere, bestimmtere Einsicht in das Wesen derselben.

Bei diesem rastlosen Streben, die mathematischen Wissenschaften in ihrer Totalität zu erfassen, konnte ein Verlangen nach gegenseitiger Mittheilung und Ideenaustausch bei Jac. Bernoulli nicht ausbleiben; aber in seiner Vaterstadt war Niemand, bei dem er sich Rath erholen, mit dem er sich über mathematische Probleme unterhalten konnte. Die beiden damals einzig für dergleichen Mittheilungen bestehenden Zeitschriften, das Journal des Savans und die neu gegründeten Acta Eruditorum Lipsiensium boten nur mangelhaften Ersatz. In letzterer Zeitschrift hatte Leibniz im Jahre 1684 seine neue Methode pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus, auf wenigen Blättern bekannt gemacht, und Jac. Bernoulli mochte wohl ahnen, von welcher Wichtigkeit sie für die gesammte Wissenschaft sein könnte; dennoch vermochte er den Schleier nicht zu lüften, der das in grösster Kürze

dargestellte Princip derselben, wie es schien, fast undurchdringlich verhüllte. Endlich — es war im Jahre 1687, in dem er die erledigte Professur der Mathematik an der Universität seiner Vaterstadt erhalten hatte — bot sich Jac. Bernoulli eine Gelegenheit dar, mit Leibniz selbst, dem Verfasser jener neuen Methode, eine Correspondenz anzuknüpfen und ihn um Aufklärung und Anleitung zum Verständniss der neuen Rechnung zu bitten. Ein Mechaniker seiner Vaterstadt hatte ihn nämlich über die zweckmässigste Construction von Wagen um Rath gefragt, und Jac. Bernoulli hatte zu der Abhandlung Leibnizens: Demonstrationes novae de Resistentia solidorum, die in den Act. Erudit. 1683 erschienen war, seine Zuflucht genommen. Er fand darin, was er suchte, aber das Fundament, das Leibniz seiner Theorie zu Grunde gelegt, dass nämlich die Ausdehnungen der Körper den spannenden Kräften proportional seien, fand Jac. Bernoulli durch seine Versuche nicht bestätigt und er beschloss Leibniz seine Zweifel vorzulegen. Zugleich bringt er in diesem ersten Schreiben noch zwei andere Probleme aus der oben erwähnten Leibnizischen Abhandlung zur Sprache: über die Tragfähigkeit eines in einer Mauer horizontal befestigten Balkens, und über die Figur eines Balkens, der den Belastungen überall proportionalen Widerstand leiste. Namentlich ist es das letztere, das ihm Gelegenheit giebt auf die neue Methode Leibnizens zu kommen, in die eingeweiht zu sein sein sehnlichster Wunsch ist, und er bittet dringend um Belehrung*). Dieses erste Schreiben

*) Dies Geständniss von Jac. Bernoulli stimmt wenig mit den prahlerischen Expectorationen Joh. Bernoulli's in seinem selbst verfassten Lebensabriss, der neulich von R. Wolf in Bern (Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern Nr. 131 bis 155, und daraus in Grunert's Archiv Theil 13. Heft 2, literarischer Bericht) bekannt gemacht worden ist. Joh. Bernoulli sagt darin: Après ces commencemens, par un hazard imprévu nous tombâmes conjointement mon frère et moi sur un petit écrit de Mr. Leibnitz inséré dans les actes de Leipzic de 1684, où en 5 on 6 pages seulement il donne une idée fort légère du calcul différentiel, ce qui était une énigme plutôt qu'une explication; mais c'en était assez pour nous, pour en approfondir en peu de jours tout le secret, témoin quantité de pièces que nous publiâmes ensuite sur le sujet des infiniment petits. — Vergl. hiermit auch das Schreiben Jac. Bernoulli's vom 15. Nov. 1702, wo er sagt, dass er seinen Bruder Johann in die Differentialrechnung eingeweiht habe.

von Jac. Bernoulli traf jedoch Leibniz nicht mehr in Hannover; er hatte bereits seine grosse Reise durch Deutschland und Italien angetreten, und der Zufall wollte, dass dasselbe ihm auch nicht nachgeschickt wurde. So geschah es, dass Leibniz erst nach seiner Rückkehr im Jahre 1690 eine Antwort darauf an Jac. Bernoulli übersandte, in der er jedoch letzteren nicht weiter über das Princip der höheren Analysis zu belehren nöthig hatte. Denn derselbe war durch eigene Kraft und durch ein beharrliches Studium in das Mysterium eingedrungen und hatte bereits seine erlangte Meisterschaft durch die Lösung des von Leibniz den Cartesianern vorgelegten Problems der isochronischen Curve bekundet. Zwar hatte Hugens schon im Jahre 1687 die Eigenschaften und die Construction der verlangten Curve bekannt gemacht und Leibniz einen synthetischen Beweis gegeben, dass die Lösung von Hugens die richtige sei; beide indess hatten die Analysen zurückgehalten. Jac. Bernoulli dagegen machte zugleich die Analysis bekannt, um, wie er sagt, Leibniz zu nöthigen, zur Belehrung des Publicums ein Gleiches zu thun. Leibniz gestand, dass ihm Niemand bekannt sei, der den Sinn der Aufgabe besser getroffen hätte, als Jac. Bernoulli. Zugleich hatte dieser hierbei Veranlassung genommen, das Problem der Kettenlinie wieder zur Sprache zu bringen, auf das bereits Galiläi die Geometer aufmerksam gemacht hatte. — Obwohl Leibniz in seinem Antwortschreiben die Meinung von Jac. Bernoulli über das Princip der Dynamik, wie er es in dem Streite mit den Cartesianern aufgestellt hatte, zu vernehmen wünschte, und so Gelegenheit gab, die Correspondenz weiter zu führen, so erfolgte dennoch unmittelbar kein weiteres Schreiben von Seiten Jac. Bernoulli's. Erst nach 5 Jahren, als sein Bruder Johann sich zum Abgang nach Holland rüstete, im Jahre 1695 schreibt Jac. Bernoulli wiederum an Leibniz, der es ausdrücklich in seinen Briefen an den jüngeren Bruder gewünscht hatte. Abgesehen dass Jac. Bernoulli sich selbst Befriedigung von dem, weshalb er die Correspondenz angeknüpft, verschafft, und dass er stets ein gewisses Phlegma (nativus ad scribendum lentor et sequities non mediocris) überwinden musste, ehe er zum Schreiben kam, hatte ihn eine gewisse Scheu zurückgehalten, Leibniz sich wiederum zu nahen. Er hatte nämlich in den Act. Erudit. ein etwas vorschnelles Urtheil über die Leibnizische Differentialrechnung abgegeben, das er zwar

sehr bald wiederum öffentlich rectificirte*), in Folge dessen jedoch eine gewisse Verstimmung (maeror) in ihm zurückblieb. Ausserdem hatte er an einer schweren Krankheit darnieder gelegen, die seinen Körper, wie es scheint, für immer zerstörte, wegen häufiger Rückfälle seine Thätigkeit hemmte und seinem Leben in den besten Mannesjahren ein Ziel setzte. Er knüpft wieder an den letzten Brief Leibnizens an, verweist in Betreff der Dynamik auf die Correspondenz mit seinem Bruder**) und erinnert an die Summation

*) In einem Aufsatze: Specimen calculi differentialis in dimensione Parabolae helicoidis, ubi de flexuris curvarum in genere, earundem evolutionibus, aliisque (Act. Erudit. 1691. Jan.) hatte Jac. Bernoulli gesagt: Quanquam ut verum fatear, qui Calculum Barrovianum intellexerit, alterum a Dn. L. inventum ignorare vix poterit, utpote qui in priore illo fundatus est, et nisi forte in differentialium notatione et operationis aliquo compendio, ab eo non differt. Diese Aeusserung hatte er aber sogleich rectificirt und zurückgenommen in einem zweiten Aufsatz, im Juni desselben Jahres: Specimen alterum Calculi differentialis in dimentienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum etc., wo er am Schlusse hinzufügt: Caeterum in his Problematibus omnibus, quae quis nequicquam aliis tentet Methodo, calculi Leibnitiani eximium et singularem plane usum esse comperi, ut ipsum propterea inter primaria seculi nostri inventa censendum esse existimem. Quanquam enim, ut nuper innui, ansam huic dedisse credam calculum Barrowii, qualem appello, qui, ab hujus Viri tempore, passim fere apud Geometras praestantiores invaluit, quemque etiamnum Nobil. Tschirnhausio solemnem esse video: hoc tamen non eo intelligendum est, quasi utilissimi inventi dignitatem ullatenus elevare, aut Celeberrimi Viri laudi meritae quicquam detrahere et aliis ascribere cupiam: et si quae conferenti mihi utrinque intercedere inter illos visa est affinitas, ea major non est, quam quae faciat, ut, uno intellecto, ratio alterius facilius comprehendatur, dum unus superfluas et mox delendas quantitates adhibet, quas alter compendio omittit. De caetero namque compendium isthoc tale est, quod naturam rei prorsus mutat, facitque ut infinita per hunc praestari possint, quae per alterum nequeunt: praeterquam enim quod ipsum hoc compendium reperisse utique non erat cujusvis, sed sublimis ingenii et quod Autorem quam maxime commendat.

**) Hierbei giebt Jac. Bernoulli noch ein herrliches Zeugniss von der brüderlichen Eintracht, wie sie anfangs zwischen den beiden Brüdern bestanden hatte: Credo enim ipsum mecum sentire, seu quod ego recte sentiam, seu quod ideis ab institutione mea sibi implantatis praeoccupatus mecum erret.

der harmonischen Progression, die Leibniz in der Abhandlung: De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum etc. (Act. Erudit. 1682) gegeben hatte. Leibniz theilt in seiner Antwort ein sehr künstliches Verfahren mit, die Summe der Brüche von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{1000}$ zu finden, von dem indess Jac. Bernoulli nachweist, dass es ebenso weitläufig ist, als wenn die Glieder der Reihe nach und nach addirt würden. Er selbst zeigt zugleich einen interessanten Weg, annäherungsweise die Summe von irgend welcher Anzahl Glieder einer solchen Progression zu bestimmen. Die Summation dieser Reihe kommt in der Correspondenz zwischen Leibniz und Jac. Bernouilli öfters zur Sprache; Untersuchungen über Reihen war ja ein Lieblingsthema Jac. Bernoulli's, der, wie es scheint, sein ganzes Leben hindurch mit dergleichen sich beschäftigte, wie die nach und nach von ihm herausgegebenen fünf Abhandlungen: De Seriebus infinitis etc. beweisen. Bemerkenswerth ist noch die Sammlung von Problemen, die Jac. Bernoulli als Beitrag zu dem von Leibniz beabsichtigten Werke: Scientia infiniti, übersendet.

Das Jahr 1696 brachte das Problem der Brachystochrone, das in seinen Folgen die zwischen den beiden Brüdern schon vorhandene Missstimmung zu der erbittertsten Feindschaft entflammte. Jac. Bernoulli löste es nicht allein ohne Schwierigkeit, sondern er nahm auch hiervon Veranlassung, die schwierigen Aufgaben über die isoperimetrischen Figuren den Geometern zur Lösung vorzulegen. Bei dieser Gelegenheit zeigte sich das eminente Talent Jac. Bernoulli's im schönsten Lichte; nicht zufrieden das vorgelegte Problem gelöst zu haben, wurde es ihm eine Quelle zu neuen Speculationen, in die er sich so vertiefte, dass er des Gegenstandes vollkommen Meister wurde, in der Folge die mangelhafte Auflösung seines Bruders sogleich durchschaute und die Fehler der Methode desselben mit grösster Zuversicht nachwies. Dessenohngeachtet ist ein hervorstechender Zug seines Charakters Bescheidenheit, die edle Eigenschaft des wahren Talentes: Agnosco infirmitatem meam, schreibt er (27. Jan. 1697) an Leibniz bei Empfang des grossen Programms, in dem Joh. Bernoulli die Geometer zur Lösung des Problems der Brachystochrone einlud, nec tam credo me solvisse, quam Deum per me, ut fastum ejus (seines Bruders Johann) immodicum reprimeret. Doleo autem acerbe, ipsum usque adeo sui oblitum esse, ut non recordetur amplius, quo instrumento divina gratia olim in se fuerit operata.

Von 1697 bis 1702 ist die Correspondenz zwischen Leibniz und Jac. Bernoulli unterbrochen. Die Streitigkeiten mit seinem Bruder Johann über die richtige Lösung des isoperimetrischen Problems, die in Journalen geführt ein öffentliches Aergerniss wurden, verbitterten dem kränklichen Mann das Leben so sehr, dass er sich für jede Thätigkeit unaufgelegt fühlte. Besonders aber war Jac. Bernoulli gegen Leibniz aufgebracht, da er annahm, dass dieser für seinen Bruder Partei genommen und wenn er gewollt, den Zwist im Keim hätte ersticken können. Wenn auch Leibniz im Allgemeinen sehr zu Gunsten Joh. Bernoulli's gestimmt war, so ist er doch gegen diese Beschuldigungen Jac. Bernoulli's in Schutz zu nehmen; die Correspondenz zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli giebt die besten Beweise, wie sehr dem ersteren daran gelegen war, die beiden Brüder wieder zu versöhnen. Erst die Freude über seine Wahl zum Mitgliede der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vermag die Missstimmung Jac. Bernoulli's zu lösen und er wendet sich wieder an Leibniz, den Gründer und Präsidenten der Akademie, ihm seinen Dank abzustatten. Nach fünfjähriger Unterbrechung knüpft er wieder an das zuletzt erhaltene Leibnizische Schreiben an und erklärt sich vor allen Dingen als Anhänger des dynamischen Princips, das Leibniz in fast allen seinen Briefen zur Sprache gebracht hatte und dessen Anerkennung von Seiten der Coryphäen der Wissenschaft sein sehnlichster Wunsch war. Ausserdem ist in diesen Briefen aus den letzten Lebensjahren Jac. Bernoulli's besonders die Rede von den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die dieser in seinem nachgelassenen Werke: De arte conjectandi, zu Grunde gelegt hatte, von der Integration der Differentialgleichungen und irrationalen Ausdrücke. Da Jac. Bernoulli in Bezug auf seine Integrationsmethoden, wie es scheint, etwas zurückhaltend ist, so rafft sich Leibniz auf und bringt längst angestellte Untersuchungen über Integration irrationaler Functionen in Ordnung, um zu beweisen, dass auch er, der als Emeritus wohl Ansprüche hätte, dass man ihm offen neue Ergebnisse mittheilte, noch etwas vermöchte.

Von der Correspondenz zwischen Leibniz und Jac. Bernoulli war bisher nur ein Schreiben Leibnizens (XIX, ohne die Beilage) gedruckt zuerst in den Memoiren der Berliner Akademie vom Jahre 1757.

I.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Pruriit mihi jam dudum animus, tuas interpellandi Musas, nisi et gravissimorum tuorum negotiorum, quibus obrutum Te esse noveram, multitudo, et tenuitatis meae conscientia, et Nominis Tui celebritas calamum hucusque retinuissent. Non sine causa enim metuebam, in eorum a Te referri numerum, qui cum aliter non possint, magnorum Virorum alloquio inclarescere student; quae quidem insania, si a quoquam, a me certe debet esse alienissima, utpote quem latere quam innotescere, praesertim Tibi, melius conveniret. Velim itaque persuasus sis, Amplissime Vir, nihil ad scribendum aliud me impulisse, quam ardorem, quo res Mathematicas deperio, inque iis proficiendi desiderium inexplebile. Hoc cum aliunde satiare hactenus non potuerim, qui a Mathematicorum consortio longe remotus, caeterisque fere subsidiis destitutus vivo, Tuum tandem oraculum sollicitare coactus fui, cujus sublimia, ut sic dicam, effata summa saepe cum admiratione stupeo, mecumque stupent omnes, quotquot in scientiarum nobilissima non plane versantur hospites. Quo et invitavit me singularis Tua Humanitas, et peregrinis inserviendi promtitudo, cui debentur tot tamque praeclara ingenii monumenta, quae quotidie publico impertis; ea enim spem faciebat, fore ut non minus facilem Te praeberes instruendo uni alterive privato, qui forte opem Tuam in dilucidandis iis, quae in lucem emisisti, imploraturus esset. Quapropter hac spe fretus, Amplissime Vir, in nonnullis paucis Te consulam circa ea, quae olim in Actis Lipsiensibus de Resistentia solidorum pu-

blicasti; idque occasione nostratis cujusdam Artificis, qui miram quandam in fabricandis stateris dexteritatem prae se fert. Hujus artificium praecipuum cum animadvertissem facile, non tam consistere in instituendis jugi divisionibus, quam in ejusdem crassitie ita attemperanda, ut a proprio pondere appensoque sacomate facile flecti nequeat, opportune recordatus sum Tuorum illorum Inventorum, eaque circa hanc materiam quandam mihi lucem allatura credidi. Nec credidi frustra. Id ipsum quod quaesivi reperi; paucis enim perlectis paginis videbam non sine voluptate, me calculo subducere posse, quanta in unoquoque jugo ad debitam ei firmitatem conciliandam requiratur crassities, aut vicissim in data crassitie et longitudine quanto oneri ferendo par sit, postquam in unico ejusdem materiae bacillo ea de re experimentum cum cura institutum fuerit. Quo magis autem, Vir Amplissime, hoc Systema tuum mihi placuit, eo magis etiam sollicitum me statim reddidit de veritate hypotheseos, cui superstruitur. Supponis, librarum extensiones viribus tendentibus proportionales esse; quod assertum sequenti modo examinari posse arbitratus sum. Sumpsi chordam tenuiorem ex intestinis paratam, qua Instrumentum musicum armatum erat, longitudinis circiter bipedalis, eamque unco alligatam inferiore extremitate lance oneravi, quo ipso chorda acquisivit rectitudinem: dein immissis lanci successive aequalibus ponderibus, examinavi singulis vicibus chordae longitudinem in partibus sedecimis pollicis. Quae observavi, sunt sequentia:

Chorda a pondere librarum	2	extensa fuit partibus	9	extendenda juxta hyp. partibus	9
	4		17		18
	6		23		27
	8		27		36

Unde patet, hypothesi isti non omnino convenire cum experientia: neque est cur dici possit, futurum forte fuisse, ut in posterioribus observationibus chorda ulterius extenderetur, si diutius absque additione novi ponderis relicta fuisset: etenim eadem ratione sequeretur, et in prima observatione a pondere bilibri illam magis extendendam fuisse; neque propterea major sperari potuisset experimenti cum hypothesi tua conformitas. Quae cum ita se habeant, haereo quid ea de re statuendum sit: an credere debeam, me sensum tuae hypotheseos, quam alibi jam confirmatam esse dicis, non assequi; vel experimentum non satis curate factum; vel dispa-

rem potius rationem esse chordae hujus, fibrarumque e quibus corpora dura componi statuis?

Sed et porro alius mihi sedet scrupulus. Concipis, Ampliss. Vir, unamquamque portionem trabis horizontalis tanquam gravitantem super illa extremitate, qua cum reliqua portione cohaeret: quo posito sequitur indubie, trabem cylindricam vel prismaticam, adeoque aequaliter ubique resistentem, si nimium oneretur, eo ipso semper in loco frangi vel incurvari debere, quo muro adhaeret, cum ibidem ex tua hypothesi maximam vim sustineat. Asseveravit autem ante memoratus Artifex, se saepius experimentis de industria factis id examinasse; atque in virga ferrea prismatica alicubi firmiter inserta, alteraque sui extremitate pondere gravata, donec flecti inciperet, ope regulae studiose admotae comperisse, quod flexura (quae nihil videtur esse aliud, quam initialis fractio) subinde inchoarit in tertia parte longitudinis virgae ab insertione ejus, ac circa mediam longitudinem desierit. Quae iterum ut cum hypothesi Tua conciliarem, diu sed incassum laboravi.

Praecipuum vero tandem, quo de, Vir Amplissime, desiderarem instrui, modum concernit inveniendi figuras trabium, gravitationibus respondentibus ubique proportionaliter resistentium: quorsum spectans Problema huc redit, ut inveniatur curva ABC (fig. 1) ejus naturae, ut □ ordinatarum AD, BF, se habeant, sicut trilinea ABCD, BCF, ducta in GJ, HL, distantias centrorum gravitatis ab AD, BF (si solum trabis pondus spectetur) vel sicut aggregata ex istis trilineis et communi quapiam quantitate data, ducta in distantias centrorum gravitatis horum aggregatorum (si praeter trabis pondus etiam onus P extremitati ejus C annexum in rationes venire debeat). Ubi levi quidem opera priorem casum expedio, si supponam portiones ABCB, BCF, ad circumscripta rectangula MD, NF eandem ubique rationem habere, quam vocabo $\frac{1}{z}$; simulque JG, LH longitudinibus DC, FC proportionales esse. Etenim posito $AD = a$, $DC = b$, $BF = y$, $FC = x$, manifestum,

ADq. BFq : : Tril. ABCD in DC. Tril. BCF in FC.

$$aa.\quad yy\ ::\ \frac{abb}{z}\quad .\quad \frac{xxy}{z}.$$

id est : $aa \,.\, yy :: abb \,.\, xxy$; adeoque $\frac{bby}{a} = xx$; et propterea curvam ABC esse Parabolicam: sicut etiam si desideraretur, ut

trilinea ista ducta in distantias centrorum gravitatis se haberent, ut Cubi vel Biquadrata ordinatarum, ABC foret linea recta, vel paraboloidica ejus generis, cujus natura exprimitur per $y^3 = \frac{a^2xx}{bb}$ At in altero casu, ubi praeter trabis pondus etiam annexi oneris P habenda ratio est, non apparet, quo pacto exresolutione proportionis hujus $aa \,.\, yy :: \frac{abb}{z} + bP \,.\, \frac{xxy}{z} + xP$ natura quaesitae curvae elici possit: quia nunc litera z, quae et ipsa incognita est, non uti antea evanescit: quin imo ex hoc ipso non obscure conjicio, quaesitam figuram talem non esse, qualis supponitur, id est, cujus portiones ad circumscripta rectangula ubique eandem rationem habeant. Quare suspicor, Amplissime Vir, latere hic sublimioris cujusdam Geometriae vestigia, ad quae per vulgarem Cartesianam methodum nullus mihi hucusque patuit aditus. Illam volo Geometriam, cujus ope Tu cum Nobiliss. vestro Tschirnhausio circa quadraturam circuli dimensionesque aliarum curvilinearum tot tamque praeclara reperistis. Hujus vestrae methodi si aliqualem (quod impense flagito) impertiri mihi digneris radium, quantum per gravissima Tua negotia licebit, eo ipso facies, ut deinceps non nudus Tuorum Inventorum admirator, sed et dignus eorum aestimator ac praeco futurus sim. Huic vero desiderio si quid temeritatis subest, uti subesse fateor plurimum, ejus humillime a Te peto veniam, quam forte generosa Tua Humanitas non recusabit ei, quem solus discendi ardor temerarium fecit. Vale, Vir Amplissime, vitamque quam vivis, publico tam pretiosam tamque utilem, vive proporro diutissime etc.

Dabam Basileae 15. Dec. 1687.

II.

Leibniz an Jac. Bernoulli.

Vereor ne apud Te laboraverit existimatio mea, responso ad literas tuas humanitatis et doctrinae plenissimas Basiliae 15. Decembr. 1687 datas, nullo secuto; sed allatae sunt illae paulo postquam ego iter ingressus eram longinquum, ex quo hac demum

aestate ineunte feliciter (Deo juvante) sum reversus, venere autem in manus hominis qui seposuit inter schedas suas, et postea ex memoria dimisit, nuper autem forte reperit reddiditque. Sed multum interest inter literas, quae nova in Scientiis, quarum aeternum objectum est, continent et quae de rebus humanis atque caducis tractant; hae mox veterascunt, illis etiam ex longo intervallo manet gratia novitatis. Itaque serum non esset ad Tuas responsum meum, si satisfaceret quaesitis; Ego vero ut in quibusdam aliquid ad rem fortasse contulero, ita in plerisque ad opem potius tuam confugio, ut collatis viribus expugnemus hanc naturae arcem. Omnino enim nondum mihi satisfacio circa Elasticas leges, et quod olim in Actis Lipsiensibus posui, extensiones esse ut vires tendentes, non ausim ultra hypothesin porrigere, quae quousque satisfaciat, Experimentis definiendum est, qualia instituere coepisti. Equidem pro causa Tensionis explicanda tale quid commentus olim eram. Fingamus corpora ex partibus constare ut A, B (fig. 2) quae vel tangant sese ubique et exacte, vel varias inter se sinuositates relinquant aperturasque seu hiatus, modo aperturae (ut C) tam sint exiguae, ut ambienti fluido crassiori introitum non permittant. Suppono porro talem esse statum vel motum ambientis, ut eo magis proportione turbetur, adeoque resistat, quo majus est spatium vacuum quod divellendo relinquitur inter A, B, D, E, seu quo majus est spatium, quod ipsi ambienti extrorsum adimitur. His positis utique sequitur ubique aequalem fieri tensionem seu disjunctionem inter particulas, seu tracto E a pondere F spatium vacuum in tantum augeri debere inter E et D, quantum inter D et B. Patet etiam aequaliter spatium vacuum augeri distantia particularum aequaliter aucta, sive exacte se tetigerint sive cum sinuositatibus. Patet denique etiam pondera seu vires extendentes fore ut extensiones. Sed si poneremus figuram ABDEF esse in vase aëre pleno vel aliquo fluido comprimibili analogo, et fingi divulsionem non esse tantam, ut ambienti pateat aditus; vel, in crassis et sensibilibus, adhiberi cylindros sibi insertos bene tornatos vel clausos ut in antliis, tunc observo non omnino vires impendendas fore ut extensiones, sed rem ita se habere: Sit Hyperbola L(L) (fig. 3) cujus centrum G et Asymptotos GK(K), erit aliquod Hyperbolae punctum J, ex quo ducatur in dictam asymptoton recta JH parallela alteri Asymptoto hic non ductae, et ex eodem puncto J ducatur recta JM(M) parallela ipsi Asymptoto dictae GK(K),

denique per puncta L in Hyperbola sumta ducantur rectae ordinatae KLM occurrentes ipsi GK(K) in K, ipsi M(M) in M, ajo si vires tendentes sint ut JM, extensiones fore ut ML, ut facile ipse colliges ex supposita aëris vel fluidi aequabili comprimibilitate, seu resistentia spatiis contentis reciproca, licet ea, ut (si bene memini) in tuo de aethere Tractatu observasti rigorose vera fortasse non sit. Tam diu autem in his hypothesibus aequaliter ubique continuatur extensio, donec partium divulsarum distantia aditum fluidi ambientis admittat, ubi sequitur ruptura. Verum dubitari potest in chordis quibus utimur, an non admixta sit extensioni alia compressio. Quemadmodum si fingeremus cylindrum haberi ex corio inflato per aërem immissum, et huic cylindro helicaliter circumligari filum, ipsum autem filum pondere adjecto extendi, patet concurrere fili extensionem et aëris inclusi compressionem. Et multa alia supponi possunt, ex quibus quid sit optimum experimenta definire debent. Caeterum quid ex hypothesi ambientis comprimibilis et lineae hyperbolicae JLL (in locum rectae prioris hypotheseos) adhibitae, in illa ratiocinatione quam Actis Lipsiensibus olim inserui consequatur variationis, facile supplebis conferesque tuis experimentis. Sane quantum primo obtutu judicari potest, magis iis respondet haec hypothesis; sit enim JP repraesentans duas libras et PQ ordinata hyperbolae respondeat novem partibus sedecimis pollicis quas ponis in tua Epistola; sit deinde JM repraesentans libras quatuor et rectam KM secet Hyperbola quidem in L, recta vero JQ producta in R; patet extensionem faciendam per 4 libras secundum priorem quidem hypothesin fore ut rectam MR particularum 18, sed secundum posteriorem fore ut ML paulo minorem, et ita porro semper magis magisque deficere. Observo tamen in Tabula tua aliquid, quod si constanter reperiretur verum aut vero propinquum continuatis experimentis, alia fabricanda esset hypothesis, nempe invenio excessus hypotheseos primae super experimenta procedere ut numeros quadratos. Tabula tua haec est:

Chorda a pondere librarum	2	extensa fuit partibus	9	extendenda juxta hyp. partibus	9
	4		17		18
	6		23		27
	8		27		36

ubi excessus hypotheseos sunt 0, 1, 4, 9, et differentiae numerorum experimento repertorum inter se, quae sunt 8, 6, 4, (seu

17 — 9, 23 — 17, 27 — 23) sunt progressionis Arithmeticae. Igitur si hypothesis comparandi Extensiones cum viribus extendentibus mutanda esset, mutari etiam deberet proportio virium a latere abrumpentium trabem ad vires eam directe evellentes. Non tamen hinc sequitur mutandam esse proportionem inter resistentias transversas seu laterales diversarum basium seu (fig. 5. ad Actorum Lipsiensium Mens. Jul. 1684) proportionem resistentiae baseos AB ad resistentiam baseos FG (fig. 4). Nam si ponamus trilinea BAEB, FGHF repraesentare resistentias basium AB, FG, patet trilineum BAEB esse ad trilineum FGHF ut quadratum AB ad quadratum FG, non tantum quando linea curva trilinei est Parabola Conica, quo casu trilineum est tertia pars quadrati circumscripti, sed et quando linea curva est Parabola altior seu Paraboloeides Cubica, vel quadrato-quadratica etc. ubi trilineum est quadrati circumscripti pars quarta vel quinta etc. Semper enim trilineum unum BAEB habet eandem rationem ad suum quadratum circumscriptum, quam alterum FGHF ad suum; adeoque trilinea manent ut quadrata AB, FG. Imo etsi ordinata trilinei utcunque composita esset additione vel subtractione ex ordinatis Paraboloeidum quotcunque, verbi gratia si trilineum BAEB vel FGHF aequaretur aggregato trilinei aeque alti et lati parabolici, quadratici (seu Conici) et cubici simul, idem manebit verum; et in universum similes figurae sunt in duplicata ratione homologorum laterum; jam omnis curvae ordinata exprimi potest per additas invicem aut subtractas ordinatas paraboloeidum saltem ope seriei infinitae, adeoque ex aggregatis aut residuis horum trilineorum et curvae trilineum componetur. Itaque manente proportione resistentiarum eadem quae quadratorum, subsistent nostrae de figuris aeque resistentibus demonstrationes.

Quod asserui unamquamque portionem trabis horizontalis gravitare super sectione communi cum reliqua portione, et ab ejus sectionis firmitate sustineri, id quidem non tam hypothesin esse arbitror, quam *κοινὴν ἔννοιαν*, nec ulla ratione in dubium revocari posse, idque temet puto agnoscere, si consideres. Certe pondus partis CFG (Fig. 4) ne agere quidem potest super AB, nisi praecedente ac mediante actione super FG, cujus firmitas connexionem facit. Nec puto Artificis vestri Observationem hoc evertere. Certe prius flectitur trabs nonnihil a pondere extremitati appenso, antequam actio ad extremitatem oppositam perveniat. Ego in ra-

tiocinationibus meis nolui considerare flexionem totius trabis, vel potius posui figuram a pondere per flexiones praecedentes jam ad eam figuram quam ei dedimus esse redactam, postquam ultra flecti notabiliter negat, vel omnino flexiones consideratu dignas non esse. Flexionum autem consideratio novae adhuc nec inelegantis operae foret. Caeterum materiae qualitas non permittit, ut quae de figuris aeque resistentibus demonstrantur, perfecte satis per experimenta exhiberi possint.

Venio ad postremum caput literarum tuarum, ubi recte notasti difficilius esse lineam ABC (fig. 1) pro trabe aequaliter resistente assignare, quando conjunguntur pondus trabis et pondus appensum vel impositum ut P et rationem quoque difficultatis optime animadvertisti. Nempe videtur figura debere esse talis naturae, ut (retinendo schema Epistolae tuae) quadrata ordinatarum FB sint proportionalia aggregatis ex trilineo CFB ducto in LH et plano constanti repraesentante pondus P, ducto in FC distantiam Centri Gravitatis ipsius P ab FB. Ego dum rem in gratiam Tui aggredior, incido in difficultates, quae me admonuere debite accommodandos esse quaesiti terminos remque ita, ut figura exhibet, esse impossibilem. Idque ipsum quod sine admonitione ista in mentem non venerat, mox facile animadverti; primum enim nego fieri posse ut figura in punctum C desinente appensoque trabi pondere P in C, trabs ubique aequaliter resistat, quod sic ostendo: in figura desiderata si talis esset figura CDABC, debet esse solidum ex plano repraesentante pondus P ducto in distantiam CF seu momentum ipsius P ex FB, una cum momento ipsius trilinei CFBC ex FB tanquam axe, aequale solido ex quadrato ipsius FB ducto in rectam constantem; sed sub initium cum abscissa est incomparabiliter parva ut CQ, adeoque et ordinata incomparabiliter parva QR, tunc momentum ipsius trilinei CQR ex axe QR est incomparabiliter parvum respectu momenti ponderis P, seu respectu plani alicujus assignabilis ducti in CQ. Ergo evanescit in additione et proinde idem est, sive dicas momentum ponderis P et momentum trilinei CQR simul sumta debere alicui rei aequari; sive potius dicas momentum ponderis P solum eidem ipsi rei aequari. Postulatur ergo tunc ut solidum factum sub plano constante assignabili (pondus P repraesentante) ducto in CQ incomparabiliter parvum aequetur solido facto ex quadrato CR incomparabiliter parvo ducto in rectam constantem assignabilem; sed hoc est absurdum, cum

illud solidum sit hoc incomparabiliter majus, nempe QA in CQ est incomparabiliter majus quam QR quadrat. in Bh, posito a et b esse quantitates comparabiles, sed CQ et QR esse ipsis incomparabiliter minores; nisi vicissim QR esset incomparabiliter major ipsa CQ, cujus contrarium in parabola est verum, ubi sub initium (seu pro incomparabiliter parvis) CQ etsi ipsamet incomparabiliter parva est, tamen adhuc incomparabiliter major ipsa QA adeoque nec in curva nostra desiderata (quippe quae postremo imminuto continuo pondere P in parabolam evanescit) contrarium fieri potest, ut scilicet QR contra incomparabiliter major sit ipsa CQ. Cum ergo res desiderata praestari non possit sub initium pro partibus incomparabiliter parvis, nec poterit figura hoc generaliter praestans exhiberi. Sin putemus figuram posse reperiri quae praestet desideratum, at quae non in apicem desinat, sed sit quodammodo truncata ut SVDABS (fig. 5.) ex cujus extremo VS suspendatur pondus P, ajo ne sic quidem desideratum posse praestari ob contrariam causam. Nam finge pondus P suspendi ex T intervallo VT infinite vel incomparabiliter parvo, idem est, ac si suspensum esset ex V, verum eo casu cum pondus P assignabile agat in resistentiam seu firmitatem rectae VS itidem assignabilem, sed ope vectis VT incomparabiliter parvi, nihil aget, resistentiaque in VS ipsius respectu erit infinita, adeoque non ubique ejusdem rationis, cum initio sit infinita, alibi non item. Quod si pondus medio aliquo loco in trabe ex puncto suspendas, utique per se intelligitur nullam esse in figura uniformitatem rationum resistentiae et momenti. Uno tamen modo obtineri potest desideratum, quem nunc exponam, si scilicet pondus non suspendatur ab extremitate trabis, sed ei certa quadam ratione debita applicetur, quorsum me tandem ne cogitantem quidem ipsa duxit Analysis, quanquam potuissem praevidere sine calculo. Ajo igitur figuram exhiberi posse ubique aequaliter resistentem et proprio ponderi et alieno ipsi affixo, nempe a trabe trilinea parabolica CDABC resecetur trilinea aliqua portio apicem continens CVSC. Deinde corpus cylindricum (si placet) VTZ, cujus longitudo sit dimidia ipsius CV, affigatur trabi truncatae SVDABS, et ab ejus medio T suspendatur pondus P. Res autem ita temperetur, ut corpus VTZ una cum pondere P appenso aequetur ponderi ipsius portionis a trabe resectae CVSC. Hoc posito si modo corpus VTZ suam et ponderis P gravitatem sustinere possit firmiterque satis trabi affigatur,

de reliquo trabs truncata SVDABS aequaliter resistet et ponderi proprio et alieno VTZP. Quod sic probo: quando trilineum CVSC non erat resectum, tunc trabs SVDABS aequaliter resistebat et alieno ponderi, nempe trilinei CVSC et proprio, ex proprietate trilinei parabolici demonstrata. Jam pondus VTZP eodem modo gravitat, ut trilineum CVSC cum et pondere ei sit aequale, et eandem sui Centri gravitatis distantiam habeat ab FB (quocunque) quam trilineum. Nam Centrum gravitatis ipsius VTZP cadit in rectam normalem TP, et cum VT sit quarta pars ipsius CV ex constructione, patet centrum gravitatis trilinei CVSC cadere in eandem, aequivalent ergo hoc loco pondus VTZP et resecta trabis portio CVSC. Et hoc servire potest, quando trabs aliqua projecta ex muro aliquid in extremo sustinere debet; idem est si non in extremo, sed alibi, imo et in locis pluribus diversis simul pondera eadem vel diversa sint ferenda, modo ponderum ratio situsque ita temperetur, ut gravitatio ipsius trilinei parabolici debite imminuti per ipsa suppleatur. Ac proinde habebitur et solutio, si tota longitudo trabis aequaliter vel inaequaliter esset oneranda. Itaque huic certe quaesito aliisque connexis me puto satisfecisse. Sed ut figura detur quae desideratum praestet, quocunque pondere (etiam intra limites certos) fieri non potest nec tu quaesisti.

Quod superest Tibi velim persuadeas, Vir Clarissime, nihil mihi esse gratius, quam tui similibus, quibus curae est inquisitione veritatis augere humani generis opes, placere et conjunctis operis aliquid conferre posse ad praeclarissimum institutum. Cum igitur desideres aliquid lucis circa meam Analysin infinitorum, cujus in Actis specimina dedi, ego profecto velim, quicquid in hoc genere a me actum est vel ideo Tibi esse notum, ut perfici tua quoque ope possit, sed distantia locorum colloquio nos excludit et literis talia difficilius explicantur, praesertim cum nunc diversissimis distrahar cogitatis Historico-politicis quibus absolutis plus libertatis spero. Interim video ex Actis ubi Analysin curvae Isochronae exposuisti, intellecta esse Tibi methodi meae fundamenta; puto, et circa curvam catenariam me Tibi satisfacturum. Invitavi autem et alios in Actis ad hoc problema a Te propositum, ut experiar an et aliorum Methodi eo perveniant, praesertim D. Tschirnhusii mei qui de sua nuper methodo praeclara pollicitus est, sed ut intelligo queritur de calculi prolixitate; unde judico non aliam esse ejus Methodum, quam qua ego forte primus jam olim sum usus, cum Parisiis es-

semus, scilicet fingendo curvas generales, quas deinde comparo cum quaesitis, sed ea methodus praesertim quod et ipsa aliquid obstaculi patitur alicubi, Tabulis condendis sublevanda esset, alias nimis prolixa. Et sunt aliae magis directae facilesque, sed fateor nondum me quam opto perfectionem in hoc genere assecutum. Interim saepe desiderata consequor. Nuper Hugenius, Vir, ut non ignoras, in his studiis eminentissimus, duas lineas mihi quaerendas proposuit, quas inveni feliciter; scripsit ipse non parum se aestimaturum analysis meae rationem, si eo pertingat. Nimirum hac notandi ratione eandem opem Geometriae illi sublimiori vel Archimedeae affero, quam Vieta et Cartesius Euclideae et Apollonianae attulere, sed praeter vulgares affectiones, quae sunt potentiae et radices, adhibeo novas, quae sunt differentiae et summae; quomodo hac ratione Cycloidis aequationem exhibuerim in Actis Junii 1686, fortasse vidisti. Nec ulla mihi proponi potest Cycloidis proprietas, quam ope hujus aequationis non inde calculo demonstrem. Sic nullo negotio inde duces Tangentes, idemque est in aliis curvis. Sententiam tuam nosse velim circa meam demonstrationem contra Cartesianos de aestimatione virium a quantitate motus diversa. In Actis respondi Dno. Papino contradicenti, quod mentem meam non percepisset. Quae D. Fatio Duillier dedit contra D. Tschirnhusium, mihi jam innotuerant ex principio satis diverso et latius patente, et quod de centro gravitatis notavit, inveneram ratione plane diversa, aliaque Generaliora. Interim ego magni facio ingenium Viri et ab ipso quoque praeclara expecto. Est mihi in mente Analysis quaedam Geometriae propria toto coelo ab Algebra diversa, quae non procedit per aequationes, et suos usus habebit insignes. Nam Speciosa hactenus usitata proprie magnitudinis est seu numerorum, non situs seu figurarum; etsi situs obtorto collo ad eam revocetur. De ipsa Algebra Speciosa per artem combinatoriam perficienda spero dare quiddam ejusque ope explicare radices aequationum altiorum, nam aliae viae vel non procedunt vel sunt nimis prolixae, combinationibus autem Algebraicae expressiones mire contrahuntur. Et omnino Algebra est scientia ipsi combinatoriae (nempe scientiae de formulis in universum tractanti) subordinata, ejusque regulas applicat ad casum, quo per literas vel notas numeri indefiniti significantur. Sed finio etc.

Dabam Hanoverae 24 Septembr. 1690.

III.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Octennium est, ex quo primas ad Te literas dare ausus fui, et quinquennium, ex quo ad illas responsum a Te accepi. Ego (ut illo tempore adhuc hospes in Geometria fui, temeritatemque meam triennali silentio meritissime punitam vidi) diu mecum deliberabam, num rescribere auderem, tum quod Tumet ipse velle Te significasti, ut hac erga Te occupatissimum scribendi libertate parcius uterer, tum praesertim quod ea omnia, in quibus a Te instrui desideraveram, propriis interea meditationibus perspecta mihi evasissent. Huc accessit etiam maeror ex Tui paulo post offensione conceptus, qui me a scribendo aliquanto diutius retraxit: quo vehementius enim illam semper abhorrui nequitiam, quo quis ultro laedit eum cui gratias deberet, hoc acerbius dolebam, me in ejus apud Te suspicionem incidisse. Et quanquam nullius in Te pravi affectus conscius unquam mihi fuerim (quod ille novit qui novit omnia, quodque Tibi, si jubes, probare paratus sum narratione ejus, quod inauspicato illi de Tuis judicio in Acta relato ansam dederat) non potui tamen quin compellare metuerem, quem undecunque mihi offensum arbitrabar. Vixdum autem hunc metum posueram, ac Te mihi reconciliatum putabam, cum ecce novum ingruebat obstaculum, quod me fatali quadam quasi vi a Tui commercio hucusque arcuit. Morbum volo longe gravissimum, qui antehoc triennium me primum invasit, et non tantum per integrum semestre lecto me affixit, ac frequentioribus postea recidivis infestavit, sed et universam corporis mei oeconomiam sic turbavit, ut ejus reliquias in hunc usque diem circumferre, multoque acidularum et aliorum medicamentorum usu lenire cogar. Est vero quippiam, ut conjicio, cachectici ex bile et scorbuto conflatum, quod pessimam mixturam efficit, et praecipue vitae meditabundae et sedentariae adeo inimicum est, ut etiam horariae lucubrationi motione destitutae non sine incommodo vacare liceat. Cui si adjungas nativum meum ad scribendum lentorem ac segnitiem non mediocrem, habebis fortasse quae diuturnum meum silentium apud Te utcunque excusabunt. Nescio vero, an et etiamnum haec obstacula superare potuissem, ni per fratrem certior factus essem, commercium literarium Tecum ineundum non tantum benignissime a

Te exceptum iri, sed optari quam maxime ac desiderari, ut haberes qui post suum discessum Tua in his oris negotia curanda in se susciperet. Ea namque, Vir Amplissime, Te veneratione prosequor, eo cultu et amore complector, ut nihil non molestiarum devorare malim, quam Tuis deesse servitiis. Praecipe itaque liberrime, si qua tuis usibus ac commodis prodesse potero; et experieris, neminem majore fide, promptitudine et alacritate jussa Tua executurum. Percontatus antehac ex me fuisti, quid sentirem de discrimine quod constituis inter quantitatem motus et virium. At quia video Tibi jam cum fratre hanc per literas controversiam agitari, nolo actum agere; credo enim ipsum mecum sentire, seu quod ego recte sentiam, seu quod ideis ab institutione mea sibi implantatis praeoccupatus mecum erret. Ego, ut verum fatear, nunquam capere potui, cur virium quantitatem aestimare malis ex longitudine itineris ab extriuseco impedimento (hic a gravitate) saepe minuendi, quam ex eo, quod in ipso ictus momento contingit; quod mihi perinde videtur esse, ac si quis globo e tormento majori in murum exploso minorem virium quantitatem tribueret, quam glandi sclopetariae quae murum transiliret. Nisi forte principium gravitatis velis esse quid intrinseci interpretandum de illo conatu, qui Tibi juxta nuperam sciagraphiam Tuae Dynamicae corporis essentiam ingreditur; quamvis in literis ad fratrem datis nec hoc mihi voluisse visus es.

Jacturam desideratissimi nostri Hugenii magnopere doleo, optoque, ut ejus posthuma in commodum rei Geometricae quantocyus cum publico communicentur. Memini Dethlevum Cluverium an. 1682 Londini mihi retulisse, illum mentis quandoque alienationem passum esse; quod ego tum ex sequiori affectu dictum existimabam; sed idem postea ab aliis mihi confirmatum fuit. Cum Cluverii mentionem facio, qui primus elegantissimae Tuae quadraturae circuli tum recens publicatae participem me fecit, succurrunt illa, quae hic Vir m. Jul. 1686, et Octob. 1687 velut in aenigmate proposuit; et quia sublime quid in iis latere suspicor, libenter de iis plenius edoceri cuperem. Magnum illo tempore in suis aedibus habebat typorum apparatum, quem ajebat operi cuidam Astronomico destinatum: an vero quippiam hoc Auctore prodierit, dubio procul Tu me melius nosti. Recordor etiam ejus, Vir Amplissime, quod habes in praefato Tuo Tetragonismo anni 1682 de Summa Progressionis Harmonicae per compendium invenienda. Avidissime

a Te expecto, si quid ejusmodi nosti; quia sentio rem in tota Geometria summae utilitatis fore. Ego saepius id aggressus sum, sed nihil inveni, quod compendii alicujus nomen mereatur. Aliud etiam est, cujus sciendi sum impatientissimus. D. Tobias Hollanderus, Ex-Consul Scaphusianus, nuper exemplaria nonnulla Tractatus alicujus Astronomici, cui nomen Amalthei dedit, hic distribui curavit, in quo prima Propositio sic habet: Data proportione radii ad peripheriam, invenire obliquitatem Eclipticae, ostenditurque medium proportionale inter ista duo secantem esse complementi obliquitatis Eclipticae: quod cum expertus essem quam accurate quadret, non potui non summopere mirari, nescius an casu hoc contingat, an vero a re necessariae veritatis pendeat, quod a liberrimo Creatoris arbitrio dependisse semper credidi. Multa ejusmodi habet alia, quae me prorsus attonitum reddiderunt. Puto autem esse Spleissiana. Quid Tibi de istis videatur, scire valde aveo. Si quae sit Physica, quae harum rerum necessitatem a priori demonstrare potest, eam fatebor omnium absolutissimam. Sed nolo Te hac vice diutius morari. Vale, Vir Amplissime, et ama etc.

Dabam Basiliae 9. Octobr. 1695.

IV.

Leibniz an Jac. Bernoulli.

Hanoverae 2. Decembr. 1695.

Gratissimae mihi Tuae fuere ex tanto intervallo, idque multis nominibus. Nam et semper Te feci plurimi nec dubitavi meditationes Tuas et publico prodesse posse et mihi. Duo autem displicent, quod Te video non optime valere, et quod me offensum Tibi putasti. Sed utinam tam facile esset priori malo mederi, quam mihi in proclivi est sinistram opinionem Tibi eximere. Equidem quod triennale silentium mihi tribuis ad primas duas, quomodo sese res habuerit, jam olim significavi. Advenere Tuae Hanoveram, cum ego inde digressus essem ad longum iter in Italiam usque, unde sesquianno demum transacto eram reversus: et cum pleraeque aliae mihi fuissent missae, Tuae tamen nescio quo casu hae-

serant neglectae, ita ut ad reversum etiam sero fuerint delatae. Acceptis mox respondi, explicatis morae causis, et sperabam excusationem meam Tibi innocentiae meae fidem fecisse, ne mihi elationem animi tribueres, a qua sum alienissimus, quasi, ut scribis, temeritas Tua longo silentio sit punita. Ego vero honori mihi literas Tuas duxi, et conatus sum satisfacere quantum tunc posse videbar, occupatissimus vel ideo quod reverso domum post longam absentiam magna rerum moles incumbebat. Et res ostendit, eo Te ingenio esse, ut facile per Te posses consequi quae in Actis posita explicari amplius desideraveras. Idque postea intelligere fuit mihi gratissimum. Itaque mire gravisus sum, ubi Te in adyta haec penetrasse vidi, quod inde multum fructus augurarer his literis speraremque Tua ope nostram methodum spargi magis posse et inclarescere, ut alii ex torpore excitarentur, in quo facit eos haerere vana opinio de analysi jam a Cartesio prope perfecta. Itaque omnem a me invidiam abfuisse velim Tibi persuadeas: ac ne hoc quidem poenitet, quod (ut poteram, si vacasset) expositis Tibi meis non impedivi, ne in partem hujus laudis venires. Nam etsi fortasse sic magis consuluisse videri possem meae gloriae, minus tamen consuluissem Reipublicae, quoniam quae prorsus aliena judicasses mereque ab alio communicata, excoluisses, credo, minore affectu, et minores progressus fecisses, quod ipsum fortasse non tam auxisset quam minuisset laudes meas (si tanti est etiam has curari) methodo nostra diu adhuc latitura in obscuro, si a me solo produci satis debuisset. Et tantus est candor Tuus, ut non neges, mea opera haec in lucem prodire coepisse. Quanquam autem nonnihil miratus fuerim, quod aliquando non satis discriminis agnoscere visus fuisses inter nostra et aliena, hoc tamen non malo animo, sed quodam judicio factum putabam; et mox ita mentem Tuam explicaveras, ut nisi morosus essem prorsus, non possem non contentus esse. Dissensus autem in quibusdam minutioribus quam mihi non displicuerit, vel inde intelligere potes, quod Tuis rationibus consideratis mea emendare non dubitavi alicubi, licet (quod pudet dicere, minus tamen mirareris si meas distractiones nosses) sero demum et occasione Epistolae ab ingeniosissimo fratre Tuo scriptae attentionem attulerim quam res postulabat. Sic igitur velim habeas, me vim ingenii Tui facere maximi, neque etiam de optima voluntate dubitare, adversa autem valetudine non mediocriter tangi. Atque utinam inciperent quibus licet, de Medicina constituenda co-

gitare attentius. Ego enim nón dubito multa nos jam tum praestare posse, si saperemus, id est si vellemus cogitare quae maxime interest nostra. Itaque etiam Cl. Fratrem Tuum hortatus sum, ut subinde huc animum verteret, non quasi Clinicum fieri velim Medicum, quales vix sui amplius esse solent, sed quod putem ea aetate, eoque ingenio posse ab ipso in re Medica non hospite aliquid magni proficisci. Habetis vos in Helvetia viros egregios, et prae caeteris video jure merito Wepferum celebrari, quem adhuc in vivis esse puto. Certe Weselovius, collega meus et ad Comitia Ratisbonensia Electoris, tunc Ducis Brunsvicensis, Domini mei, ante aliquot annos ablegatus, Wepferi operam sibi salutarem apud me non potuit satis praedicare.

Circa summam progressionis harmonicae aliquid me consecutum puto, etsi non omne quod vellem. Sint verb. gr. summandi numeri progressionis harmonicae $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ etc. usque ad $\frac{1}{1000}$. Partiamur, si placet, in quinque partes, primam ab $\frac{1}{1}$ usque ad $\frac{1}{199}\left(\text{omisso } \frac{1}{100}\right)$, ab $\frac{1}{201}$ usque ad $\frac{1}{399}\left(\text{omisso } \frac{1}{300}\right)$, inde ab $\frac{1}{401}$ usque ad $\frac{1}{599}\left(\text{omisso } \frac{1}{500}\right)$, et ab $\frac{1}{601}$ usque ad $\frac{1}{799}\left(\text{omisso } \frac{1}{700}\right)$, et ab $\frac{1}{801}$ usque ad $\frac{1}{999}\left(\text{omisso } \frac{1}{900}\right)$, quibus deinde separatim addantur $\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{300}+\frac{1}{400}+\frac{1}{500}+\frac{1}{600}+\frac{1}{700}+\frac{1}{800}+\frac{1}{900}+\frac{1}{1000}$. Porro una ex his quinque partibus, veluti ab $\frac{1}{1}$ usque ad $\frac{1}{199}$ constabit ex $\frac{1}{100-1}+\frac{1}{100-2}+\frac{1}{100-3}$ etc. usque ad $\frac{1}{100-99}$ seu $\frac{1}{1}$; et $\frac{1}{100+1}+\frac{1}{100+2}+\frac{1}{100+3}$ etc. usque ad $\frac{1}{100+99}$ seu $\frac{1}{199}$. Jam

$$\frac{1}{100-1}=\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\frac{1}{100^3} \text{ etc.}$$
$$\frac{1}{100-2}=\frac{1}{100}+\frac{2}{100^2}+\frac{4}{100^3}+\frac{8}{100^4} \text{ etc.}$$
$$\frac{1}{100-3}= \text{etc. Et similiter}$$

$$\frac{1}{100+1} = \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{100+2} = \frac{1}{100} - \frac{2}{100^2} + \frac{4}{100^3} + \frac{8}{100^4} \text{ etc.}$$

$\frac{1}{100+3}$ = etc. Atque ita si quamlibet fractionem per talem seriem exprimas, summa omnium ab $\frac{1}{1}$ usque ad $\frac{1}{199}\left(\text{excepto } \frac{1}{100}\right)$ **redacta erit ad summas potentiarum a numeris integris ab 1 ad 99, quas non longe admodum continuare necesse est, cum altiores potentiae omitti possint. Et dimidiatur rursus labor ex eo, quod** potentiae exponentis paris quippe ipsis v. gr. $\frac{1}{100-2}$ et $\frac{1}{100+2}$, sub contrariis signis communes, eliduntur. Itaque $\int \frac{1}{100-x} + \int \frac{1}{100+x}$ (usque ad ultim. $x = 99$) aequ. $\frac{2}{100}\int 1$ (seu 99) + $\frac{2}{100^3}\int xx + \frac{2}{100^5}\int x^4$ etc. Simili modo et secunda pars summabitur. Nam $\int \frac{1}{300-x} + \int \frac{1}{300+x}$ (usque ad $x = 99$) = $\frac{2}{100}\int 1$ (seu 99) + $\frac{2}{300^3}\int xx + \frac{2}{300^5}\int x^4$ etc. **Eodem modo habebitur** summa partis tertiae, quartae, quintae, quas et in unum addi facile est, et hoc inest commodi, quod $\int xx$, $\int x^4$, $\int x^6$, **seu summae 99 potentiarum ab** 1 **usque ad 99** (quas jam in Tabula vel aliter haberi suppono) in quinque partibus eaedem manent. Et ita reperietur $\frac{2}{100}\int 1$ seu 99 : 50 debere multiplicari per $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$, et $\frac{2}{100^3}\int x^2$ debere multiplicari per $\frac{1}{1} + \frac{1}{27} + \frac{1}{125} + \frac{1}{343} + \frac{1}{729}$ summam cuborum ab his quinque, et $\frac{2}{100^5}\int x^4$ per summam surdesolidorum ab iisdem quinque, et

$\frac{2}{100^7}\int x^6$ per summam septimarum dignitatum ab iisdem, et ita porro si sit opus. Caeterum perfectius aliquid a me optari, quod etiam theoriae magis satisfaceret, non dissimulo. Et aperiunt se nonnulla, sed quae satis examinare non licuit.

Pulcherrima haud dubie observatio est, sive Hollanderi, insignis ut apparet viri, sive, ut suspicaris, Spleissii, quem olim ab Ottio et Screta eximiis ingenio et doctrina tunc juvenibus mire mihi laudari memini, quod secans complementi obliquitatis Eclipticae sit proportione media inter radium et peripheriam circuli. Sed in causam inquirere tum maxime opus foret, si quod in via telluris ad circulationem suam relata deprehensum est, idem in caeteris planetis deprehenderetur. Caeterum quod addis, dubitare Te casu hoc contingat, an vero pendeat a re necessariae veritatis, quod a liberrimo Creatoris arbitrio dependisse semper antea credideris, ea de re mihi videtur, etiam quae certis rationibus constant in mundo, a liberrimo Creatoris arbitrio proficisci; perfectissima enim libertas est sine ullo obstaculo ad optimum semper ferri; nec libertas est, sed servitus posse aberrare in delectu. Interim etsi omnia determinatis rationibus fieri credam, non tamen necessitatem eventibus impono, sed contingentiae sua jura conservo. Multumque interesse censeo ea in re inter Geometricam et Physicam veritatem, non tantum quoad nos, qui causas ignoramus, sed etiam in rebus ipsis. Quibus omnibus aliquam lucem afferre spero, ubi meditata circa res ab imaginatione separatas proferre potero, in quibus multa sunt inexpectatae, ut mihi videtur, claritatis et utilitatis, praesertim ad mentem nostram magis erigendam. Caeterum fac quaeso ut Hollanderi liber etiam apud nos innotescat.

Dethlevum Cluverium ob ingenium et doctrinam maximi facio, et doleo domesticis quibusdam negotiis quietem ejus perturbari. Inter annos aliquot mihi bis vel ter scripsit. In meditationibus ejus circa series non dubito quin aliquid lateat praeclari et profundi. Tametsi non videam, cur Archimedem et nos culpet, quod inassignabilia negligimus, quod nec apud ipsum dissimulavi. Multum in calculo Astronomico laboravit. Sed nondum aliquid edidit, de quo doleo.

De controversia Dynamica, cujus meministi, gratissimum mihi semper erit intelligere judicium Tuum, et velim vacet Tibi satis considerare sententias meas; nunc enim quod de iis suspicari vi-

deris a me longissime abest. Saepe dixi omnia in natura fieri mechanice, atque adeo et gravitatem; sed causas intimas ipsarum mechanismi Legum puto a superioribus principiis Naturae insitis proficisci. Nolim etiam putes me virium quantitatem aestimare ex longitudine itineris, sed unice ex quantitate effectus quo consumuntur. Ubi nihil refert, quem effectum sumas, modo adhibeas mensuram quandam certam. Nam quod eundem effectum (vires consumentem) bis terve producendo demum vim suam consumit, id mihi virtute duplum triplumve est ejus quod vim suam consumit producendo eum non nisi semel. Itaque globus qui in plano horizontali decurrens quatuor Elastra inter se aequalia et similia eodem modo intendere potest, virtute quadruplus est ejus qui uno solo sic tenso redigitur ad quietem. Et quod vim habet attollendi unam libram ad pedem unum, dimidium est ejus quod potest hunc effectum praecise adhuc semel repetere, quod fit sive attollendo unam libram ad unum pedem, et eandem adhuc ad unum pedem; sive attollendo unam libram ad unum pedem, et simul adhuc aliam ad eundem pedem. Utrumque enim est attollere libram ad pedem, et libram ad pedem. Sed gravitate et Elastro sepositis (quorum rerum minus liquidae sunt causae, tametsi in Dynamicis de eorum causa solicitos nos esse necesse non sit) de simplici magnitudine et motu loquamur. Ubi similiter procedit regula mea de repetitione certae mensurae. Dico igitur potentiam quae quatuor corporibus inter se aequalibus dare potest certum velocitatis gradum, eumque eundem in unoquoque (sive simul sive successive, sive longo sive brevi tempore) quadruplam esse ejus, quae uni tantum corpori tali eundem gradum dare potest. Nam illa praecise quater efficit, quod haec semel. Consentiunt autem aestimationes inter se, quamcunque mensuram adhibeas exacte repetitam, nam potentia quae quadruplo corporum numero datam velocitatem dare potest, etiam datum grave ad quadruplam altitudinem attollere, vel quadruplum elastrorum numerum intendere potest. Sed eidem corpori quadruplam velocitatem dare non potest. Nam hoc non est mensuram (corpus simplum velocitatis simplae) quater repetere, cum modale tantum, scilicet velocitas, non vero simul et corpus repetatur. Unde etiam qui hoc potest, is plus multo quam prior, nempe corporibus celeritatem simplam dare potest, adeoque mensuram exacte repetit non quater, sed sedecies. Et majus est velocitatem multiplicare corpore non multiplicato ob inertiam corpo-

rum naturalem, ut Keplerus vocabat. Nam agunt substantiae quantum non noxia corpora tardant, ut Virgiliane loquar. Scilicet hic quoque vis unita fortior. Sed demonstrativa ratio aliunde patet. Quibus expensis forte agnosces me non tam perfunctorie de his cogitasse, quam videris suspicari; quod facere solet, ut demonstrationes aliorum minus attente examinemus. Neque vero in generalibus substiti, sed multas et difficiles circa motum quaestiones hinc solvi, in quibus aliorum principia, ni fallor, cessant. Omnino autem reperio, si vim meo more per effectum aestimes, semper eandem virium quantitatem manere; eandem autem quantitatem motus semper manere non posse. Sed de his omnibus nemo est, cujus judicium libentius audiam quam Tuum, modo id sine incommodo Tuo fiat. Vale et valetudinis inprimis rationem habe, ac me ama etc.

P. S. Skretam puto obiisse. Nihilne Ottius in studiis facit? Quid Facii Duillerii? Sed maxime quid Tu ipse? An mihi aliquando Analyseos nostrae novae descriptionem daturo, summittere inedita quaedam Tua vel etiam (quod ipsum non exiguum erit) editorum analyses velis, erit in Tua manu. Senties autem me facturum semper, ut Tuum Tibi tribuatur, alienissimumque me esse ab alienis laudibus involandis.

V.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Basiliae 4. Martii 1696.

Ex nuperis tuis ad me datis laetabundus intellexi, affectum Tuum erga me, nec longo meo silentio, nec aliis quae in me displicare forte poterant, refriguisse; id quod tot argumentis mihi persuades, ut morosus essem, si vel umbram scrupuli retinerem; tametsi et illud superfluum apud me fuisse credas velim, quippe qui Tuum ad primas meas silentium in meae qualiscunque excusationis, minime vero elationis, ut scribis, alicujus in Te argumentum attuli. Quanquam autem illo tempore nihil mihi fuisset optabilius, quam in pervestigandis Geometriae adytis manuductoris alicujus opera uti, qua multum et temporis et laboris lucri facere

potuissem; gaudeo tamen nunc id subsidii mihi tum fuisse denegatum, quia Tecum existimo, nos ita comparatos esse, ut profundius semper ruminemus, majorique ut loqueris, affectu excolamus ea, quae ex propriis meditationibus, quam quae ex aliena institutione haurimus. Si quid ergo isthic aegre ferre debeo, hoc est, quod in Italiam petituro hac vel non longe abhinc transeundum Tibi fuerit, desideratissimo Tui aspectu et alloquio frui mihi non contigerit. Utinam vero id aliquando fiat, atque etiam per firmiorem valetudinem sperare liceat. Meam quidem ab aliquo tempore, per Dei gratiam, satis benignam sentio, at Tuae me sollicitudo tenet, de qua memini Te antehac tum in Actis, tum in literis ad Fratrem datis conquestum esse. Deus meliora!

Scretam Scafusianum recte putas obiisse, sed et obiit Wepferus, Practicus magni apud nos nominis et existimationis, idque jam ante annum et quod excurrit. Non dubito, quod si quis principia Mathematica ad Medicinam applicare vellet, is rem Medicam, immane quantum promovere posset. Hac nempe opinione motus, Auctor primum extiti Fratri, ut hoc studium amplecteretur et quam primum illud salutare inceperat, identidem illum stimulavi, ut pricincipia scientiae, quam a me didicerat, huc applicaret. Sed surdo fabulam: praevisa enim difficultate absterritus, vix de Fermentatione et de Motu musculorum quaedam dedit; quantillum autem istud est, satis ostendit, quid Medicus Mathesi adjutus possit. In partibus animalium solidis hoc abunde comprobavit Borellus, nec de fluidis videtur desperandum, cum naturam pressionis ipsorum satis quoque nunc compertam habeamus. De Fatziis Duilleriis nihil novi, nisi quod alter Londini sedem fixerit, alter a Fratre meo Tuum calculum edoctus, etiamnunc Genevae resideat. Ottius Dioptricis totus immersus est, et lentibus expoliendis aetatem consumit. Quam ante 25 annos sententiam Heidelbergae pro Cathedra defendit, de radiis per meros circulos ex uno puncto in aliud colligendis, etiamnunc urget. Tentavi aliquando hoc problema, sed prolixi calculi impatiens, iterum deserui. De causa Obliquitatis Eclipticae multa disseris, Vir Ampl. et quod etiam illa, quae certis rationibus in mundo constant a libero Creatoris arbitrio pendeant, ostendis, quae quidem ego nolo controvertere, attamen hoc non est, quod volo, sed peto tantum a Te, num existimes nexum inter obliquitatem hanc et circuli mensuram ab Auctore ejus casu tantum vel palpando inventam fuisse, an vero per Analysin vere

Geometricam inveniri potuisse credas. Librum ipsum proxime occasione nundinarum Francofurtensium submittam, una cum excerptis*) quibusdam ex Adversariis meis, quae aequi bonique consulas, rogo; alio tempore plura communicabo, sed malleu Ipse significes, quae Tibi submissa velis; quanquam dubitem, quicquam in iis contineri, quod Te dignum, Tibique non omne jam antea perspectum sit. Audio, brevi proditurum Tractatum aliquem Dn. March. Hospitalii de Calculo Differentiali (differentiali tantum, non summatorio) quod nuncio, ut Tua Tibi mature asserere festines, nec Te ab aliis praeveniri patiaris. Dedit et promisit Dn. D. T. nupero IXbri quaedam, quibus, si vera sunt omnia, vix praeclariora et utiliora in tota Geometria inveniri possunt. Secus sentiendum puto de Geometriae correctione, quam suscepit olim atque etiamnunc versat animo Dn. Cluverius. Is per literas, quibus me non ita pridem salutavit, sententiam meam super ea re percontatus est; cui rescripsi hunc in modum: Videas num bene! „Pour les „espaces Paraboliques (hoc enim Idiomate me compellarat) vous „avez raison de dire qu'elles sont comme $\frac{2N^2+1}{4N^2-1}$; mais lorsque „vous ajoutés, que tous les Geometres se sont trompés, pour les „avoir faites, comme $\frac{2N^2}{4N^2}=\frac{1}{2}$, je ne suis point du tout de vôtre „sentiment, parceque ces expressions $\frac{2N^2+1}{4N^2-1}$ et $\frac{2N^2}{4N^2}$ signifient „tout à fait une même quantité, lorsque N signifie uu nombre „infini des parties. Pour être persuadé de cela, concevéz une de „ces parties encore divisible en deux autres, et par consequent, „leur nombre $P=2N$ (puisque les infiniment petits aussi bien „que les infiniment grands reçoivent du plus et du moins, comme „les grandeurs finies) et vous trouveréz par le meme Calcul les „Espaces Paraboliques, comme $\frac{2P^2+1}{4P^2-1}$; c'est à dire (à cause de „$P=2N$) comme $\frac{8N^2+1}{16N^2-1}$; donc $\frac{8N^2+1}{16N^2-1}$ et $\frac{2N^2+1}{4N^2-1}$ doivent „signifier une même raison, ou bien, les memes grandeurs auront „ensemble une plus grande et plus petite raison, ce qui est absurde.

*) Siehe die Beilage zu diesem Schreiben.

Quae de summa Progressionis Harmonicae in Tuis attulisti, valdopere me quidem affecerunt, nec satis initio mirari potui summam Tuam dexteritatem, facilitatemque in transmutandis varieque ad nutum Tuum detorquendis numeris; sed tamen re penitius inspecta deprehendi, Te hoc conatu parum, imo nihil compendii consecutum esse; nec magis scopo appropinquari nova hac serie, in quam propositam $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\,\ldots\ldots\,\frac{1}{1000}$ convertis, quam simplici additione totidemmet terminorum ipsius propositae; quod sic ostendo: Quia docente Wallisio, posita maxima $x=99$,

$$\frac{2\sqrt{1}}{100}\,M\,\overline{\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}}$$
$$\frac{2\sqrt{xx}}{100^3}\,M\,\overline{\frac{1}{1}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}}$$
$$\frac{2\sqrt{x^4}}{100^5}\,M\,\overline{\frac{1}{1}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}}$$
$$\frac{2\sqrt{x^6}}{100^7}\,M\,\overline{\frac{1}{1}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}+\frac{1}{7^7}+\frac{1}{9^7}}$$
etc. etc.

$\int xx$ fere $=\frac{x^3}{3}=\frac{99^3}{3}$, et $\int x^4$ fere $=\frac{x^5}{5}=\frac{99^5}{5}$ et $\int x^6$ fere $=\frac{x^7}{7}=\frac{99^7}{7}$ etc. erit $\frac{2\sqrt{1}}{100}+\frac{2\sqrt{xx}}{100^3}+\frac{2\sqrt{x^4}}{100^5}+\frac{2\sqrt{x^6}}{100^7}$ etc. fere $=\frac{2.99}{1.100}+\frac{2.99^3}{3.100^3}+\frac{2.99^5}{5.100^5}+\frac{2.99^7}{7.100^7}$ etc. neglecta viz. multiplicatione per factores terminorum alteros $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$ etc. quippe qui sensibiliter brevi in unitatem abeunt. Sed et fractiones $\frac{99}{100}$, $\frac{99^3}{100^3}$, $\frac{99^5}{100^5}$ etc. ab unitatibus sensibiliter non differunt, nec nisi post 34ium terminum ad $\frac{1}{2}$ decrescunt. Idcirco series ista fere convenit cum hac $\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}$ etc. atque sic in eandem seriem harmonicam relabimur, cujus summam initio per compendium quaerere studebamus. Caeterum si acquiescere velimus aliquali tantum approximatione nec accurata summa quaeratur, possumus simplici additione paucorum terminorum rem satis longe provehere, hoc vel simili modo utendo. Addantur si placet decem primi termini

eritque $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}=A$ $=\frac{7381}{2520}$; hinc pro singulis sequentium decem terminorum ab $\frac{1}{11}$ usque ad $\frac{1}{20}$ ponatur $\frac{1}{10}$, adeoque pro omnibus $\frac{10}{10}=\frac{1}{1}$, ita etiam pro 10 seqq. ab $\frac{1}{21}$ ad $\frac{1}{31}$ ponantur $\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$, et pro seqq. ab $\frac{1}{31}$ ad $\frac{1}{40}$ substituantur $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$ etc. et ita consequenter usque ad $\frac{1}{100}$, adeo ut summa terminorum ab $\frac{1}{11}$ ad $\frac{1}{100}$ fiat $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}=A-\frac{1}{10}$, justo major. Eadem ratione ponantur pro singulis terminorum ab $\frac{1}{101}$ ad $\frac{1}{200}$ totidem $\frac{1}{100}$, et pro singulis ab $\frac{1}{201}$ ad $\frac{1}{300}$ totidem $\frac{1}{200}$, atque ita porro usque ad $\frac{1}{1000}$; quo pacto summa terminorum ab $\frac{1}{101}$ ad $\frac{1}{1000}$ fiet ut antea $=A-\frac{1}{10}$ justo quoque major; ideoque summa omnium mille terminorum ab unitate fiet $A+A-\frac{1}{10}$ $+A-\frac{1}{10}=3A-\frac{1}{5}=8\frac{493}{840}$ justo major. Iterum pro terminis ab $\frac{1}{11}$ ad $\frac{1}{20}$ ponantur totidem $\frac{1}{20}$, et pro terminis ab $\frac{1}{21}$ ad $\frac{1}{30}$ totidem $\frac{1}{30}$ etc. ut et pro terminis ab $\frac{1}{101}$ ad $\frac{1}{200}$ totidem $\frac{1}{200}$; et ab $\frac{1}{201}$ ad $\frac{1}{300}$ totidem $\frac{1}{300}$ etc. qua ratione summa terminorum ab $\frac{1}{11}$ ad $\frac{1}{100}$ fiet $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$ $+\frac{1}{10}=A-1$, quanta quoque erit summa terminorum ab $\frac{1}{101}$ ad $\frac{1}{1000}$, sed utraque justo minor; unde et summa omnium mille terminorum obtinetur $A+A-1+A-1=3A-2=6\frac{661}{840}$

justo minor. Vera ergo summa progressionis cadit inter limites $8\frac{493}{840}$ et $6\frac{661}{840}$; Imo inter medium horum Arithmeticum $7\frac{577}{840}$ et minorem $6\frac{661}{840}$, cum ostensu facile sit, summam veram propius accedere debere limiti inferiori quam superiori. Et certum est, Tuae progressionis additionem per quam plurimos terminos continuandam esse, priusquam limitem hunc assequatur; praeterquam etiam quod nullum limitem in excessu suppeditare potest: Verumtamen ista omnia ad Praxin parum subsidii afferre possunt.

Circa Controversiam Dynamicam mentem Tuam ita nunc demum explicuisti, ut facile mihi sit perspicere, ubi error lateat. Vis quantitatem virium aestimandam esse ex quantitate effectus, id est, ut explicas, ex numero elastrorum, quorum tensione absumuntur. Non repugno. Supponis item, corpus dupla cum celeritate sursum nitens quadruplam emetiri altitudinem, priusquam tota absumatur. Et hoc verissimum. Sed cum existimas, propterea quadruplum intendi elastrorum numerum, hoc vero Tibi concedere non possum, nisi velis materiam horum elastorum quae gravitatem efficit spectandam esse velut quiescentem ac passive tantum resistentem; quemadmodum sane perspicuum est, globum in plano horizontali decurrentem, tantundem aëris si hic quiescat in itinere suo offendere, quantum ipse spatii in illo confecerit. At talis hypothesis naturae gravitatis manifeste repugnaret, cum ex illa non ostendi posset, cur gravia sursum projecta finito ascensu deorsum repellenda essent. Ponamus igitur, quod res est, quodque nosti jam ab Hugenio observatum esse, materiam elasticam, quam gravitatis causam esse volumus, rapidissime deorsum ferri, et 'in gravia sursum projecta magna celeritate impingere, imo celeritate infinities majore illa quam corpora naturalia descendendo acquirere possunt (id enim nisi supponatur, cessabit tandem omnis gravium acceleratio, quod ipsum est contra Galilaei hypothesin, in qua tamen commune nostrum principium de ascensu quadruplo cum dupla celeritate peragendo fundatur) ponamus, inquam, ista, et plana erunt omnia. Nam ob celeritatem infinite magnam materiae gravitatem efficientis tantundem est, ac si grave sursum projectum quiesceret, et, si quiesoit, liquet numerum elastrorum in illud impingentium tempori proportionalem esse; unde duplo tempore, quo corpus dupla cum velocitate sursum tendens, quadruplum spatium emetitur, duplum tantum ela-

strorum numerum ostendit, duplamque adeo quantitatem virium impendit, non quadruplam ut Tu voluisti. Et considerandum est, quod si materia gravitatem efficiens, ut quiescens spectaretur, ejusque resistentiae, hoc est, decrementa velocitatum in corporibus sursum projectis ponerentur iu ratione seu simplici, seu verius duplicata barum velocitatum, nunquam accidere posset, ut corpus dupla cum celeritate moveri incipiens, seu duplo seu aequali tempore quadruplum spatium conficeret; quod tamen experientia confirmat, Tuque pro principio assumpsisti. Quorum omnium veritatem puto Te agniturum, si vel leviter ad haec attendere graviora Tibi negotia permiserint. Utinam vero totus noster esses, nec tam diversis studiis distraheretis! singulis imo pluribus Te parem esse scimus et sentimus, at omnibus non potest fieri quin obruaris, nec Tu dees ulli rei, sed tempus deest Tibi. Tametsi fortassis ego, qui sum tardiusculus, comprehendere nequeam, quid natura valeat in homine extraordinario, qualem Te universus orbis literatus meritissime suspicit. Et sane aliquando cum fratre miratus fui, quod responsum a Te ad suas acceperit, et diffusissimum simul et subtilium speculationum refertissimum, cui parando, habita ratione temporis, quo id acceperat, vix νυχθήμερον Tibi suppetiisse aestimaveramus. Sed et aliud est et praecipuum, cur vellem Tibi temperares; metuo Tuae valetudini, quam conservari omnium interest; hanc igitur, Vir Eximie, supra omnia cura, et vale, meque ceu facis, ama etc.

P. S.

Meminit Nob. Dn. Tschirnh. in 2.ª editione Medicinae Mentis, p. 186. machinae cujusdam Arithmeticae, cujus Te inventorem praedicat. Valdopere me obstringes, si qua in re illa consistat, mihi patefeceris.

Beilage.

I. Numerum quemcunque surdum seu irrationalem $\sqrt{n}$ vel $\sqrt{cn}$*) etc. per infinitam seriem rationalium exprimere.

Convertatur numerus n in fractionem hujus formae $\frac{a}{a-b}$. Haec fractio (ut et ejus □ᵗᵘᵐ, Cubus, Biquadr. etc.) convertatur per divisionem artificiosam in series, hoc pacto: Harum serierum per-

*) d. h. $\sqrt[3]{n}$.

pendicularium primi termini sunt unitates, secundi numeri naturales, tertii trigonales etc.

Expon. potest.	Potestates.
0	$1 = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0$ etc.
½	$\sqrt{\frac{a}{a-b}} = 1 + \frac{b}{2a} + \frac{1.3bb}{2.4aa} + \frac{1.3.5b^3}{2.4.6a^3} + \frac{1.3.5.7b^4}{2.4.6.8a^4}$ etc.
1	$\frac{a}{a-b} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{bb}{aa} + \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5}$ etc.
1½	$\frac{a}{a-b}\sqrt{\frac{a}{a-b}} = 1 + \frac{3b}{2a} + \frac{3.5bb}{2.4aa} + \frac{3.5.7b^3}{2.4.6a^3} + \dots$
2	$\frac{aa}{\square\, a-b} = 1 + \frac{2b}{a} + \frac{3bb}{aa} + \frac{4b^3}{a^3} + \frac{5b^4}{a^4} + \frac{6b^5}{a^5}$ etc.
2½	
3	$\frac{a^3}{C.\, a-b} = 1 + \frac{3b}{a} + \frac{6bb}{aa} + \frac{10b^3}{a^3} + \frac{15b^4}{a^4} + \frac{21b^5}{a^5}$ etc.
3½	
4	$\frac{a^4}{B.\, a-b} = 1 + \frac{4b}{a} + \frac{10bb}{aa} + \frac{20b^3}{a^3} + \frac{35b^4}{a^4} + \frac{56b^5}{a^5}$ etc.

hinc ad inveniendas potestates intermedias, seu radices (quarum exponentes sunt intermedii inter exponentes integros) numeri terminorum figurati sunt interpolandi, juxta doctrinam Wallisii prop. 172 seqq. Arithm. Infinitor. unde habetur

$$\sqrt{n} \text{ seu } \sqrt{\frac{a}{a-b}} = 1 + \frac{b}{2a} + \frac{1.3bb}{2.4aa} + \frac{1.3.5b^3}{2.4.6a^3} + \frac{1.3.5.7b^4}{2.4.6.8a^4} \text{ etc.}$$

et $\sqrt{C.n}$ seu $\sqrt{C.\frac{a}{a-b}} = 1 + \frac{b}{3a} + \frac{1.4bb}{3.6aa} + \frac{1.4.7b^3}{3.6.9a^3} + \frac{1.4.7.10b^4}{3.6.9.12a^4}$ etc. et $\sqrt{n^3}$ seu $n\sqrt{3}$ (cujus postestatis exponens est $1\frac{1}{2}$) $= 1 + \frac{3b}{2a} + \frac{3.5bb}{2.4aa} + \frac{3.5.7b^3}{2.4.6a^3} + \frac{3.5.7.9b^4}{2.4.6.8a^4}$ etc. et sic consequenter.

II. Invenire rationem y ad x applicatae ad abscissam in curvatura laminae, cujus aequatio differentialis est $dy = \frac{xxdx}{\sqrt{a^4-x^4}}$.

Convertantur potestates quantitatis $\frac{x^4}{a^4-x^4}$ in series (ut factum proposit. praeced.) hoc pacto:

Expon. potest.	Potest.
0	$1 = 1 + 0 + 0 + 0 + 0$
½	$\frac{xx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{xx}{aa} + \frac{1x^6}{2a^6} + \frac{1.3x^{10}}{2.4a^{10}} + \frac{1.3.5x^{14}}{2.4.6a^{14}} + \frac{1.3.5.7x^{18}}{2.4.6.8a^{18}}$ etc.
1	$\frac{x^4}{a^4-x^4} = \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^8}{a^8} + \frac{x^{12}}{a^{12}} + \frac{x^{16}}{a^{16}} + \frac{x^{20}}{a^{20}}$ etc.
1½	
2	$\frac{x^8}{\square a^4-x^4} = \frac{x^8}{a^8} + \frac{2x^{12}}{a^{12}} + \frac{3x^{16}}{a^{16}} + \frac{4x^{20}}{a^{20}} + \frac{5x^{24}}{a^{24}}$ etc.
3	$\frac{x^{12}}{C.a^4-x^4} = \frac{x^{12}}{a^{12}} + \frac{3x^{16}}{a^{16}} + \frac{6x^{20}}{a^{20}} + \frac{10x^{24}}{a^{24}} + \frac{15x^{28}}{a^{28}}$ etc.

hae series interpolentur inter 0 et 1^{am} potestatem, ut habeatur potestas dimidia

$$\frac{xx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{xx}{aa} + \frac{1x^6}{2a^6} + \frac{1.3x^{10}}{2.4a^{10}} + \frac{1.3.5x^{14}}{2.4.6a^{14}} + \frac{1.3.5.7x^{18}}{2.4.6.8a^{18}} \text{ etc.}$$

quare $dy = \frac{xx\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{xx\,dx}{aa} + \frac{1.x^6\,dx}{2a^6} + \frac{1.3x^{10}\,dx}{2.4a^{10}}$ etc. eorumque integralia $y = \frac{x^3}{3.aa} + \frac{1.x^7}{7\,\text{in}\,2a^6} + \frac{1.3x^{11}}{11\,\text{in}\,2.4a^{10}} + \frac{1.3.5x^{15}}{15\,\text{in}\,2.4.6a^{14}}$ etc.; hinc si $x = a$ et utraque $= 1$, erit $y = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\,\text{in}\,7} + \frac{1.3}{2.4\,\text{in}\,11} + \frac{1.3.5}{2.4.6\,\text{in}\,15} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8\,\text{in}\,19}$ etc.; sic spatium, cujus rectificatione construitur curva elastica, est $ay = \frac{x^3}{3\,\text{in}\,a} + \frac{1x^7}{7\,\text{in}\,2a^5} + \frac{1.3x^{11}}{11\,\text{in}\,2.4a^9} + \frac{1.3.5x^{15}}{15\,\text{in}\,2.4.6a^{13}}$ etc.

Haud absimiliter invenitur ratio s ad x, ipsius curvae ad abscissam, per seriem:

$$ds = \frac{aadx}{\sqrt{a^4-a^4}} = dx + \frac{x^4dx}{2a^4} + \frac{1.3x^8dx}{2.4a^8} + \frac{1.3.5x^{12}dx}{2.4.6a^{12}} + \frac{1.3.5.7x^{16}dx}{2.4.6.8x^{16}} \text{ etc.}$$

adeoque $s = x + \frac{x^5}{2\,\text{in}\,5a^4} + \frac{1.3x^9}{2.4\,\text{in}\,9a^8} + \frac{1.3.5x^{13}}{2.4.6\,\text{in}\,13^{12}}$ etc. et posito $x = a = 1$ reperitur $s = 1 + \frac{1}{2\,\text{in}\,5} + \frac{1.3}{2.4\,\text{in}\,9} + \frac{1.3.5}{2.4.6\,\text{in}\,13} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8\,\text{in}\,17}$ etc.

III. Theorema Cat-Optricum. Diametro (fig. 6) $BM = \frac{1}{2} BF$ (quae radius est circuli curvam BCG in B osculantis) describatur circulus ABCM, et radiet punctum A in puncta curvae cujusvis BCG in distantia B, C, per radios AB, AC; dico, si punctum A fuerit in peripheria circuli BCM, radios reflexos BI, CH fore parallelos: si extra circulum, convergentes: si intra, divergentes. Et reciproce, si radii incidentes contigui IB, HC sint paralleli, coibunt ipsorum reflexi BA, CA in puncto aliquo circuli BCM etc.

Demonstrat. Productae sint particulae curvae in tangentes DBCL, ECG, eritque $LBI = DBA = BAC + BCA = BMC$ $(2BFC) + BCA = 2\,ECD + BCA = ECD + ECA = LCG + GCH$ $= LCH$. Ergo BI parallela CH. Quod si autem sit intra circulum, erit $DBa \sqsubset DBA = LBI$, quare divaricabitur a CH. Sin α sit extra circulum, erit $DB\alpha \sqsupset DBA = LBI$, quare coibit cum CH. Q. E. D.

Coroll. Hinc possunt inveniri puncta Causticae: Nam quia $BF = 2\,BM$, et ang. BAM rectus, hinc ex F centro circuli osculatoris tantum perpendicularis FI vel FP demittenda in radium incidentem BI, vel reflexum BP, determinabitque dimidia BI vel BP punctum A in Caustica: puta si radii incidentes BI, CH fuerint paralleli.

Quod si punctum A (fig. 7) radiet ex finita distantia, et radiorum reflexi convergant, erit $BAC + BHC = 2BFC$. Demonstr. $BAC + BHC = DBA\ (LBH) - DCA + BHC = LBH - ECA$ $+ ECD + BHC = LBH - GCH + LCG + BHC = LCH - BHC$ $- GCH + LCG + BHC = LCH - GCH + LCG = LCG + LCG$ $= 2LCG = 2BFC$. Q. e. d. Hinc inveniri potest relatio puncti H ad punctum F ita: Quia $BAC = BMC$, et $BHC = BPC$, erit $BMC + BPC = 2BFC$; sed $BMC . BPC :: CP . CM$ (in infinite parvis) hoc est, $BMC = \frac{CP \times BPC}{CM}$ et $BFC . BPC :: CP . CF$, hoc est, $BFC = \frac{CP \times BPC}{CF}$, quare $BMC + BPC \left(= \frac{CP \times BPC}{CM} + \frac{CM \times BPC}{CM} \right) = \frac{2CP \times BPC}{CF}$, hoc est $\frac{CP + CM}{CM} = \frac{2CP}{CF}$, hoc est $CP = \frac{CM \times CF}{2CM - CF}$ et quia $CP . CH :: CM . CA$, erit $CH = \frac{CA \times CF}{2CM - CF}$. Constr. Ex puncto radiante A ducatur ad CF

ipsa AM normalis radio luminis AC, et fiat $CH = \frac{CA \times CF}{2CM - CF}$ eritque H in caustica.

IV. Quadratura Curvae $y^4 - 6aayy + 4xxyy + a^4 = 0$, quae eadem est cum illa quam Cel. Dn. Leibnitius D. D. T. proposuit 1687 p. 525 (Act. Erudit.).

Analys. $y^4 = 6aayy - 4xxyy - a^4$,

$$yy = 3aa - 2xx - \sqrt{8a^4 - 12aaxx + 4x^4}$$

$$y = \sqrt{3aa - 2xx - \sqrt{8a^4 - 12aaxx + 4x^4}} = \sqrt{2aa - xx} - \sqrt{aa - xx},$$ unde $ydx = dx\sqrt{2aa - xx} - dx\sqrt{aa - xx}$.

Construc. Curvae. Super latere et Diagonio quadrati AQ (fig. 8) ceu radiis describantur duo quadrantes AKPH et ALQI, et ducantur MN, OP parallelae ipsi QH iisque fiant aequales DS, GT eruntque puncta S, T ad curvam quaesitam RSTV.

Demonstr. $AH = a$, $AG = x$, $GT = y$, erit $AJ = \sqrt{2aa}$, $PG = \sqrt{aa - xx}$, $OG = \sqrt{2aa - xx}$, proinde $y = GT = OP = OG - PG = \sqrt{2aa - xx} - \sqrt{aa - xx}$. Unde ARVH = spatio LOQHPK, sed hoc quadrabile, aequale nempe Δ QKH, quandoquidem si ab utroque subtrahatur trilineum commune KQHPK, relinquitur semisegmentum LOQKL et segmentum KPHK, quae aequalia sunt, cum illius duplum huic simile sit, ejusque duplum ob circulum circuli duplum. Sed praeter hoc spatium integrum LOQHPK seu AHVTR infinita alia duabus applicatis intermediis intercepta (qualia MOPN seu DGTS) quadrari possunt, dummodo arcus MO similis sit semissi arcus NP, tum enim ob circulum circuli duplum, segmentum quoque segmenti duplum erit, ac proinde semisegmentum MOW = integro segmento NP, additoque communi quadrilineo XOPN, erit MOW + XOPN (= MOX + ΔMXW + XOPN) = ΔMXW + MOPN = trapezio XOPN, ergo MOPN (= DGTS) = Trapezio XOPN — Δ MXW.

Porro ductae sint AM, AN, AO, AP; et NB ipsi AM, PE ipsi AO parallelae, et ang. BNC fiat ipsi ANB seu NAM, ut et EPF ipsi APE seu PAO aequalis: quo facto, si ang. CND et FPG sint aequales, erit duplum arcus MO simile arcui NP.

Demonstr. NAM + AMN = AND = ANC + CND = **2ANB (2NAM) + CND, ergo AMN = NAM + CND, et AMN — NAM = CND.**

Eodem ratiocinio colligitur ang. FPG (CND) = AOP — PAO, unde AMN — NAM = AOP — PAO = AYD — PAO = AMN + OAM — PAO, quare OAM = PAO — NAM, et OAM + NAM (= OAN + 2NAM) = PAO, adeoque 2OAN + 2NAM (= 2OAM) = PAO + OAN = PAN. Q. E. D.

Jam sit anguli CND vel FPG sinus s, sinus compl. t sumto AH = a pro radio:

$$OG \,.\, AG :: PG \,.\, EG$$

$$\sqrt{2aa-xx} \,.\, x :: \sqrt{aa-xx} \,.\, x\sqrt{\frac{aa-xx}{2aa-xx}}$$

$$EF = EG - GF = x\sqrt{\frac{aa-xx}{2aa-xx}} - \frac{s}{t}\sqrt{aa-xx}$$

$$1 \,.\, s :: (PG \,.\, GF) :: \sqrt{aa-xx} \,.\, \frac{s}{t}\sqrt{aa-xx}$$

$$1 \,.\, a :: (PG \,.\, PF) :: \sqrt{aa-xx} \,.\, \frac{a}{t}\sqrt{aa-xx}$$

$$AE = AG - EG = x - x\sqrt{\frac{2aa-xx}{aa-xx}}$$

$$AE \,.\, EF :: AP \,.\, PF$$

$$x - x\sqrt{\frac{aa-xx}{2aa-xx}} \,.\, x\sqrt{\frac{aa-xx}{2aa-xx}} - \frac{s}{t}\sqrt{aa-xx} :: a \,.\, \frac{a}{t}\sqrt{aa-xx},$$

unde habetur $\overline{s+x}\sqrt{2aa-xx} - x\sqrt{aa-xx} = tx$, quadratisque membris, positoque aa pro $ss+tt$, et facta divisione per $s+x$, oritur $aas + aax - x^3 = x\sqrt{2a^4 - 3aaxx + x^4}$, unde porro $x^4 - 2sx^3 - aaxx + 2aasx + aass = 0$: Quare si fiat curva $AZ\alpha H$ hujus naturae, ut si $AG = x$, et $G\alpha = s$, sit $x^4 - 2sx^3 - aaxx + 2aasx + aass = 0$, ac deinde ducatur quaevis $Z\alpha$ parallela ipsi AH, sic ut $DZ = G\alpha = s$, erit spatium DGTS quadrabile, nempe = trapezio XOPN — Δ MXW. Nota, sumpta $A\beta = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, erit $\beta\gamma = \frac{1}{3}a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}A\beta$, maxima applicatarum.

V. Solutio Problematis de Minimo Crepusculo.

Sit (fig. 9) BLZ horizon, MER ejus parallelus 18 gradibus infra illum depressus, PDM aequator; ZE, QR ejus paralleli versus polum Australem W; WQ, WZ, et WR, WE circuli declinationum; ZP vel EV arcus declinationis paralleli ZE: Jam si sol describens parallelum ZE efficiat crepusculum minimum, erit mora solis in ZE brevissima, hoc est, brevior mora in DM vel CA, adeoque differentia morae solis in parallelis contiguis ZE, QR nulla, cumque et morae in ZS et TR differentia nulla sit, eodem quoque tempusculo SE et QT pertransibuntur, ac propterea ipsi arculi SE, QT erunt ut celeritates, quibus percurruntur, hoc est, ut radii paralle-

lorum ZE, QR, hoc est, propter infinite parvam distantiam parallelorum, dicti arculi erunt aequales, et quia SR, ZT quoque sunt aequales, et anguli ESR, ZTQ recti, erunt et ang. SER, TQZ = GQC = HZC aequales, et proinde (ob VES, PZH rectos) ipsi GEV, DZP quoque aequales (posito EGB esse quadrantem circuli maximi, tangentem parallelum Horizontis MEA in E) quare cum et GVE, DPZ sint recti, et arcus VE, PZ aequales, erunt et arcus EG, DZ et anguli EGV, ZDP seu BDG aequales; unde cum in Δ BDG, sin. ang. BDG sit ad sin. ang. BGD = sin. ang. VGE = sin. ang. BDG, ut sinus arcus BG ad sin. arcus BD, erunt hi duo arcus aequales semicirculo, et ducto arcu EL ad utrumque normali, unius defectus infra quadrantem GE, aequalis alterius excessui supra quadrantem LD; quocirca cum et anguli Δ LFD singuli sint aequales singulis Δ FEG, erit et LF = FE = $\frac{1}{2}$ LE = 9 gr. et quia, ut ostensum, LD = GE = DZ, hinc in trinangulis DPZ, DLF sic operaberis:

sin. tot.	= r	sin. tot. .	Tang. compl. ang. LDF	::	Tang. LF	.	sin. LD (DZ)
Tang. LF 9°	= a	r .	d	::	a	.	$\frac{ad}{r}$
sin. ang. LDF	= b	sin. tot. .	sin. DZ	::	sin. PDZ (LDF)	.	sin. PZ
sin. compl.	= c	r .	$\frac{ad}{r}$	::	b	.	$\frac{abd}{rr}$
Tang. compl.	= d						= (quia d . r :: c . b) $\frac{ac}{r}$;

quare ut sin. tot. ad tang. 9 grad. sic sin. compl. ang. horiz. et aequatoris (hoc est, siuus elevationis Poli) ad sinum declinationis solis australis quaesitae, tempore minimi crepusculi. Per Logarithmos ita: a Log. sin. elev. Poli subtrahatur 0.8002875, residuum erit Logarith. sin. declinationis quaesitae.

VI. Invenire Relationem inter Evolutas et Diacausticas.

A punctum radians (fig. 10), BCG curva quaecunque, BC ejus portio infinite parva, BF, CF curvae perpendiculares, F punctum evolutae, AB, AC radii incidentes protracti in R et S; BH, CH ipsorum refracti coëuntes in puncto diacausticae H. Dico, ang. BAC + BHC = HBR — HCS.

Nam BAC + BHC = DBA (LBR) — DCA + BHC = LBR — ECA — ECD + BHC = LBR — GCS — LCG + BHC = LBH + HBR — GCH — HCG — LCS + BHC = LCH — BHC + HBR — GCH — HCS — LCG + BHC = LCH + HBR — GCH — HCS — LCG = HBR + LCG — HCS — LCG = HBR — HCS. Q. E. D.

Brevius: Ductae intelligantur Bs, Bh parallelae ipsis CS, CH, eritque $BAC + BHC = RBs + hBH = HBR - hBs = HBR - HCS$. Q. E. D.

Reducto ad puram Geometriam Problemate, in Analysi pergere non erit difficile, quam brevitatis gratia omitto.

VII. **Regula pro Constructionibus Mechanicarum per Rectificationem Linearum Algebraicarum.**

Ponatur indeterminata x, et coordinatarum lineae Algebraicae, una $\sqrt{bx^m + cx^r}$, altera $\sqrt{\pm bx^m \mp cx^r}$, existente $r \sqsubset m$, seqnitur Analysis Elementi curvae Algebraicae:

Elem. Coordin. $\dfrac{bm.x^{m-1} + cr.x^{r-1}dx}{2\sqrt{bx^m + cx^r}}$, $\dfrac{+bm.x^{m-1} \mp cr.x^{r-1}dx}{2\sqrt{\pm bx^m \mp cx^r}}$

Quadrata Elem. Coordin.

$$\frac{bbmm.x^{2m-2} + 2bcmr.x^{m+r-2} + ccrr.x^{2r-2}dx^q}{4b.x^m + 4c.x^r}$$

$$\frac{bbmm.x^{2m-2} - 2bcmr.x^{m+r-2} + ccrr.x^{2r-2}dx^q}{\pm 4b.x^m \mp 4c.x^r}$$

reducta ad idem nomen et addita facimt

pro 1. form. $+b^3mm.x^{3m-2} + bccrr.x^{m+2r-2} - 2bccmr.x^{m+2r-2}$

pro 2. form. $\dfrac{+c^3rr.x^{3r-2} + bbcmm.x^{r+2m-2} - 2bbcmr.x^{r+2m-2}}{\pm 2bbx^{2m} \mp 2ccx^{2r}}dx^q$

factaque divisione per x^{2m}, et extracta radice, habetur elementum Curvae

$$= \frac{\begin{array}{l} dx\sqrt{+b^3mm.x^{m-2} + bccrr - 2bccmr.x^{2r-m-2}} \\ dx\sqrt{+c^3rr.x^{3r-2m-2} + bbcmm - 2bbcmr.x^{r-2}} \end{array}}{\sqrt{\pm 2bb \mp 2cc.x^{2r-2m}}} = \left(\text{posita } \begin{array}{l} r = 2m \\ m = 2r \end{array}\right)$$

$$\frac{\begin{array}{l} +bm.x^{1/2m-1}dx\sqrt{b} \\ +cr.x^{-1/2r-1}dx\sqrt{c} \end{array}}{\sqrt{2}\sqrt{\pm bb \mp cc.x^{2m}}}$$

factaque divisione per $\begin{array}{l} +bm\sqrt{b} \\ +cr\sqrt{c} \end{array}$ erit $\dfrac{\begin{array}{l} +x^{1/2m-1} \\ +x^{-1/2r-1} \end{array}}{\sqrt{2}\,\sqrt{\pm bb \mp cc.x^{2m}}}dx$ elementum Curvae alicujus, cujus ordinatae sunt

in primo casu, una $\dfrac{x^{1/2m}.\sqrt{2}.\sqrt{1+x^m}}{m}$, altera $\dfrac{x^{1/2m}.\sqrt{2}.\sqrt{1-x^m}}{m}$,

in secundo casu, una $\dfrac{x^r.\sqrt{2}.\sqrt{1+x^{-r}}}{r}$, altera $\dfrac{x^r.\sqrt{2}.\sqrt{-1+x^{-r}}}{r}$

quae si nominentur y et z, habebitur

pro 1. casu $yy+zz=\frac{4x^m}{mm}$ et $yy-zz=\frac{4x^{2m}}{mm}$, adeoque $yy+zz$

$$=\frac{2\sqrt{yy-zz}}{m}$$

pro 2. casu $yy+zz=\frac{4x^r}{rr}$ et $yy-zz=\frac{4x^{2r}}{mm}$, adeoque $yy+zz$

$$=\frac{2\sqrt{yy-zz}}{r}.$$

Hinc Regula: Si Fractio differentialis talis sit, vel ad talem reduci possit, ut numerator sit rationalis, denominator radix quadrata differentiae quantitatis cognitae et potestatis indeterminatae x, cujus index quadruplus sit indicis ejusdem, unitate aucti in numeratore, erit ejus integrale, portio Curvae Algebraicae.

Exempl.

1. $\frac{aadx}{\sqrt{a^4-x^4}}$, quia $4=\overline{0+1},4 = 2m$, erit $m=2$, et $yy+zz$
$= a\sqrt{yy-zz} = xx$.

2. $\frac{aadx}{\sqrt{x^4-a^4}}$, quia $4=\overline{0+1},4=-2r$, erit $r=-2$, et $yy+zz$
$= a\sqrt{yy-zz} = \frac{a^4}{xx}$.

3. $\frac{adx\sqrt{a}}{\sqrt{aax-x^3}}$, quia $\frac{adx\sqrt{a}}{\sqrt{aax-x^3}} = \frac{dx\sqrt{\frac{a^3}{x}}}{\sqrt{aa-xx}}$, ubi $2=\overline{-\tfrac{1}{2}+1},4$
$=2m$, adeoque $m=1$, erit $yy+zz=2a\sqrt{yy-zz}=4ax$.

VIII. Constructio Elasticae, cujus aequatio $dy=\frac{xxdx}{\sqrt{a^4-x^4}}$.

Quia $\int\frac{aadx}{\sqrt{a^4-x^4}}$ est portio curvae Lemniscatae, ut ostensum, videatur num $\frac{aadx+xxdx}{\sqrt{a^4-x^4}}$ integrari possit hoc modo:
$\frac{\overline{aa+xx}\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \sqrt{\frac{aa+xx}{aa-xx}}\,dx = \sqrt{\frac{aa-xx+2xx}{aa-xx}}\,dx$, cujus quadratum resolvitur in partes $\frac{aa-xx}{aa-xx}dx^2 = dx^2$, et $\frac{2xxdx}{aa-xx}$,

quarum radices dx et $\frac{-x\,dx\sqrt{2}}{\sqrt{aa-xx}}$, et harum integralia x et $\sqrt{2aa-2xx}$ coordinatae Ellipsis, cujus $2a$ axis minor et major $2a\sqrt{2}$. Ergo cum $\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \int\frac{aadx+xxdx}{\sqrt{a^4-x^4}} - \int\frac{aadx}{\sqrt{a^4-x^4}}$, erit applicata Elasticae aequalis excessui, quo portio Ellipticae superat portionem Lemniscatae.

VI.

Leibniz an Jac. Bernoulli.

Gaudeo Te optima nunc valetudine frui, quod bonum ut sit diuturnum precor. Mea quoque sese paulo melius habet, non tamen satis firmata videtur. Gratissimum erit beneficio Tuo videre quae Dn. Hollanderus dedit. Interim credo consensum inter obliquitatem Eclipticae et Circuli mensuram fuisse repertum non ex causis, sed ex collatione numerorum. Cum Dn. Ottius valeat ingenio et matheseos scientia, vellem daret nobis meditata sua et observata etiam dioptrica, idque optarem ipsi data occasione etiam meo nomine cum salutatione insinuari, cum olim aliqua fuerit inter nos notitia, et semper ipsum feci plurimi. Verissimum est superficiem sphaericam posse puncti radios omnes colligere in punctum. Nam ovalis quaedam Cartesii dioptrica certo casu in circulum abit, quod etiam Hugenius apud Schotenium notavit. Domino Cluverio meo judicio optime respondisti. Mirum est virum caetera egregium haerere in istis proportionibus non nisi per infinite parva variatis, quae nulla constructione aliter quam hactenus exhiberi possunt.

Excerpta ex Adversariis Tuis mihi imprimis grata erunt, quibus utar prout jubebis. Ipse enim optime noris, quorum analysin prostare publice velis, certe pleraque Tua videntur hoc mereri.

Mea methodus tentandi summas videtur adhuc habere aliquid in recessu, nam ut taceam posse esse alias series praeter harmonicam, in quibus praestet majora compendia, videtur ne hic quidem prorsus esse contemnenda, nam etsi $\frac{99}{100}$ sit fractio cujus po-

tentiae tarde decrescunt, possumus tamen alios numeros commi-nisci, ubi statim ab initio non ascenditur ultra $\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ prout commodum videtur, ut adeo non sit opus ad altiores potentias ascendere; quod si paucis potentiis multi termini comprehenduntur, utique utilitas inest. Ut si adhibeamus $\frac{1}{100-50}$ et $\frac{1}{100+50}$; $\frac{1}{100-49}$ et $\frac{1}{100+49}$ etc. summabuntur termini ab $\frac{1}{50}$ ad $\frac{1}{150}$; inde adhibito $\frac{1}{300\pm150}$ summabuntur termini a $\frac{1}{150}$ ad $\frac{1}{450}$, vel si placet $\frac{1}{50\pm25}$ dat terminos a $\frac{1}{25}$ ad $\frac{1}{75}$; et $\frac{1}{100\pm25}$ dat terminos a $\frac{1}{75}$ ad $\frac{1}{125}$; et $\frac{1}{150\pm25}$ dat terminos a $\frac{1}{125}$ ad $\frac{1}{175}$; et $\frac{1}{200\pm25}$ dat terminos a $\frac{1}{175}$ ad $\frac{1}{225}$.

Machina mea Arithmetica, de qua occasione mentionis a Dn. Tschirnhausio factae quaeris, iis sane qui viderunt mirabile quiddam praestare visa est. Primum tentamentum in tribus tantum notis Societatibus Anglicae et Gallicae ostendi, ante annos plus quam viginti, et Dominus Matthion mentionem ejus fecit in edita tunc quadam tabula Hexapodaria (du Toisage); sed aliis distractus et inventione contentus pene oblivioni tradideram. Tandem pulsatus Hugenii, Arnaldi et aliorum qui viderant hortationibus et pene conviciis, horologiarium non sine sumtibus in id unum accessivi. Ita prima Machina magna absoluta est, quam adhuc sub incude positam Dominus de Tschirnhaus ante biennium hac transiens vidit, experimentaque sumta sunt coram ipso, in ea parte, quae erat perfecta. Maximus multiplicator pro praesentis Machinae magnitudine potest esse octo notarum, maximus productus notarum duodecim; imo sedecim si velis, nam pro quatuor adhuc adjiciendis locus vacuus est relictus. Omnia fieri possunt a puello omnis calculi experte, sine ullis additionibus auxiliaribus, et sola rotae circumactione perfecte prodit productus. Parvusque an magnus sit multiplicator nihil interest ad tempus et facilitatem. Idem de divisione, ubi nec opus teutare circa quotientes. Secundum exemplar (vel exemplum potius) mox absolvetur, et spero dicere posse cum Ovidio: jamque opus exegi.

In Dynamicis ignosce si dicam, mentem Te meam longe aliter accepisse quam fuerat scribenti, tametsi putes te nunc primum eam recte assecutum. Exemplum Elastrorum per spatium dispositorum tantum proposui, ut sententiam explicarem de aestimatione virium, non vero quod putarem Elastris hujusmodi renitentibus oriri amissionem virium gravis ascendentis. Verba tua fere hinc redeunt: me velle quantitatem virium aestimandam esse ex quantitate effectus, exempli causa, ex numero elastrorum quorum tensione absumuntur vires, addisque Te non repugnare; subjicis deinde: me supponere corpus (grave) dupla cum celeritate sursum nitens quadruplam emetiri altitudinem priusquam tota absumatur; et hoc quoque esse verissimum, sed cum existimem propterea quadruplum intendi elastrorum numerum (a gravi assurgente) hoc vero Te mihi concedere non posse. Ego vero hoc neque dixi, quod sciam, neque sentio; et proinde quae contra disseris, mihi non adversantur. Sane in materia gravifica (quemadmodum appellare soleo fluidum illud insensibile quod motu suo est causa gravitatis) non Elastrum considero ad usum praesentem, sed simplicem impulsum et velut flatum qualis est venti, celeritate sane incomparabiliter majore, quam quae est gravis; quae res facit et facere debet, ut quovis momento aequalis gradus velocitatis gravi imprimatur vel adimatur, adeoque celeritates crescere vel decrescere ut tempora; sed tantum abest hinc sequi etiam vires crescere vel decrescere proportione temporum, ut potius vel huic oppositum concludatur; et in hoc ipsum produxi Elastra per spatium horizontale disposita, quippe in quibus manifestus est processus et causa detrimenti virium aequabilis, ut nimirum velut ad oculum appareret discrimen inter decrementum aequabile virium, et decrementum aequabile celeritatis. Nam cum corpus in plano horizontis Elastra aequalia successive aequaliter intendit, utique ut concedis et per se manifestum est, ad quemvis occursum amittit aequalem gradum potentiae. Sed non amittit aequalem gradum velocitatis, ut demonstratu non difficile est, et ipse attendens mox animadvertes: aliud ergo est in corpore eodem decrementum virium, aliud vero et minime priori proportionale decrementum celeritatis, quod demonstrandum mihi proposueram. Atque hoc a Te desideraveram examinari, et nunc quoque desidero, postquam

nescio quomodo per conjecturam mihi tribuens quae non statuo, aliorsum ivisti quod Galli vocant „prendre le change", quemadmodum et priore Epistola mihi tribueras tanquam πρῶτον ψεῦδος, quod spatii longitudini aliquid darem cujus tamen efficacia nulla est. Ego vero vel adeo, ut videres me respicere id quod fit ... spatio, exemplum elastrorum attuleram. Et si ita errarem ut credideras, nimis crasse errarem.

Gratias ago quod Dni. Marchionis Hospitalii consilium edendi tractatum de Calculo differentiali significas. Ipse pro sua humanitate de eo ad me scripsit quaesivitque an ego potius aliquid edere de eo malim prior, neque enim sese praevenire velle invitum. Respondi mea quae animo designaverim, nondum parata satis esse et me hortari potius ut pergat de republica bene mereri. Interea tamen operam dabo, ut et meam Infiniti Scientiam nonnihil elaborem posthinc, cum habeam quasdam meditationes philosophicas quae mihi videntur certitudine et usu mathematicis non inferiores; cogitabo et de illis ordinandis, ne intercident; quemadmodum et Elementa quaedam perpetui juris olim a me concepta, ut de aliis taceam. Sed Historica et Politica me nimis morantur, dum aulis satisfaciendum est. Conabor tamen paulatim eximere me ab his laboribus minus fortasse profuturis, ut rem potius generis humani, quam certae regionis geramus, quorsum a Te sane jam praeclara praestita sunt, et fieri porro possunt.

VII.

Leibniz an Jac. Bernoulli.

Juin 1696.

Meas acceperis quibus Tuis alteris utcunque respondi. Quae Dn. Hollanderus in publicum dedit, et literae Tuae ex nundinis Francofurtensibus mihi mittenda significabant, Analysesque etiam Tuas nondum accepi. Interea redditae sunt mihi literae a Domino Cluverio, cum adjunctis Tibi inscriptis quas hic vides, eaque res impulit ut scriberem denuo, ne Tua apud me moram traherent.

Dominus Nieuwentiit Replicationem minatur, quae velim magis nova afferat. Domini Cluverii meditationes profundiora pariter et

solidiora promittunt. Interim non video cur vir egregius iis uti vel abuti velit ad bene constituta evertenda. Respondebo, me interrogare utrum quadraturae parabolae constructionem accuratiorem Archimedea dare possit; imo an non fateri cogatur ne possibilem quidem esse accuratiorem.

Je n'entends pas bien ce qu'il dit dans vostre lettre des series appropriees aux Planetes.

J'avois monstré dans ma response à Mons. Nieuwentiit, qu'il estoit tombé dans une Equation identique ou chimerique. Mons. Cluver . . . .

VIII.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Diu nimis ad Tuas patior desiderari responsum ob varia, quae moram mihi injicere. Profectus fui nupera aestate ad acidulas, sed minus prospero eventu; mox enim aeger inde reversus magno decubui temporis intervallo, priusquam iterum utcunque convalui. Responderam tamen antea ad has, quibus de Libro Hollanderi perquisivisti, quanquam responsum socordia hominis, cui miseram, Herbornae tum degentis interiisse suspicer, tum quod ipsum et alia male curasse novi, tum quod Tu nullam ejus mentionem fecisti. Bene interim est, quod non pariter liber ipse perierit, de quo quid sentias, aveo scire. — Non dubito etiam, Te accepisse Librum D. Marchionis, quem Tibi per me postremis nundinis submisit; miror autem, nondum ad Acta relatum; nam Dnum. Menkenium suum exemplum recepisse confido. Conscripsi nuper data occasione tertiam Disputationem de seriebus infinitis, quam proximis nundinis Tibi transmittam, ubi serierum inventum ad Quadraturas et Rectificationes applicare coepi, continuaturus cum tempore materiam, si Deus vitam concesserit. Istis intento tertiae tuae supervenere literae, quibus significasti Te problema fraternum*) solvisse, eoque salivam movisti, ut et ego tentarem.

---

*) Es ist dies das berühmte Problem der Brachystochrone, von Joh. Bernoulli 1696 vorgelegt. An die Auflösung desselben knüpfte

Quanquam autem cito superavi, ansam tamen inde captare volui, speculationem extendendi ad alia difficiliora in Actis proponenda, quibus ita pertinaciter inhaerebam, ut omnis commercii literarii hucusque fuerim oblitus. Nunc solutio Problematis has ipsas Lipsiam comitatur, non tamen prius edenda, quam Vos vestras etiam solutiones ad Acta communicaveritis. Rogo itaque, Amplissime Vir, ut Tuam quoque Cycloidem mature ad praelum pares. Quod si placeat insuper curare, ut quae vicissim in Actis propositurus sum, in Gallia quoque et Italia innotescant, beneficio me obstringes.

Methodo approximandi summis Progressionis Harmonicae aliquam, fateor, medelam attulisti; sed tamen perfectius aliquid optassem; et omnino existimavi, cum primum de his in Actis 1682 legissem, Te compendium innuere, quo summa praecise haberi possit. Et quidem ad praxin geometriae transcendentis nihil foret conducibilius. Approximationes saltem expeditae plane videntur necessariae in his seriebus, quae tarde decrescunt, quales sunt harmonicae, et illae quas dedi pro Elastica; quanquam in aliis, quae per se satis appropinquant, insuper haberi possunt, cujusmodi illa tua est, quae longitudinem sinus recti respectu dati arcus exprimit, quippe quae quinque primis terminis, subinde et quatuor tribusve tantundem appropinquat, quantum ordinariae sinuum tabulae solent: unde laborem vel condendi vel examinandi has tabulas mirifice contrahere posse autumo, praesertim si Machina insuper Tua Arithmetica adjungeretur, de cujus structura plenius edoceri cuperem, ut si mediocri pretio liceret, similem mihi comparare possem. Vidi annis abhinc tredecim Scaphusii apud Spleissium praesente Ottio rudimentum talis Machinae, quam ille, si bene memini, pro sua venditabat; sed quia tum scientiam vix a limine salutaram, non attentius inspexi. In paucis notis ut res succedere possit, satis quidem capio, sed cum plures sunt propositae, non video, quomodo immensa combinationum varietas sub una rota cogi queat. Quae praefatum Ottium concernunt, ex literis tuis exscripsi, eique per conterraneum insinuavi, sed nihil responsi tuli. Homo est qui sibi soli vivit, non publico natus. Pulsavi

---

Jac. Bernoulli die schwierigen Aufgaben über die isoperimetrischen Curven, die besonders die Veranlassung zu dem berüchtigten Streite zwischen beiden Brüdern wurden.

ipsum super variis, sed frustra. Quod ovalis quaedam Cartesii certo casu in circulum abeat, novi et demonstravi in notis ad ipsum p. 442, sed ignotum mihi est, annon radii, duorum circulorum ope semper ex puncto dato in aliud datum punctum possint colligi, adeoque num datis focis A et B (fig. 11) et crassitie situque lentis inter illos, determinari queant circuli CDC, CEC, qui lentem terminent, radiosque ex A egressos versus B ire cogant; hoc enim est, quod velle Ottium existimo, et cujus quidem ego impossibilitatem nondum cerno. Succurrit hic proprietas quaedam vitri plano-plani, de qua non memini apud Scriptores Opticorum quicquam me legisse. Observavi nempe, quod si tale vitrum ad axem visionis valde obliquum statuatur, dextrum per illud incipiat apparere sinistrum, et vicissim, supero tamen et infero situm suum naturalem retinentibus, cujus phenomeni rationem ex Opticis principiis frustra explicare olim conatus fui. Est vero etiam in Astronomicis, quod me turbat, dissensus videlicet inter modernos Astronomos in eo, quod nonnulli, velut Newtonus, supponant, Planetam in orbita sua elliptica circa solem in uno focorum ejus constitutum areas, alii non minus celebres, quos inter Sethus Wardus, ejusdem nationis Vir, circa focum alterum angulos temporibus proportionales describere, quae duae hypotheses secum invicem minime consistere possunt. Si quid habes quod huc faciat, quaeso mihi impertire.

Vidisti nuper in Actis constructionem meam aequationis $dy = y dx + x^n dx$, aut potius hac universalioris, quam et Tu reperisse scribis: vellem porro ex Te scire, num et hanc tentaveris $dy = yy dx + x^n dx$. Ego in mille formas transmutavi, sed operam meam improbum Problema perpetuo lusit. Felicius successit (qua de judicium Tuum exspecto) constructio generalis harum, quae literas indeterminatas separatas habent, ope Tractoriae et Logarithmicae, in eo a Tua diversa, quod Tua Tractoria est ipsa statim curva quaesita, sed difficulter delineabilis, mea vero punctis tantum quaesitae inveniendis inservit, at contra facilius describitur.

In Dynamicis doleo multum, et tantum non mihimet male cupio, quod tuam mentem nondum assequor. Velim Tibi persuadeas, neminem ad retractandum me paratiorem fore, si me in errore versari deprehenderem. Scribis, hunc a fratre meo juniore tuo monito tandem agnitum fuisse. At obsecro, Vir Excellentissime, num ille me est eloquentior, et ego ipso sum hebetior,

quod in materia osculorum Tu ipsum intellexeris, non me; ille vero nunc Te intelligat, non ego? Utinam vero particeps fierem omnium eorum, quae inter vos de his utrinque acta sunt; fortasse major inde mihi lux affulgere posset. Fallor tamen, nisi omnis tandem controversia in logomachiam desinit, quandoquidem in conclusionibus nobis per omnia conveniat, dum uterque statuimus, corpus dupla cum celeritate sursum tendens quadruplo altius eniti, quaestioque tantum est, num propterea vires sint dicendae quadruplae necne. Unum hic ex Te peto, ut explices, qui juxta Te loquendum esset, si corpora omni gravitate destituta forent (hanc enim concedis corpori non essentialem esse, ac proinde licite ab illa posse abstrahi, quanquam subinde aliter statuere videris, dum corporis essentiam in conatu quodam ponis). Cum enim corpora talia quacunque velocitate mota pergerent in infinitum, nunquamque redigerentur ad quietem, non possent quantitates virium horum corporum aliunde aestimari, quam ex spatiis eodem tempore percursis; unde non apparet, cur corpus dupla celeritate latum hoc casu quadruplam virium quantitatem possidere diceretur. Cum de conatu tuo loquor, illud adhuc dubii movere liceat, qui fiat scil. ut corpori statuas essentialem, cum corpus ad omnes plagas sese indifferenter habeat, conatus autem quaquaversum sese exerens implicet, nullusque possit concipi, nisi cum determinatione in certam partem. Agnosco lubens, in corpore praeter extensionem aliud aliquid superesse, ad quod tamen fere caecutimus: puto enim hic, ut ubique cum ad prima rerum principia deventum est, prodere sese infinitatis characterem, qui eo me impulit, ut jam ante plures annos systema quoddam excogitaverim, per quod mysteria haec naturae, tum et Fidei, Trinitatis, Incarnationis, Unionis animae cum corpore etc. utcunque explicarem. Cum vero haec in sacra nimis involent, nolimque litem mihi excitari cum Theologis, praestat de his penitus silere.

Vale et favere perge etc.

Dabam Basileae 27. Januarii 1697.

P. S. Desiderat Doctor quidam Lindaviensis Catalogum omnium eorum, quae unquam publicasti, illectus Tractatu quodam sub personato Fürstenerii nomine a Te edito, quem non satis admirari, nec depraedicare potest. Magno, Vir Amplissime, beneficio hominem Tibi devincies, si voti compotem reddere velis.

Dni. Nieuwentiit replicationem, quam scribis, non est; cur multum metuamus; spero enim, ejus sententiam de explodendis elementorum elementis vel ex fraterni Problematis solutionibus brevi publicandis solide et evidenter confutatum iri. Meditationes Dni. Cluverii, qua saltem eversionem principiorum nostrorum respiciunt, in fumum etiam abiisse judico, quod nihil horum, quae mense Junio publicare pollicitus est, hucusque in Actis comparuit. Sane qui de veritate sententiae suae sunt persuasi, non aenigmatice loquuntur. Conatus sum in his inclusis*), quas curae tuae sigillo muniendas committo, absurdum ad quod ejus placita deducunt, evidentius exponere. Nescio an plus soliditatis insit promotioni Geometriae, quam Dn. de Tschirnhaus iterata vice promisit; post enim ostensam speciminum suorum tum insufficientiam tum falsitatem judicio meo non debuisset antiqui promissi repetitione acquiescere, sed potius novis speciminibus inventa sua stabilire. Scire autem percupio, quid Tibi de istis videatur, qui Viri Tibi familiarioris principia procul dubio melius perspecta habes.

Hac ipsa hora incidit mihi in manus ingens aliquod Programma typis excusum, quo frater jam tertium omnes totius orbis Geometras, et ut videtur me in specie, verbis jactantia et felle plenis, ad solutionem sui Problematis provocat. Agnosco infirmitatem meam, nec tam credo me solvisse, quam Deum per me, ut fastum ejus immodicum reprimeret. Doleo autem acerbe, ipsum usque adeo sui oblitum esse, ut non recordetur amplius, quo instrumento divina gratia olim in se fuerit operata.

Beilage.

Jac. Bernoulli an Detlef Clüver.

Il y a bien du temps, que je vous dois une reponse à vôtre derniere lettre. Ce n'est pas que les soins de mon menage m'ayent fait oublier mon devoir envers vous, comme vous croyés, qu'ils ont dû effacer de mon ame l'idée de votre chere personne; car la connoissance des hommes de votre merite fait trop d'impression par mon esprit, pour me permettre, d'en perdre jamais la memoire. Je vous avoue que ceux qui sont mariés, n'ont pas, à leur

*) Siehe die folgende Beilage.

grand regret, tout le temps qu'il faut pour les meditations et pour l'entretien de leur commerce avec les savans; et c'est aussi pour cela, que j'envie bien des fois l'heureux sort de vous autres, qui ne l'etés pas. Toutes fois ce n'est pas maintenant ce qui m'a empeché le plus de vous écrire: la principale cause de mon silence c'est que j'ay voulu attendre, que je puisse vous dire mon sentiment sur vos inventions, dont vous avés promis de nous regaler au mois de Juin. Cependant j'ay attendu inutilement, et il n'a rien paru de tel jusqu'icy dans les Actes. D'ou vient, Monsieur, que vous ne degagés pas votre parole? vous étes-vous peutetre marié, pour me servir du bonmot de votre Anglois, que vous ne vous souvenes plus de ce que vous aves promis pendant vôtre celibat, en nous donnant cette science de L'infini, que vous nous avés fait esperer depuis plus de 10 ans, et dont vous m'avés reiteré la promesse, il n'y en a qu'un. Je vous confesse, qu'apres tout ce que vous m'en avés écrit, ce ne sont encore que mysteres pour moy. Je ne comprends que fort peu de chose dans vos nombres triquarres, quoy que je vous aye dit, que j'en trouve aisement une infinité: et pour vos quadratures planetaires, pour les combinaisons de tout l'univers renfermées dans un seul segment de cercles, je n'y vois rien du tout. Ainsi je n'en diray rien; car je n'ay pas le temps de dechiffrer des enigmes et peutetre M. Leibniz l'a encore moins. C'est à vous, à nous en donner la clef, si vous voules etre entendu. Il semble même, qu'il y va de votre honneur, de le faire au plutôt; etant à craindre, que plusieurs ne traitent de vision des choses si extraordinaires et si bizarres. Qu'en penses-vous, s'il vous arrivoit de mourir, avant que d'avoir desabusé ces temeraires, qui auront pû concevoir de telles pensées; asseurement ils vous feroient passer pour un homme, qui a û l'imagination un peu blessée. Ne tardez-dont plus, je vous prie, à vous en acquiter sans cesse, et n'apprehendes pas, que d'autres vous ravissent la gloire de vos inventions: étant impossible, que personne aille à ce point d'effronterie, que de s'attribuer une chose, qui aura deja été rendue publique, et même promise dix ans auparavant par un autre. Pour moy, bien loin d'y pretendre aucune part, je seray des premiers à celebrer vos louanges. J'excepte un seul point, sur le quel je crois toujours etre votre adversaire. C'est lorsque vous accuses d'erreur tout ce qu'il y a û de Geometres depuis Archimede, en condamnant toutes

leurs quadratures, même jusqu'à celle de la Parabole, puisqu'en cela vous attaques une verité, qui me semble claire comme le jour. Je vous avois repondu dans ma premiere lettre, que votre quadrature ne differoit aucunement de celle de tous les Geometres. Vous me faites faire là-dessus un raisonnement qui à la verité est assez ridicule, mais qui est tres-different du mien; ce qui m'oblige à m'expliquer plus amplement, en vous faisant voir deux choses; la premiere: que votre quadrature se peut trouver par le calcul ordinaire sans vos nouveaux principes: et l'autre, qu'elle ne sauroit être differente de l'ordinaire sans une contradiction manifeste. Soit la Parabole AFD (fig. 12), le Parametre $AB = a$, l'Axe $AC = x$, l'appiquée $CD = y$, et leurs parties infiniment petites $CE = dx$, $DS = dy$, à la façon de Mr. Leibniz. Par la nature de la courbe ▭ BAC = □ CD, et ▭ BAE = □ EF; par consequent ▭ BAC — ▭ BAE = □ CD — □ EF, c'est à dire BA, EC $= 2CDG - GD^2$ ou par symboles $adx = 2ydy - dy^2$ (puisque vous voulés, qu'on ne doive pas negliger dy^2). C'est pourquoy $dx = \frac{2ydy - dy^2}{a}$, et $CH = ydx = \frac{2yydy}{a} - \frac{ydy^2}{a}$, et $HFD = \frac{1}{2} HG = \frac{dxdy}{2} = \frac{2ydy^2 - dy^3}{2a}$, et ainsi le Trapeze $FECD = CH - HFD = \frac{2yydy - 2ydy^2}{a} + \frac{dy^3}{2a}$. D'ou il suit que l'espace $ACD = \frac{2y^3}{3a} - \frac{ydy^2}{6a}$, parceque mettant dans cette quantité EF ou $y - dy$ à la place de CD ou y, l'on trouve pour l'espace AEF $\frac{2y^3 - 6yydy + 6ydy^2 - 2dy^3}{3a} - \frac{ydy^2 - dy^3}{6a}$, laquelle etant otée de $\frac{2y^3}{3a} - \frac{ydy^2}{6a}$, il reste pour le Trapeze FECD $\frac{2yydy - 2ydy^2}{a} + \frac{dy^3}{2a}$, la meme quantité que dessus. Or l'espace interieur ACD étant $\frac{2y^3}{3a} - \frac{ydy^2}{6a}$, l'exterieur AJD sera $CJ - ACD = xy - ACD = \frac{y^3}{a} - ACD = \frac{y^3}{3a} + \frac{ydy^2}{6a}$, et par consequent $\frac{AJD}{ACD} = \frac{2yy + dy^2}{4yy - dy^2}$. Determinons maintenant l'element dy, à une certaine longueur, comme DG (j'entends, non

au regard de DC ou y, à laquelle il est incomparable, mais au regard d'autres infiniment petits) et appellons le nombre infini de ces parties comprises dans la ligne CD, n, en sorte que y soit $= ndy$, et nous trouverons $\frac{2yy + dy^2}{4yy - dy^2} = \frac{2nndy^2 + dy^2}{4nndy^2 - dy^2} = \frac{2nn + 1}{4nn - 1}$, la même raison, que vous trouves par vos principes, et que vous soutenes etre differente de $\frac{1}{2}$; mais en voicy la contradiction: Determinons la dy à une autre longueur $D\gamma$, qui ne soit que la moitié de DG (ce qui se peut, par ce que quand je m'en suis servi, je n'ay pensé d'abord à aucune longueur determinée, et je l'ay seulement considerée comme incomparable à DC). Or n'est-il pas vray, je vous prie, que le nombre des dy, c'est à dire de $D\gamma$, contenus dans DC, etant en ce cas $= 2n$, et $y = 2ndy$, cette quantité $\frac{2yy + dy^2}{4yy - dy^2}$ vaudra alors $\frac{8nndy^2 + dy^2}{16nndy^2 - dy^2} = \frac{8nn + 1}{16nn - 1}$; et par consequent la raison de $\frac{AJD}{ACD}$ est en même temps $\frac{2nn + 1}{4nn - 1}$ et $\frac{8nn + 1}{16nn - 1}$, c'est à dire et plus grande et plus petite, puisque selon vous ces deux-ci $\frac{2nn + 1}{4nn - 1}$ et $\frac{2nn}{4nn}$ sont aussi differentes. Je conjecture donc que vôtre illusion procede de ce que vous envisagés le dy, comme quelque chose de determiné par la nature, au lieu que ce n'est qu'une fiction d'esprit, et ne consiste que dans une fluxion perpetuelle vers le neant, qui est cause que cette raison $\frac{2yy + dy^2}{4yy - dy^2}$ est toujours variable, et ne devient fixe, que lorsque dy est parfaitement rien, et la raison ne differe plus aucunement de la soûdouble. Mais si apres tout cela vous vous opiniatres à soutenir encore, que nos quadratures sont defectueuses, je voudrois bien savoir, ce que vous trouvés à redire à la maniere de demontrer des Anciens, qui se fait per explosum excessum et defectum, par laquelle ces quadratures se justifient; et Mr. Leibniz vous a fort bien demandé, si vous croyés, qu'on en puisse donner une construction meilleure que la leur. Encore une chose: vous avés vû, comment j'arrive parfaitement à votre quadrature en prenant FECD pour un Trapeze: vous croyés donc, que l'on peut negliger l'espace entre la courbure FD et sa chorde, d'autant

qu'il est infiniment plus petit que GH. D'où vient donc, que vous ne vouliés pas, que nous soyons en droit, de negliger dans le calcul par la même raison l'espace GH qui est infiniment plus petit que CF. Il semble que vous soyés en cela du sentiment de Mr. Nieuwentyt, qui reconnoit les differences premieres, sans admettre les secondes. Et cependant le dit espace est encore assés grand pour changer vôtre quadrature, parce qu'etant $= \frac{dy^2}{4m}$, il fait trouver $\frac{AJD}{ACD} = \frac{4nn-1}{8nn+1}$. D'où il suit, que, s'il falloit parler à la derniere rigueur, vôtre quadrature bien loin d'être exacte, s'ecarteroit encore plus de la veritable, que celle d'Archimede, puisqu'elle fait l'espace AJD plus que soûdouble de ACD, au lieu que je le demontre être plus petit.

Pour ce que vous adjoutés à la fin de vôtre lettre, touchant la dimension de toutes ces lignes, que j'ay données dans les Actes, je ne puis pas croire qu'elles soient defectueuses, non plus que celle de la Parabole. Si vous trouvés, qu'on les pourroit reformer, vous aurés la bonté de nous expliquer plus clairement le fondement, sur lequel cette reforme se doit faire; car je n'en sache point d'autre, que celuy, dont se sert Mr. Leibniz, et que je crois être tres-veritable. Je suis avec beaucoup d'attachement etc.

A Bâle 27 Janvier 1697.

IX.

Leibniz an Jac. Bernoulli.

Gratissimae mihi fuere Tuae quas Dn. Lic. Menkenius ad me transmisit. Doleo Tuas priores Herbornam transmissas ad me non pervenisse, sed multo magis valetudinem sese non optime habere quod etiam de mea dicere cogor, quam alteruis nuc phlogoses nunc blandae quidem, sed tamen crebrae diarrhoeae vexant; itaque uterque nostrum fortasse relaxatione animi a laboribus intentioribus opus haberet. Monui Dn. Menkenium non posse facile meliorem dari relationem libri Dn. Marchionis Hospitalii ea quae Diario Parisino est inserta, cujus proinde versio suffecerit.

Scripsi ad Dn. fratrem Tuum me non facile ab aliis expectare problematis curvae celerrimi descensus solutionem quam a Te, et a Dn. Marchione Hospitalio, et a Domino Newtono, et a Dn. Huddenio, si ille haec studia dudum seposita resumeret. Nec putavi Tuam sagacitatem effugiturum esse, si animum intenderes. Fortasse non est necesse ut statim in vulgus emaneat Analysis, quod etiam Dn. fratrem tuum monui, video enim multos parum sincere agere, et quae didicere ex nostris quantum possunt alio habitu larvata pro suis venditare, cujus animi Dn. Nieuwentiit sese sespectum reddit, qui nuper libellum contra me publicavit, sed cui non respondebo. Suffecerit librum ejus in Actis rite recenseri, nam quae objecit recitasse est refutasse.

Libenter dabo operam ut Tua quoque problemata in Galliam et Italiam perveniant, quanquam (excepto Dn. Marchione Hospitalio) nihil est quod a Gallis et multo minus quod ab Italis speremus. De me nihil polliceor, tum valetudinis causa, tum etiam acuminis si quod olim habui paulatim hebescentis. Et cum solvissem problema Domini fratris tui, subjeci quod vetulus ille Athleta Virgilii: coestus artemque repono! imposterumque magis spectator applausorque ero, quam Autor, tametsi circa Methodos non pauca adhuc dare posse sperem. Optarem et ego seriei Harmonicae summam praecise dari posse, sed cum hoc non sperem, spero tamen posse aliquid adhuc amplius posse praestari circa praxin. Verissimum est, si possemus dare summam progressionis Harmonicae, plerasque alias hujusmodi summas datum iri. Pro tuis de seriebus et aliis maximas ago gratias, et continuationem expecto. Tua constructio quadraturarum per Tractoriam mihi perplacet. Quae de opticis habes, videntur consideratu dignissima, sed profundam meditationem postulantia cujus ego mei vix sum capax, quemadmodum nec ausim problema sperare quod operam tuam lusit.

Machina mea Arithmetica pretio fateor exiguo haberi non potest, nam Horologii instar multis indiget rotis. Quam apud Dn. Spleissium vidisti Ottianam, etsi qualis sit nesciam, puto tamen plane diversam esse. Fortasse consentit cum Pascaliana et Morlandiana. Pascalius Machinam Arithmeticam invenit quae proprie loquendo non est nisi pro additionibus et substractionibus. Sed Dn. Moreland (autor Tubae stentoreae) a cylindro Arithmetico Domini Petiti Galli credo excitatus, baculos Neperi in rotulis exhibuit, additiones autem multiplicationi necessarias quas rhabdologia ca-

lamo fieri postulat, peragit in Machina Pascaliana, et ita ex utrisque componit unum, quod non est exigui sumtus, sed exigui tamen compendii: in mea autem multiplicatio et divisio maximorum etiam numerorum summa celeritate, et nulla additione auxiliari peraguntur. Jam alterum Exemplum paratum habeo. Dudum habuissem plura, nisi opifex partim morbo, partim aliter fuisset impeditus. Operae pretium erit, ut descriptio ejus publicetur, sed hoc nisi adhibitis multis schematibus fieri non potest; interea gaudeo rem eo deductam (etsi magno sumtu meo) ut amplius perire non possit.

Quod planetas attinet, scis me quoque Kepleri sententiam probare non minus quam Newtonum, areas scilicet esse temporibus proportionales, quod et Cassinus et Flamsteadius satis observationibus consentire putant, etsi impossibile putem aliquid absolute satisfaciens tam brevi compendio dari, quoniam ipsi planetae non procedunt summa et Mathematica regularitate, sed a se invicem patiuntur.

Curabo aliquando describi quae cum variis viris doctis circa Dynamica disputavi per literas, et imprimis quae cum Domino fratre tuo, itemque cum Dn. Papino, qui nondum arma deposuit, etsi plus semel prorsus mutarit et jam sit multo moderatior. Cum viderem alterum alteri non intelligi satis et quaerelis mutuis de male accepta alterius mente literas nostras compleri, proposui ut procederemus secundum formam Logicorum. Placuit, cum successu; ab eo enim tempore hae querelae cessavere, et tanta fuit nostra patientia, ut jam pervenerimus ad 13^{mum} syllogismum, cui ante paucos dies respondi. Agnoscit ipse Dn. Papinus controversiam non consistere in sola Logomachia, quoniam quaeritur utrum detur certa quantitas virium quae semper conservetur (quod ipse concedit) et quomodo ea sit aestimanda. Hanc ego aestimo sic ut idem semper possit produci effectus; v. g. ut eidem ponderi semper eadem dari possit altitudo, vel idem elastrum ad eundem tendi gradum, vel eidem corpori semper eadem dari velocitas, vel aliud quiddam determinatum quodcunque sit produci, quod sine virium impendio perduci nequit. Unde non gravitati me alligo, sed idem obtineri puto quemcunque effectum sumas, tametsi gravitas prae aliis sit intellectui apta. Corpus igitur dupla celeritate latum puto quadruplo esse potentius, licet sit aequale, quoniam si corpus A celeritate simpla potest dare globo L celeritatem quandam certam, efficere possum ut corpus B celeritate dupla praeditum possit qua-

tuor globis M, N, O, P, quorum unusquisque sit aequalis ipsi globo L, dare eandem velocitatem, quam habet globus L. Unde manifestum est corpus B posse quadruplam potentiam producere ejus quam producere potest corpus A, atque adeo quadruplo esse potentius; si modo concedamus effectum esse causae aequalem. Habeo tamen etiam argumentum a priori, idem plane concludens. Argumentum autem illud de 4 globis ni fallor etiam apud Du. fratrem tuum valuit. Quicquid enim disputemus de aestimatione virium, saltem negari non potest si aliquid velut L, aut ei congruum, certa velocitate praeditum aliquoties repetatur, ut in M, N, O, P, etiam repeti potentiam. Unde non admitto corpus B esse duplum tantum potentia corporis A, neque enim repetitione praecisa potentiae A fit potentia corporis B, magnitudine aequalis et duplo velocioris, et licet in B repetatur gradus velocitatis qui est in A, non tamen etiam repetitur quantitas corporis, sed in M + N praecise duplicatur seu reperitur quod est in L, nempe tam magnitudo quam velocitas. Unde ex generali lege aestimandi pro certo sumo M + N + O + P aequivelox ipsi L, et quadruplum magnitudine ipsius L etiam potentia quadruplum esse. Fingo jam dari Elastrum quod corpus A in horizontali plano currens praecise tendat vi sua, ita ut elastro tenso corpus suam vim totam consumserit, et quiescat, dico corpus B praecise quatuor Elastra talia posse tendere. Vel si mavis corpus B quatuor corporibus ipsi A aequalibus praecise dare posse velocitatem ipsius A. Nam corpus B impetu suo quem habet (dupla scilicet velocitate ipsius A) cum possit assurgere ad quadruplam altitudinem ejus, ex qua delapsum A suam velocitatem acquirere potuit, potest facili machinamento efficere redescendens, ut quatuor corpora ipsi A aequalia assurgant ad altitudinem illam simplam, atque adeo inde redescendendo singula acquirant velocitatem ipsius A. Nec refert quod interventu gravitatis haec consequor, non magis quam ad demonstrationes Conicas refert quomodo linea Conica sit descripta; permissum est medium eligere scopo aptum, nec uno magis quam alio modo natura sibi aliquid extorqueri patitur, quo effectus causam excedat. Etsi habeam etiam ut dixi singularem a priori demonstrationem, sed quam tum demum communico, cum video argumentum a posteriori ingressum invenisse, non quod sine illo non valeat, sed quod non projici mereatur.

Quod meam opinionem attinet de conatu vel nisu quem omni corpori inesse puto, fateor omnem conatum esse determinatum in

certam partem, sed non fateor corpus sese ad omnes plagas indifferenter habere, verum id quidem est de corpore in genere, sed tamen verum est etiam de conatu vel motu in genere. Et ego puto essentiale esse omni corpori ut sit in motu actuali, imo essentiale esse omni substantiae ut acta agat. Cogitata tua de charactere infinitatis et mysteriis naturae fideique non poterunt non habere plurimum ingenii, et putem ita explicari posse, ut nihil a Theologis vereri sit opus; velimque adeo non perire.

Nesciebam Te Gallice tam eleganter scribere, quam in literis ad Dn. Cluverium factum video, quae plurimum habent salis. Unus tantum locus vellem exularet, ubi propemodum sanitatem mentis ei controversam facis. Intelligo virum egregium implicari litibus taediosis. Itaque nolim afflicto afflictionem addi. Quid si patiaris locum illum a me deleri? Id enim fieri potest salvo in caeteris sensu. Ipsa Epistola ita scripta est, ut eximere ipsi errorem posse videatur, si modo id sperare adhuc licet. Sed nescio an gratias doctori suo sit habiturus; sumus nos homines Horatiano illi similes, qui se credebat miros audire tragoedos in vacuo laetus sessor plausorque theatro. Postea sanatus, pol me occidistis amici, non servastis, ait, cui sic erepta voluptas et demtus pro vim mentis gratissimus error. Dno. de Tschirnhaus Parisiis familiariter usus sum, quod ut mihi profuit, ita puto nec illi nocuisse. Unum in eo notavi, quod negat se gloriae cupidum, et tamen sic agit, ac si esset ejus cupidissimus. Cum ante biennium hac traviret, loquebatur de quibusdam suis Theorematis quorum distincte non memini, ex quibus magna sibi promittebat, ego vero momentum eorum non satis videbam, praesertim cum saepius meminerim tales spes aluisse. Interim maximi ingenium ejus facio, et tantum paulo apertius agi vellem.

Domini fratris Tui programma accepi quoque. Videbatur mihi non in Te, sed in Dn. D. T. sua quaedam verba direxisse, sed possum falli. Caeterum ipse se a Te male acceptum putat in Actis. Ego qui utrumque maximi facio, velim vos esse amicissimos, certe nolim invicem male animatos. Dubium nullum esse censeo, quin ille Tibi studiorum suorum fundamenta imo et incrementa pro maxima parte debeat, quippe a fratre seniore in mysteria haec introductus. Atque haec etiam causa est, cur lacessitum se licet putans, noluerit tamen tibi acrius respondere, sed ille vicissim contendit meditamenta sua circa altiora illa etiam Tibi profuisse. Ego

his sepositis putem et juniorem seniori plurimum deferre, et seniorem tamen hac praerogativa moderate uti debere, et si possem aliquid conferre resuscitando affectui vestro, nullae operae parsurus essem.

Verum est Caesarini Fürstenerii librum de jure suprematus et Legationis principum Germaniae mihi attribui; velim nosse quis sit ille vir doctus apud Lindavienses qui vult meas esse aliquid putare nugas. Pleraque a me edita autoris designatione carent. Hypothesin Physicam non ignoras. Dissertatiunculam de Arte Combinatoria edideram adolescens anno 1666 quae postea fuit me nescio recusa. Methodum quandam discendae docendaeque jurisprudentiae dedi anno 1668. Codex Diplomaticus nuper prodiit. Caetera demtis iis quae in Diariis Eruditorum reperiuntur, fere ad negotia principum pertinent, ubi autorem me nollem profiteri. Scripsi innumera et de innumeris, sed edidi pauca et de paucis. Vale.

Mit dem vorstehenden Schreiben Leibnizens hat offenbar das folgende Bruchstück ein Ganzes gebildet (siehe den nächsten Brief Jac. Bernouilli's):

Gratissima mihi fuere quae de seribus infinitis, itemque in Cartesium dedisti, nondum antea mihi visa; et in universum quicquid a Te est, non potest non mihi esse gratissimum. Pro seriebus infinitis indagandis usus aliquando sum ratione singulari, quam exponam paucis, quia forte rectius me illa uti potes. Reduco nempe ad quadraturam curvae, cum alioqui curvarum quadraturas revocemus ad series. Succedit in innumeris, sed alicubi non nihil haeremus. Exempli causa quaeritur summa hujus seriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$ $\frac{1}{16}$ etc. constat eam pendere ex ista $\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$ etc. Sit aequatio serialis ad curvam $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16}$ etc. $= y$, quae redigetur ad nostram in casu quo $x = 1$. Hinc erit $\frac{1}{1} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}$ $- \frac{x^3}{4}$ etc. $= dy$, et $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$ etc. $= x\,dy$ seu $\log(1+x)$ $= x\,dy$ adeoque $y = \int dx \log(1+x) : x$. Interim neque Dn.

frater tuus quem consului, neque ego hactenus hanc quadraturam $\int dx \log(1+x) : x$ ad aliam simpliciorem revocare potuimus, etsi generaliter possimus summare $x^e\, dx \log(1+x)$, modo e non sit $= -1$, qui solus casus nos eludit. Quod si lucem huic inquisitioni accendere potes, scientiam ipsam promovebis. Sed literis prolixis finis tandem est inponendus. Vale etc.

Dabam Hanoverae 15. Martii 1697.

X.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Accepi his diebus literas ab Excellentiss. D. Jablonsky Societ. Reg. Scient. Brandeburgicae Secretario, d. 26. Septbris. ad me datas, una cum incluso Diplomate d. 11. Julii 1701 exarato, quibus in dictam Societatem, quando nihil tale exspectabam, me quoque adscitum significavit. Quo quidem, fateor, inopinato nuntio non potui non plurimum laetari et gaudere, quippe cui non posset non esse perhonorificum, tot Viris meritorum gloria et famae celebritate insignibus isto fraternitatis vinculo conjungi: Veruntamen sensum gaudii non parum minuit propriae infirmitatis conscientia, quae optimo jure vereri me facit, ne exspectationi horum de me conceptae ex aequo satisfacere minime valeam. Difficile enim dictu est, quantopere corporis animique mei vires multivariis morbis et aerumnis ab aliquot retro annis fuerint hebetatae, sic ut vix quicquam de me sperari amplius possit, quod inclytae Societatis scopo intentionive, aut eminenti quo me cohonestavit titulo satis respondeat. Quicquid autem ejus sit, agnosco me illi non minus obstrictum vivere pro benevolentia, qua me indignum complexa est, quam si ejus essem meritissimus; ac propterea Tibi, Vir Amplissime, qui eidem tanta cum laude praesides, inque Tua Persona omnibus, quorum interest, ejus membris gratias persolvo et ago humillimas, eosque certos esse cupio, me et beneficium eorum maximi facere, et summo studio anniti velle, ut iis grati animi affectum quovis obsequii, cultus et observantiae testimonio data occasione comprobem. Deum interim supplicibus votis precatus, ut laudatissimum

institutum Virorum eximiorum in Serenissimi Fundatoris gloriam, Societatis ac Sociorum decus, artium denique et scientiarum incrementum clementissime prosperet! De caetero eorum, quae novam hanc Societatem spectant, praeter ea quae ex publicis Lipsiensium Actis dedici, penitus sum ignarus; unde nec constat quot et quinam sint Collegae, quid agant molianturve, an hebdomadarios suos celebrent conventus, num Acta eorum publicam lucem viderint, aut visura sint, et id genus alia, de quibus libenter erudiri cuperem.

Commercium nostrum literarium, Vir Amplissime, a quinquennio jam et ultra intercidere passus sum, ob podagrici affectus incommoda, aliasque aegritudines, quibus frequenter admodum infestare soleo. Accessit cum primis mortale taedium ex inauspicata lite conceptum, quae toto hoc tempore inter me Fratremque viguit, quamque Tu in herba suffocare potuisses, nisi fratri paulo faventior tegere maluisses, quae Tibi de ejus analysi constabant. Judicium enim Tuum, quod de illa tulisti post meam jam evulgatam, ne quicquam dissimulem, nimis intempestivum mihi visum est, et opportunius venisset, si statim post pecuniam depositam una cum analysi vulgasses, quo casu publicandi potestas publice Tibi a fratre facta fuerat. Sed transeant ista, et pereat deinceps omnis eorum recordatio! Animus fuerat olim, quam primum ad Te darem literas, in mei justificationem perscribere Tibi historiolam vitae et profectuum nostrorum, quos ambo a prima adolescentia in Mathesi fecimus (ubi inter alia vidisses, non ipsum, sed me calculi Tui mysteria primum penetrasse ipsique impertivisse; vidisses, judicium illud, quod cognito etiam postea Barrovii calculo de Tuo tuli, a Te tam male acceptum, non minus ipsius quam meum fuisse etc.) sed mutavi sententiam, quia video nil profutura. Quin igitur ad Epistolae Tuae contenta, quibus adhuc responsum debeo, pergo:

Hic ante omnia, Vir Amplissime, est cur Tibi mihique impense gratuler, quod in controversia de quantitate virium aestimanda totus nunc Tuus factus sum, idque occasione exempli quod affers de 4 globis in plano horizontali: Fateri enim cogor, non placuisse alterum de ascensu corporis gravis duplo velocioris ad 4^{plam} altitudinem, quod variis de causis minus aptum judico ad persuadendum, id quod debet; nec sane mihi persuasisset unquam, non magis atque Do. Papino. Et quanquam etiam illa, quae de 4 globis ad fratrem explicatius scripsisti, quaeque Hermannus noster,

cum Groninga transiret, ex Tuis ad ipsum literis excerpsit, initio non carere scrupulo mihi viderentur, nunc tamen cum Tibi responsurus denuo examinarem, in certo sensu, puta in corporibus certa conditione praeditis, omnino vera deprehendo; et re ulterius expensa generaliter observo, quod, concessis legibus communicationis motus, in quibus determinandis Triumviri isti, Wallisius, Hugenius et Mariottus, si recte memini, consentiunt, 1. non possit manere eadem quantitas motus, sive corpora ponantur elastica, seu elatere destituta; 2. necessario manere debeat eadem quantitas virium (Tuo sensu accepta voce) si corpora ponantur elastica. E quibus porro concludo (cum hoc et rationi humanae et sapientiae Conditoris perquam conforme sit, ut eadem perseveret quantitas virium in universo) quod corpora necessario concipi debeant ut Elastica; unde et alterum illud Tuum sequi videtur de naturali ἐνεργείᾳ, seu vi agendi, quam Tu corporibus essentialem facis. Sed, quod potissimum, ista quae dixi calculo duarum linearum tam clare ostendo, ut non magis de iis dubitare possit D. Papinus, quam de simplicissima quavis demonstratione Euclidis; nec adeo tantum syllogismorum apparatu ad illum convincendum videatur opus.

De Seriebus infinitis ad quadraturas reducendis etiam olim cogitavi, et hinc curvam quaesieram, cui ista series $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ etc. competeret, quam in Posit. meis de Seriebus Prop. XLIV eandem Tecum inveni, cujus nempe natura est $y = \int dx \log(1+x) : x$. Et patet, quod ei tantum loco $\square^{li}$ BJG in Schemate (fig. 13) sumatur solidum sub aliqua potestate BJ et JG, semper tales inveniri possint curvae, quibus indefinite competat $y = \int x^e dx\, (\log. \overline{1+x})$ et quarum quadraturae per series absolute summabiles exhibeantur, excepta sola, quam intenderam, serie $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ etc. ubi $e = -1$. In symbolis etiam facile reperio $\int x^e dx \log. x = \frac{x^{e+1} lx}{e+1} - \frac{x^{e+1}}{\overline{e+1}^2}$, quae iterum in solo, ut dicis, casu quo $e = -1$, nos eludit. Et hoc quoque in aliis accidere solet: Sic

notum est, $x^e dx$ semper esse summabile, excepto tantum cum $e = -1$: Ita observo, $\int x^e n x d x$ (intellige per $n x$ numerum ipsius x spectati ut logarithmi) generaliter ad simpliciorem reduci posse, quoties e numerum integrum et positivum significat; et quoties negativum, hoc solo nomine reduci non posse, quia in casu, quo $e = -1$, reduci nequit, sic ut solus hic casus dici possit nos fugere. Qua occasione recordor aequationis alias memoratae $dy = yydx + xxdx$, in qua nunquam separare potui indeterminatas a se invicem, sic ut aequatio maneret simpliciter differentialis; sed separavi illas reducendo aequationem ad hanc differentio-differentialem $ddy : y = xxdx^2$. Et quanquam generaliter et absolute summare possim $y^e ddy = xxdx^2$, imo generalius $y^e ddy = x^v dx^2$, in solo tamen casu non potui, quo $e = -1$; unde cogitavi aliquando, annon fieri forte possit, ut quemadmodum aequationes quaedam differentiales, velut $dy : y = x^v dx$, non sunt reducibiles ad algebraicas, ita dentur quaedam differentio-differentiales, quae nec ad algebraicas nec ad simpliciter differentiales reduci h. e. nec algebraice, neque per quadraturas construi possunt, adeo ut omnis labor in iis reducendis aut etiam separandis a se invicem differentialibus frustra impendatur. An ergo perpetuo hujusmodi curvis carebimus, nullumque medium ipsarum constructioni superest? Mihi certe hic aqua haeret, nisi Tu forte quippiam nosti. Tu enim penetrare potes, quo aliis non datur, teste eximio illo specimine,*) quod nuper in Actis Lips. dedisti pro summandis quantitatibus quibusvis rationalibus, quo profecto nihil unquam vidi excellentius. Si idem praestari posset in surdis, hem quanta scientiae promotio! Unum meo judicio taceri non debuisset: nempe modus procedendi, cum quaedam denominatoris radices sunt aequales; tum enim regulae Tuae non succedere possunt.

Machina Tua Arithmetica vellem aliquando typis excuderetur, ut ejus saltem aliquid etiam ad nos pervenire possit. Si de Pascaliana, Petitiana, et Morlandiana Machinis quidpiam mihi constitisset, forsan Tuae facilius penetrandae lucem affundere potuisset.

---

*) Die Abhandlung Leibnizens, von der Jac. Bernoulli hier spricht, hat den Titel: Specimen novum Analyseos pro Scientia Infiniti circa Summas et Quadraturas.

Vereor interim, ne Tua, cum tot implicatam rotis dicas, in praxi difficulter successum praestet.

Homo ille Lindaviensis, qui olim de Tuis sciscitatus est, Keesius appellatur, Jurium Doctor tum hic creatus: At is minime solus est, qui Tua depraedicet, cum aestimatores et admiratores habeas etiam nostrates, quotquot Tua scripta legerunt: adeo verum est, quod D. de Fontenelle ad Historiam suam nuperam Academiae Reg. Scient. praefatur, quando asserit, Virum Mathematicis scientiis instructum caeteris paribus (toutes choses d'ailleurs égales) de quavis re longe melius et accuratius disserere posse, quam ii qui hoc praesidio sunt destituti. Vale et fave etc.

Basileae, 15. Novbris 1702.

XI.

Leibniz an Jac. Bernoulli.

Berolini April. 1703.

Dici non potest, quam gratae mihi literae Tuae fuerint, his duobus exceptis, quod Te non optime valere, ac deinde quod Te de meo affectu subdubitasse testantur. Et valetudinem quidem boni consulere oportet, quam nobis tribuit Deus, ut caetera omnia, quae veniunt a summa illa manu, cum persuasissimum oporteat esse sapientem, non posse res melius geri quam fit a Deo; atque in bonum semper eorum cedere, qui Deum amant, et gubernatione ejus sunt contenti; etsi non semper hoc appareat in illa parte rerum quae oculis nostris subjecta est, scrupulique illis inanes semper maneant qui non semel curas in Deum rejicere dedicere. Quod me attinet, qui tota hac hyeme adversa valetudine Berolini retentus, nunc prope ex integro recuperatis viribus domum cogito, haberem (si eo scriptionis genere delectarer) nonnullam, amice, tecum expostulandi materiam. Quid quaeso a me proficisci poterat controversiae vestrae impediendae vel terminandae? Sane cum de me statim tanquam arbitro injiciebatur mentio, ea res fecit, ut nihil dicerem faceremve, quo in alterutram partem inclinare videri possem. Neque interim volebam in me nisi cum aliis recipere arbitrium. Et ut verum fatear, libenter distuli examinare sufficienti

studio an recte se omnia in solutione Groningiana haberent, ipse plus satis alias distractus, sed cum eo demum res redacta esset, ut tantum testimonio meo opus esset an eam accepissem statuto tempore, negare id non potui, judicium tamen meum interponendum non putavi. Porro liticulam illam vestram ego semper de nihilo esse judicavi, et cum illust. viris, Bignonio et Hospitalio tentavi opprimere in herba: nullamque fratribus rationem simultatis laudabilem intelligi posse statui. Tecum abruptum tunc nescio qua causa, commercium erat, alioqui facilius fortasse incommoda praevenissemus: caeterum non dissimulavi apud Dn. fratrem minorem, commune judicium ipsi minus faviturum vel ideo quia minori; plerisque (quicquid ille contra alleget) ex praesumta rerum natura censentibus fratrem seniorem quodammodo patris officium subiisse, et in studiis communibus maxime facem praeluxisse. Interim tu, qui ut aetate, ita humanarum rerum usu praestas, rem Te dignam facies, si exemplum ipsi praebeas moderationis. Quod si ille pergeret vellicare, quod tamen credendum non est, neminem ea in re habiturus esset laudatorem. Certe parvi momenti est in aliquo problemate viae compendiosiori forte alterutrum institisse, et scio fuisse in quibus Tibi, scio fuisse in quibus illi melius successit. Caeterum an eam mihi animi parvitatem tribuis, ut Tibi vel illi succenseam, si quos in Barrovio usus perspexistis, quos mihi inventionum contemporaneo ab eo petere necesse non fuit. Nondum apparuerat prima editio Lectionum Barrovii, cum aliquot foliorum centenarios impleveram duplici genere meditationum, uno per assignabilia, ut vocabam, ubi ad modum Cavallerii et Gregorii a S. Vincentio ratiocinabar; altero per in assignabilia, ubi et Triangulo, quod jam tum characteristicum vocaveram, utebar, idque credebam meum inventum, cui occasionem dederat quaedam demonstratio apud Pascalium vel Dettonvillaeum, qui ipse ejus usum non perspexerat. Hinc et dimensiones spatiorum et curvarum et superficierum rotatione genitarum ducebam multimode, quorum magnam partem postea alibi apud alios inveni, neque tanti ipsa visa sunt, cum ad fontem, nempe calculum differentialem perveni. Speraveram Tibi non displicituras meas Quadraturas Rationales, sane antiquissimas, nam jam in Gallia habui. Nunc esset cogitandum quandonam surdae ad rationales revocari possint, sed ibi in plerisque hactenus haeret aqua. Dn. Menkenio misi supplementum edendum pro radicibus aequalibus.

Machina Pascaliana, Petitiana, Morlandiana et Grilletiana nihil faciunt ad meam divinandam, nam plane aliud meae principium est. Illae omnes pro multiplicatione ac divisione Neperi baculis varie transformatis utuntur, mea nullam habet relationem ad rhabdologiam. Omnia mihi praestat natura rotarum nullo calculo praesupposito vel interposito, sed descriptio prolixior foret.

Gratum facies, si explices quomodo $dy = yydx + xxdx$ reduxeris ad $ddy : y = xxdxdx$, et quomodo solvas $y^e ddy = x^e dxdx$. Malo enim ab egregiis viris jam inventa discere, quam per me quaerere, praesertim non certus inveniendi. Multa nobis adhuc desunt nec satis ausim dicere, quod nobis jus sperandi, etsi nil putem desperandum.*)

Res Societatis hujus Regiae paulo lentius procedunt; observationes tamen fiunt, quae cum caeteris melius ibunt observatorio absoluto.

Gaudeo quod veritatem doctrinae meae Dynamicae jam penitus perspexisti. Illam ego non inveni aut deduxi ex illis phaenomenis qualia Mariottus aliique tradidere, sed ex ipsis causis, quibus deinde consentire phaenomena necesse est. Quia autem rem brevi et eleganti calculo a Te confici ais, rem gratam facies, si mecum communicabis. Ego vero interim mitto ecce tres aequationes compendiosas quibus uti soleo, quaeque omnia quibus hic opus praebent. Non semper utor iis quae habeo, nec omnia quae potui adhibui ad Dn. Papinum convincendum.

Velocitatem progressivam vel progressus voco eam qua ferri intelligitur corpus in eam partem, in quam major est progressus in summa omnibus corporibus concurrentibus computatis. Quodsi corpus revera in contrariam partem feratur, ejus velo-

---

*) Für die Worte von „Multa .... desperandum" hatte Leibniz ursprünglich geschrieben: Fateor hactenus nescire me an omnes differentiales primi gradus possint reduci ad quadraturas et similiter an suppositis quadraturis, omnes secundi gradus ad primas; et ita porro. Tantum abest, ut quod ante paucos annos adhuc sibi persuadebant ineptientes de vulgo Geometrae, praesertim Cartesiani, omnia problemata solvere possimus, ut potius non nisi in liminibus haereamus rerum difficiliorum. Ne radices quidem publice habentur aequationum ultra quartum gradum; in quo tamen vera consistit aequationum analysis. Sed hoc puto esse in potestate, quamvis non ea via qua Dn. Tschirnhusius est usus.

citas progressus fiet quantitas negativa. Quantitatem progressus voco ductum ex massa in velocitatem progressus sive uno corpore adhibito sive plurium quantitatibus progressus computatis.

Esto jam velocitas progressiva corporum a ante ictum v post ictum x
b y z.

Quantum corpus vincebatur celeritate progressiva ante ictum, tantum ea vi vincitur post ictum, seu

Reg. 1. Linearis. Eadem manet velocitas respectiva, qua corpora viciniam mutant; $v - y = z - x$.

Reg. 2. Superficialis. Eadem manet quantitas progressus; $av + by = ax + bz$ (unde si v, y, x, z sint quantitates affirmativae, quantitas progressus coincidet cum quantitate motus, nempe cum ante et post concursum corpora ambo tendunt in eandem plagam; sin corpora sibi occurrant, ea corpora quantitas progressus totalis erit differentia quantitatum motus.)

Reg. 3. Solidaris. Eadem manet quantitas virium, $avv + byy = axx + bzz$.

Cum corpora non satis elastica sunt, pars virium particulis corporum absorbetur, et in illis recepta insensibiles habet effectus, regulaeque 1. et 3. deficiunt sensu.

Harum trium regularum duae quaevis sufficiunt ad tertiam quoque inveniendam. Ex. gr. aequ. 1. sic demonstratur per aequ. 2. et 3: Ex aequ. 3 fit $a(vv - xx) = b(zz - yy)$. Ex aequ. 2. fit $a(v - x) = b(z - y)$. Dividatur praecedens per hanc, ab utraque parte, nempe $a(vv - xx)$ per $a(v - x)$ et $b(zz - yy)$ per $b(z - y)$, fiet utique $v + x = z + y$, seu $v - y = z - x$, ut habet aequ. 1.

Sed erat in hac doctrina desiderandum meo judicio aliquid sublimius profundiusque, ut scilicet nostra potentiae aestimatio conficeretur penitus a priori, nullo ad experimenta vel gravium vel elasticorum respectu, ex solis definitionibus potentiae, effectus, actionis et simul jam rem in motu aequabili spectando, omnibusque secundum motus essentiam formaliter et per se consideratis in unoquoque corpore moto omni violentia et accidentali remotis. Id autem jam dudum feliciter magnaque cum voluptate confeci, nec facile nisi illis communico, qui principia aestimare norunt. Sit spatium quod percurritur s, tempus quod impeditur t, et velo-

citas v, et corpus c, et potentia p, et effectus e, et actio a, quae jam pleraque definiemus aestimando,

s sunt ut vt id est spatia percursa sunt in ratione composita velocitatum et temporum impensorum, ut constat. Quod si quis spatium et tempus ut cognita assumat, continetur hic definitio velocitatis, eruntque velocitates ut s : t, id est in ratione spatiorum recta et temporum reciproca.

e sunt ut cs, id est effectus sunt in ratione composita corporum promotorum et spatiorum, per quae sunt promota. Intelligo hic abstractos et mathematicos effectus vel si mavis formales, per quos solos non est aestimanda vis, ut per violentos, quia violenti consumunt vim eoque mensurant, sed formales eam relinquunt nec totam exhauriunt aestimationem actionis, ut jam patebit.

Porro a sunt ut ev seu actiones motrices sunt in ratione composita et effectuum et celeritatum, quibus illi effectus fiunt. Intelligo actionem motricem in corpore moto per se spectato. In ea non tantum quid sit productum aut quantum corpus quam longe sit promotum quaeritur, sed et qua celeritate.

Tandem a sunt ut tp, nempe potentiae natura intelligitur a suo fructu, scilicet actione, si consideres actionem esse potentiae exercitium, et resultare potentiae replicatione, vel ductum per tempus. Unde habetur definitio aestimatoria potentiae: p sunt ut a:t, id est potentiae seu vires sunt in ratione composita ex actionum ratione directa et temporum reciproca, ut supra velocitates ex spatiorum directa et temporum reciproca.

Hinc jam nostra potentiae aestimatio sic demonstratur: tp ut a, sed a ut ev, ergo tp ut ev, sed e ut cs, ergo tp ut csv. Sed s ut vt; ergo tp ut cvvt seu p ut cvv, id est potentiae sunt in ratione composita ex simplice corporum et duplicata velocitatum. Quod erat demonstrandum.

Mirabere, tam simplices notiones ut potentiae, actionis, et similes, hominibus satis perspectas non fuisse; et ex iis tamen sponte nasci vides verum Dynamices principium, quod omnia deinde experimenta confirmant. Idem concludo adhuc alio mirabili argumentandi genere inexspectatae simplicitatis, cujus tamen idem est fundus. Concluditur quoque hinc aliud magnum Theorema; posito enim servari quantitatem virium in universo, sequitur falsum quidem esse quod eadem maneat quantitas motus; sed tamen verum est,

aequalibus temporibus aequales manere quantitates Actionis motricis in universo, secundum nostram scilicet Actionis ac potentiae definitionem. Nam quia a ut tp, et p semper eadem, etiam aequalibus temporibus erunt tp eadem, adeoque et a eaedem, aequalibus t. Hinc si vel in universo, vel in composito corporum cum aliis corporibus non communicante sumatur tempus determinatum, v. g. minuti, et durante eo ducantur respective corpora in sua respective spatia percursa, simulque in percurrendi velocitates; provenieus aggregatum quocunque minuto erit aequale: ut mirabile sit Cartesium, cum vicinus esset veritati, semper hic a janua aberravisse. Unum addo, etsi putem omnia corpora suo quodam modo esse Elastica, et in omni corporum concursu Elastrum exerceri, neque aliter leges naturae divinas executionem habere posse, non tamen a me concipi Elastrum, ut quantitatem ἄῤῥητον divinitus, immediate inditam aut procuratam, sed ut effectum fluidi tenuis interlabentis; partesque hujus fluidi rursus Elasticas esse per aliud fluidum multo tenuius, et sic procedi in infinitum. Nec volo ut meae formales causae, Animae nempe vel Entelechiae primitivae, non magis quam finales quae autorem rerum perpulere, vel minimum derogent efficientium et materialium seriei intelligibili seu mechanismo, etsi principia mechanismi seu Leges Dynamicae propter finales in formalibus contineantur.

P. S. Audio a Te doctrinam de aestimandis probabilitatibus (quam ego magni facio) non parum esse excultam. Vellem aliquis varia ludendi genera (in quibus pulchra hujus doctrinae specimina) mathematice tractaret. Id simul amoenum et utile foret nec Te aut quocunque gravissimo Mathematico indignum. Sitas theses quasdem Tuas vel dissertationes earum non nisi paucas vidi. Optarem autem habere omnes. *)

---

*) Anmerkung. An die Stelle von diesem P. S. hatte Leibniz ursprünglich das folgende geschrieben, das seines interessanten Inhalts wegen hier einen Platz finden mag.

An eam in me animi parvitatem putas, ut vel Tibi vel Dno. fratri tuo, vel cuiquam alteri succenseam, si vos in Barrovio usus perspexistis, quos mihi inventionum contemporaneo ab eo petere necesse non fuit. Cum Parisios appulissem anno Christi 1672, eram ego Geometra autodidactos, sed parum subactus; cui non erat patientia percurrendi longas series demonstrationum. Algebram Lanzii cujusdam puerilem,

XII.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Humanissimas Tuas praeterito Aprili Berolino ad me datas recte accepi, gaudeoque quo ibidem detinebaris morbo Te rursus feliciter liberatum: Meam quod valetudinem attinet, eam post re-

---

deinde Clavii puer consulueram; Cartesii implicatior visa erat. Videbar tamen ipse mihi nescio qua satis credo temeraria ingenii fiducia par et his futurus si vellem. Audebamque inspicere libros profundiores, ut Cavalerii Geometriam et Leotaudi amoeniora curvilineorum elementa, quae forte Norimbergae inveneram, et similia quaedam plane sine cortice nataturus. Nam pene legebam ut Historias Romanenses. Interim quendam calculum mihi Geometricum fingebam, per quadratilla et cubillos incertis numeris exprimendos; ignarus haec omnia Vietam et Cartesium melius elaborasse. In hac pene dixerim superba Matheseos ignorantia ego historias et jura circumspiciebam, quod illis studiis me destinassem. Ex mathesi jucundiora libabam, Machinas inprimis cognoscere atque invenire amans; nam et Arithmetica mea Machina illius temporis partus fuit. Cum forte Hugenius, qui plus credo in me quaerebat quam erat, exemplum mihi sui de Pendulis Libri recens editum pro humanitate sua attulit. Id mihi accuratioris Geometriae initium vel occasio fuit. Dum sermones caedimus, animadvertit me non satis rectam habere notionem centri gravitatis, eam ergo indicavit paucis; simul addidit Dettonvillaeum (hoc est Pascalium) talia egregie executum. Ego qui semper hoc habui eximium, ut essem mortalium docillimus saepeque luce ex unius magni viri verbis pauculis hausta innumera mea meditata nondum matura delevi: statim arripere monita summi mathematici: nam quantus esset Hugenius facile perspiciebam. Accedebat pudoris stimulus, quod visus essem rem talem ignorare. Itaque Dettonvillaeum peto a Buotio, Gregorium Vincentiadem ex Bibliotheca Regis, jam serio Geometriam acturus. Nec mora illos ductus Vincentii, illas ungulas a Vincentio coeptas, a Pascalio promotas; tum illas summas et summarum summas nataque diverse solida et resoluta, cum jucunditate spectabam; plus enim voluptatis quam laboris afferebant. In his eram, cum forte incido in demonstrationem Dettonvillaei specie levissimam, qua probat dimensionem Archimedeam superficiei sphaerae, et ex triangulorum EDC et CBK (fig. 14) similitudine ostendit, fore CK in $DE = BC$ in EC, adeoque ponendo $BF = CK$, fore rectangulum AF aequale momento curvae AEF ex axe AB. Haec ratiocinandi novitas me percussit; neque enim animadverteram apud Cavalerianos. Sed nihil magis obstupui, quam quod Pascalius fato quodam velatos

ditum ex thermis Plumberiis satis quidem nunc tolerabilem sentio, sed tamen tenerrimam, et quavis levissima diaetae aërisve intemperie alterandam, ut nulla spes sit, me unquam plene convaliturum, aut pristinas vires ex integro recuperaturum esse. Quicquid ejus sit, jam dudum Deo confidere, ejusque paternae providentiae omnia mea committere didici persuasissimus nihil mihi adversi ac-

---

oculos habuisse videretur; statim enim videbam generalissimum esse theorema pro quacunque curva, etsi perpendiculares in uno centro non concurrerent, si modo perpendicularis a curva ad axem in ordinatam transferretur, ut (fig. 15) PC vel (P)(C) in BF vel (B)(F), manifestum erat zonam FB(B)(F)F aequari momento curvae C(C) ex axe. Ego statim eo ad Hugenium, quem nondum videram: dico me obsecutum ejus monitis, jam posse aliquid, quod neque Pascalius habuisset. Et theorema generale pro momentis curvarum expono. Ille admiratus, atqui, inquit, hoc ipsum theorema est, cui innituntur meae constructiones pro superficiebus Conoidum Parabolicorum, Ellipticorum et Hyperbolicorum explanandis, quae quomodo inventa essent Robervallius et Bullialdus nunquam sapere potuerunt. Itaque applaudens ipse progressibus meis, quaesivit, possemne jam curvarum quales FF naturas invenire. Cum negarem me in ea inquisitione exercitatum, ipse Cartesium et Slusium inspicere jussit, qui aequationes locales conficere docuissent, id enim ajebat esse percommodum. Ex eo Geometriam Cartesii examinavi, Slusiumque adjunxi, ingressus profecto in Geometriam per posticum. Cum vero successus blandiretur et innumera sub manibus nascerentur, aliquot centena folia eodem anno implevi, quae in duo genera distinguebam. Assignabilium et Inassignabilium; ad assignabilia referebam quaecunque consequebar iis viis anterioribus, quibus Cavallerius, Guldinus, Torricellius, Gregorius a S. Vincentio, Pascalius, erant usi, summis, summis summarum, transpositionibus, ductibus, cylindrisque per plana truncatis, per viam denique centri gravitatis. Inassignabilibus ascribebam quae adhibito triangulo illo quod jam tum vocabam characteristicum, similibusque aliis consequebar, et quorum initia Hugenius et Wallisius dedisse mihi videbantur. Paulo post incidit in manus meas Geometria Universalis Jac. Gregorii Scoti, huic videbam eandem artem esse perspectam (quamvis demonstrationibus ad morem veterum obscuratam), quemadmodum et Barrovio demum cum ejus Lectiones prodirent, ubi magnam partem meorum theorematum praeceptam vidi. Parum tamen movebar, cum obvia esse viderem semel his imbuto tironi animadverteremque superesse multo altiora, sed quae novo calculi genere indigerent. Unde Arithmeticam meam Quadraturam similiaque licet magno plausu Galli Anglique excepissent nec editione digna putabam, pertaesus haerere in minutis, dum se Oceanus quidem aperiret. Caetera ut processerint, nosti et comprobant literae meae ab Anglis ipsis editae.

cidere posse, quod non in propriam vergat salutem. Quorsum etiam refero vel ipsam calamitatem, quam mihi per litem fraternam accessivi, quippe qua Deus patientiam et humilitatem meam voluit exercere; quanquam propterea ipsum fratrem (per quem haec tribulatio mihi immissa est) minime velim excusatum, neque hoc impediat, quo minus justitiam causae a meis semper partibus stetisse credam. Quocirca paternae hujus castigationis intuitu in posterum tacebo, nec ejus injuriis quicquam reponam, modo ne porro lacessere, aut aliquid quod ipsius non est (praeter id quod jam ex Actis Lips. et Gallico Diario mihi innotuit) sibi arrogare pergat. Eodem pacis spiritu actus nolo disquirere, utri nostrum cum altero potior expostulandi ratio suppetat, sed tamen in hoc Tibi astipulari non possum, quod litem nostram de nihilo fuisse judicas; quasi quidem avaritiae et sacrilegii publice insimulari, ac hujus impacti criminis suspicionem a se amoliri esset res nihili. At satis tandem de istis!

Supplementum Tuarum Quadraturarum pro radicibus aequalibus nondumque hucusque in D. Menckenii Actis comparuit, nisi forte Mensis aliquis Actorum mihi inconspectus mansit. Audivi, ni mea me fallit memoria, fratrem meum idem inventum tanquam suum Parisios misisse; quod ego miror, cum Tu antiquissimum Tibique jam in Gallia notum dicas. Reductio Aequationis $dy = yydx + xxdx$ ad aliam differentio-differentialem nihil habet mysterii; pono solummodo $y = -dz : zdx$; sic fiet $\overline{dxdz^2 - zdxddz} : zzdx^2 = dy = yydx + xxdx = dz^2 : zzdx + xxdx$; adeoque (multipl. per $zzdx^2$) $dxdz^2 - zdxddz = dxdz^2 + xxzzdx^3$; hoc est, $-zdxddz = xxzzdx^3$, sive $-ddz : z = xxdx^2$, optata aequatio, in qua separatae sunt indeterminatae. Solutio porro hujus alterius $-z^e ddz = x^2 dx^2$, minus adhuc artificii habet: posito namque $z = ax^m$, fit $-z^e = -a^e x^{em}$, $dz = amx^{m-1}dx$, $ddz = am \,.\, \overline{m-1} \,.\, x^{m-2}dx^2$; adeoque $-z^e ddz \,(x^v dx^2) = -a^{e+1} \,.\, m \,.\, \overline{m-1} \,.\, x^{em+m-2}dx^2$; unde facta comparatione habetur $v = em + m - 2$, hoc est $m = \overline{v+2} : \overline{e+1}$; quod in omni casu solutionem possibilem reddit, praeterquam cum $e = -1$. Habes sic, Vir Amplissime, quae desiderasti; sed nondum mihi vicissim satisfecisti, neque explicuisti, quid sentias de analogia has inter aequationes $dz : z = x^v dx$; et $ddz : z = x^v dx^2$; et de conjectura quam inde deduxi; nisi quod dicas nil esse desperandum.

j

Num igitur putas, nec de priore desperandum? aut, num existimas, de posteriore melius sperari posse? Ego profecto nullam discriminis rationem video, valdeque verisimile mihi fit, quod quemadmodum prior aequatio ad algebraicam reduci nequit, ita et altera neque ad algebraicam neque ad simpliciter differentialem reduci possit. Si vero ita sit, quomodo quaeso ejusmodi aequationes construentur? nullum hic nisi commune serierum refugium novi; reduco autem aequationem $dy = yydx + xxdx$ ad fractionem, cujus uterque terminus per seriem exprimitur, ita:

$$y = \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3.4.7} + \frac{x^{11}}{3.4.7.8.11} - \frac{x^{15}}{3.4.7.8.11.12.15} + \frac{x^{19}}{3.4.7.8.11.12.15.16.19} - \text{etc.}}{1 - \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^8}{3.4.7.8} - \frac{x^{12}}{3.4.7.8.11.12} + \frac{x^{16}}{3.4.7.8.11.12.15.16} - \text{etc.}}$$

quae series quidem actuali divisione in unam conflari possunt, sed in qua ratio progressionis non tam facile patescat, scil.:

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{3.3.7} + \frac{2x^{11}}{3.3.3.7.11} + \frac{13x^{15}}{3.3.3.3.5.7.7.11} + \text{etc.}$$

Quod res novae Societatis concernit, scripsit mihi M. Jenischius, Vir juvenis egregius et eruditus, cui Tui alloquii copiam Berolini fecisti, parari a societate librum, qui omnia calculi Tui differentialis arcana complectatur. Quid istud libri sit, et quis ejus futurus Author, scire libenter velim.

Circa Doctrinam Tuam Dynamicam novus, quod venia Tua dixerim, mihi obortus scrupulus, ex quo postremas meas ad Te dedi; non quod evertere velim ea quae Tibi semel concessi (certum enim est, secundum receptas communicationis motus leges eandem manere debere quantitatem virium in Universo, si corpora sunt elastica) sed quod de veritate potius annexae conditionis subdubitem. Primam scrupuli ansam dedit vulgare experimentum vectis, quo videmus pondus unius librae cum celeritate ut 2, paria facere cum pondere bilibri (non quadrilibri) celeritatis ut 1. Sed quia responderi hic poterat, celeritates, juxta quarum quadrata Tu vires aestimatas velis, intelligendas esse actuales, non vero potentiales aut initiales tantum, quales in vecte obtinent; quaesivi aliud experimentum, ubi ista exceptio non valet, reperique apud Mariottum sequens: Sit libra brachiorum aequalium, super unam ejus lancem cadat pondus bilibre ex altitudine unius pedis, h. e. cum celeritate ut 1; super alteram pondus unius librae ex altitudine 4 pedum, adeoque cum celeritate ut 2; et ita simul im-

petum faciant unumquodque in suam lancem. Testatur experientia, bilancem in aequilibrio mansuram, neutro ponderum alteri praevalente; id quod cum Tua sententia nullo modo conciliare possum, juxta quam pondus unius librae vires haberet duplo majores, adeoque alteri multum praevalere deberet. Unde re diu multumque mecum pensitata ita coepi statuere: Inter partes Universi perpetuum suppono servari aequilibrium; hoc autem ut obtineatur, 1. non est necesse, ut eadem maneat quantitas motus aut virium absoluta in universo; 2. contingit tamen ex accidenti in systemate duorum pluriumve corporum in se agentium, ut eadem maneat absoluta quantitas virium, si nempe corpora illa sint elastica; 3. necesse autem est, ut eadem maneat quantitas motus respectiva sive in eandem plagam. Primi veritas patet ita: Trahant duae aequales potentiae A et B libram a b (fig. 16) secundum directiones perpendiculares a A, b B, fiet aequilibrium: trahat deinde altera potentia B oblique secundum directionem b C, plus utique nunc requiretur virium ad conservandum aequilibrium quam antea. Vel etiam ita: Sit planum aliquod aequilibratum super recta a b (fig. 17) et exeant simul ex a duo corpora aequalia A, B, quae celeritatibus aequalibus super plano moveantur per rectas a A, a B; manebit plani aequilibrium; sed currat deinde corpus B oblique per rectam a c, requiritur major in illo celeritas, adeoque et major quantitas motus et virium, quam antea, ad conservandum plani aequilibrium. Unde si nulla alia in Universo corpora concipiantur praeter haec duo A et B, patet propositum. Tertium porro mihi egregie confirmat calculus, quo mediante reperio, quod sive corpora in se agentia sint elastica, sive non, semper commune eorum gravitatis centrum uniformiter movetur in linea recta, adeoque ad conceptibile quodvis planum aequaliter accedit aut recedit: hinc enim colligi potest, quod summa momentorum respectu illius plani (quae summa distantiae centri grav. ab illo proportionatur) aequabiliter etiam minuitur vel augetur; et per consequens, quod summa productorum ex singulis corporibus in suas respectivas celeritates versus illud planum, h. e. quod quantitas motus eorum respectiva semper maneat eadem. De Tuo caeteroqui ratiocinio, quo sententiam Tuam demonstrari posse existimas nullo habito Elasticitatis respectu, ego certe judicium meum interponere non ausim, cum notiones istae metaphysicae actionis, effectus etc. in discursu mathematico non sat evidentiae pro me habeant. — Unum observo,

cujus rationem non capio, nempe cur facias a (actiones) ut e v (effectus et velocitates simul) cum tamen notio velocitatis in notione effectus (qui est ut c s, hoc est ut c v t) jam comprehendatur. Remota igitur nova consideratione velocitatis, si facias a simpliciter ut e, prodibit praecise id, quod Tu impugnare volebas, nempe p fore ut c v, non autem ut c v v.

Scire libenter velim, Amplissime Vir, a quo habeas, quod Doctrina de probabilitatibus aestimandis a me excolatur. Verum est me a pluribus retro annis hujusmodi speculationibus magnopere delectari, ut vix putem, quemquam plura super his meditatum esse. Animus etiam erat, Tractatum quendam conscribendi de hac materia; sed saepe per integros annos seposui, quia naturalis meus torpor, quem accessoria valetudinis meae infirmitas immane quantum auxit, facit ut aegerrime ad scribendum accedam; et saepe mihi optarem amanuensem, qui cogitata mea leviter sibi indicata plene divinare, scriptisque consignare posset. Absolvi tamen jam maximam Libri partem, sed deest adhuc praecipua, qua artis conjectandi principia etiam ad civilia, moralia et oeconomia applicare doceo, soluto eum in finem singulari quodam Problemate, quod difficultatis commendationem non parvam, utilitatis longe maximam habet, et de quo jam ultra duodecennium fratri constitit, etsi hic, de eodem olim interrogatus a D. Marchione Hospitalio, pro suo mea depretiandi studio veritatem dissimularit. Breviter Tibi aperio, quid sit: Notum est, quod probabilitas cujusvis eventus dependeat a numero casuum, quibus ille contingere aut non contingere possit; itaque ratio, cur ex. gr. sciamus, quanto sit probabilius, ut in duabus tesseris 7, quam 8 puncta cadant: nesciamus vero, quanto sit verisimilius, juvenem 20 annorum supervicturum seni sexagenario, quam hunc illi; haec unica est, quod cogniti nobis sint numeri casuum, quibus 7 et quibus 8 puncta in tesseris evenire possunt: ignoti vero numeri eorum, qui juveni prae sene, et huic prae illo mortem accersere valent. Hinc coepi cogitare, annon forte quod a priori nos latet, saltem nobis innotescere possit a posteriori, ex eventu in similibus exemplis multoties observato, puta hic, facto experimento in plurimis senum juvenumque binariis: nam si deprehenderem, millies verbi gr. contigisse, ut juvenis suo respective seni supervixerit, et quingenties tantum aliter accidisse, satis tuto colligere possem, duplo probabilius esse, ut juvenis seni supervivat quam ut hic illi. Quam

quam autem, quod mirabile est, etiam stupidissimus quisque nescio quo naturae instinctu per se et nulla praevia institutione norit, quod quo plures observationes fiunt, hoc minus a scopo aberrandi periculum sit; hoc ipsum tamen accurate et geometrice demonstrare minime vulgaris indaginis est. Sed neque hoc totum est, quod volo: quaerendum insuper est, an crescente numero observationum ita continuo crescat probabilitas, ut tandem data quavis probabilitate probabilius mihi fiat, me veram rationem inter numeros casuum, quam aliam a vera diversam, invenisse: an vero problema suam, ut sic dicam, habeat asymptoton, id est, an perveniam tandem ad aliquem probabilitatis gradum, ultra quem probabilius mihi fieri non possit, me veram rationem detexisse. Nam si hoc sit, actum erit de nostro conatu explorandi numeros casuum per experimenta: sin illud, aeque certo rationem illorum a posteriori indagabimus, atque si nobis a priori cognita esset. Et hoc quidem modo reperi se rem habere; unde jam determinare possum, quot observationes instituendae, ut centies, millies, decies millies etc. verisimilius (adeoque tandem ut moraliter certum) sit, rationem inter numeros casuum, quam hoc pacto obtineo, legitimam et genuinam esse; quod in usu vitae civilis sufficit, ad conjecturas nostras in quavis materia contingente non minus scientifice dirigendas atque in ludis aleae; in quo solo omnem Politici prudentiam consistere puto. Nescio, Vir Amplissime, an speculationibus istis soliditatis aliquid inesse Tibi videatur; quo casu gratum facies, si materias quasdam Juridicas mihi subministres, in quibus utiliter adhiberi posse arbitreris. Nuper in Menstruis Excerptis Hanoverae impressis citatum inveni Tractatum quendam mihi ignotum Pensionarii de Wit von Subtiler Ausrechnung des valoris der Leib-Renten. Fortasse is quaedam huc facientia habet; quod si sit, copiam ejus mihi alicunde fieri percuperem.

Nonnulli non infimae notae Theologi Reformatae nostrae Helvetiae in mandatis mihi dederunt, ut quaererem ex Te, cujus judicium consiliumque faciunt maximi, quid sentias de pace inter Protestantes utriusque communionis Lutheranos et Reformatos (Syncretismum vocant) attentanda; num illam ullatenus possibilem statuas, et quaenam media huic promovendae maxime conducere autumes.

Collega meus D. D. Zuingerus ante quadrimestre circiter Berolinum iter fecit, ut, quod ajunt, de Statione Medici in aula Regis

Borussiae sibi oblata, in locum D. Albini, qui Leidam evocatus fuit, cognosceret. Obstringes me non parum, si proxime certiorem me reddas, an vocationem hanc acceptarit, an recusarit; quod per amicos, quos ibi habes, rescire facile poteris. Rumor etiam fuit, Fratrem meum ad Professionem Mathematum in Academia Hallensi (alii addunt, et in Ultrajectina) vocatum aut vocandum esse. Si ipse vocationi locum dare nolit vel nequeat, credo Hermannum nostrum Spartam utramlibet non difficulter amplexurum, et praesertim etiam egregie exornaturum esse, si commendatione Tua efficere posses, ut ipsi offerretur.

Theses vel Positiones meas de Seriebus (quas in praecedentibus meis citavi) ni fallor jam habes. Sola Tibi deest pars 4ta, quam Tibi aliquando mittere possum, etsi nihil contineat Tuo adspectu dignum. Opus incepi, cui prius immoriar quam absolvero, ob respondentium inopiam, et materiae ubertatem. Vale et fave etc.

Basileae, 3. Octobris 1703.

XIII.

Leibniz an Jac. Bernoulli.

Gaudeo quod literae meae Tibi recte sunt redditae, sed magis quod valetudine uteris tolerabili. Eam nihil melius sustinet quam animus hilaris, pars magna laudabilis dietae. Cumque nihil desit ad commoditates vitae, et magna sit omnium intelligentium de Te existimatio, famaque parta perennis, quibus imprimis homines ducuntur, et merita insignia in Rempublicam, quod mihi potissimum videtur, omnia ad Deum communis boni maximum curatorem referenti, minuta illa incommoda liticulae quam refers, facile spernas. Talia non possunt nocere nobis, quam quantum illis ipsi potestatem in nos damus. Objectio avaritiae haud dubie inanis omnibus, sacrilegii etiam ridicula videretur. Ut solent talia plerumque abire utrinque vitilitigationes; quibus tandem finem impositum laetor.

Dn. Frater Tuus significaverat mihi se misisse Parisios problematum quorundam Catalogum, in quibus unum fuit: Omnes quadraturas ut $\int (v\,dx : z)$ revocare ad quadraturam Circuli aut Hy-

perbolae, posito v et z esse formulas rationales ex x. Et cum intellexisset a me missam ad Acta Lipsiensia Analysin omnium Quadraturarum rationalium, petiit suam quoque methodum addi, quam proprio marte reperisset. Feci quod petebat, adjunxique meo supplemento, sed simul notavi in eo diversum a via abiisse, quod putavit omnes quadraturas rationales pendere a quadratura Circuli et Hyperbolae, quod est secus, nam $\frac{1}{1+x}$ per quadraturam Hyperbolae, et $\frac{1}{1+xx}$ per quadraturam Circuli summantur quidem, sed $\frac{1}{1+x^4}$, $\frac{1}{1+x^8}$, $\frac{1}{1+x^{16}}$ etc. per binas istas summari non possunt. Nempe non omnes radices imaginariae, ut prima fronte videri possit, revocantur ad $\sqrt[2]{-1}$, nam $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[16]{-1}$, altioris sunt naturae, nec ab inferioribus pendent. Mihi autem haec antiquitus fuere discussa quadraturarumque rationalium analysis constituta, jam tum cum adhuc in Galliis agerem.

Grata mihi sunt quae de aequationibus $dy = (yy+xx)dx$ et $-z^e ddz = x^v dx dx$ scripsisti, tum quod per se pulchra sunt, tum quod mihi amplius his attentionem valde adhibere vix licet, etsi aliquando et ipse arteficiis sim usus, quae non sunt absimilia tuis.

Non despero omnes aequationes differentiales reduci posse ad quadraturas, imo interventu quadraturarum aequationes ulteriorum differentiarum reduci posse ad differentias citeriores. Sane si quis demonstrare posset hoc non licere, quod vix puto, novae etiam construendi artes quaerendae forent. Cum dico nil desperandum, facile judicas intelligi, nisi valida adsint argumenta impossibilitatis. Quod analogiam attinet inter $dz : z = x^v dx$ et $ddz : z = x^v dx dx$, verum est aequationes omnes $z^e dx = x^v dx$ solvi posse per quadraturas ordinarias excepto casu ubi $e = -1$, nec, quod addo, simul $v = -1$, et similiter $z^e ddz = x^v dx dx$ posse solvi per quadraturas ordinarias, excepto casu quo $e = -1$ nec simul $v = -2$. Sed ut tamen prior aequatio pendet a quadraturis transcendentibus, cum $e = -1$, ita et similiter, quantum ex analogia duci potest, nihil prohiberet, etiam posteriorem eo casu quo $e = -1$, a quadraturis transcendentibus pendere. Pro aequatione $dy : dx = yy + xx : aa$ valorem, in quo series seriem dividit, duxisti ni fallor ex aequ. $-ddz : z = xx dx dx$, et seriem

ubi valor simpliciter exprimitur, ex actuali in valore priore facta divisione ductam, ubi $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3.3.7}x^7 + \frac{2}{3.3.3.7.11}x^{11}$ etc. pari credo facilitate obtinuisses directe ex priore aequatione, faciendo $y = ax + bxx + cx^3$ etc. in aequatione hinc explicata quaerendo a, b, c, etc. per destructionem terminorum.

Dn. Jenischium vidi Berolini, ejusque placuit ingenium. Schediasma conscripserat de Paradoxis nostri Calculi infinitesimalis, et video nonnullos viros ingeniosos talia inde ducere, quae ἄδοξα potius censerem, ipsumque calculum damnandum, si fundamentis hujusmodi indigeret. Itaque ipsi ostendi, et in seriebus infinitis et in calculo nostro summarum et differentiarum non esse ratiocinationes extendendas ultra casus, in quibus res ad rigorosam demonstrationem reduci potest more veterum. Veteris enim methodi nostra non nisi contractio est, inventioni apta. Hinc pro infinitis et infinite parvis sumo utcunque magna et utcunque parva, et si sic error possit fieri dato minor, tuta est methodus. Librum de Calculo differentiali Societas Berolinensis Regia molitur nullum, neque quisquam fere Berolini est, qui in eo studio magnam hactenus operam posuerit. Et quis Te ac Dn. fratre tuo melius Calculi nostri arcana pleraque exponere possit, non video.

Venio ad difficultates Tuas circa Dynamicen meam. Equidem non est quod verearis retractare quae mihi concessisti, si nova argumenta occurrant. Putem tamen scrupulis Tuis non difficulter occurri posse. Corpora omnia universi puto Elastica esse, non quidem per se, sed ob fluida interlabentia, quae rursus tamen partibus Elasticis constant, atque ea res procedit in infinitum, nullaque sunt in corporibus ultima Elementa, quod aliunde satis demonstratum habeo. Vires mortuas seu in initiis motuum existentes esse in ratione composita celeritatum et molium, vel ex ipso meo principio constat, quia vires aestimo ex effectu violento, nempe in gravibus ex descensu; sed cum corpora colluctantur viribus mortuis, ut in libra, tunc descensus sunt ut celeritates, cum in viribus vivis descensus sint ut quadrata celeritatum. Experimentum quod allegas, nos turbare non debet. Possum in talibus sine jactantia usurpare illud Virgilianum: omnia praecepi atque animo mecum ante peregi. Sciendum est in omni corporum conflictu rem reduci ad vires mortuas, sive (si ita appellare malis) embryonatas, eo ipso quia Elastica sunt. Nam si concurrant corpora, unum 2 celeritate

ut 1, alterum 1 celeritate ut 2, vires suas invicem sibi adiment seu in Elastrum quo constant transferent non per saltum, sed per diminutiones infinitesimales, seu per vires embryonatas; ita re ad has redacta semper aequalem ambo perdent quantitatem motus sive reciprocam motibus celeritatem, atque ita ipsam vim totalem seu vivam simul amittent, in Elastrum translatam. Itaque hinc duo corpora in aequalium virium absolutarum, sed aequalium motus quantitatum se mutuo sistunt seu aequalem habent vim impeditivam. Et hoc non tantum fit, cum corpora illa concurrant interposito alio corpore duro vel saltem elastice resistente; idem ergo evenire debet, cum concurrunt interpositis librae lancibus, quae et ipsae sunt durae et elasticae. Verissimum est et a me quoque observatum, quod sive Elastica et dura sint corpora totalia, sive mollia, quae vim absorbeant, manere eundem progressum centri gravitatis; seu in Actis ni fallor loquebar, conservari vim directionum, et in eo multa adhuc elegantia latent. Caeterum neque id officit, neque caetera quae affers, quin simul et vires absolutae serventur. Nam cum mollia concurrunt, ex. gr. duae pilae aëreae aut ex terra molli, pars virium perditur non omnino quidem, sed respectu totorum: consumitur enim in particulis nec totis redditur. perinde ac si globi duri innumeri essent colligati in massam, ut si natarent in aliquo liquore vel vortice, talesque vortices bini concurrerent inter se. Bene notas, cum corpus oblique incurrit, majorem requiri vim, sed hujus ipsius rei lex ostendit vires vivas esse ut quadrata celeritatum, ut si globus A (fig. 18) tempore 12 celeritate ${}_1A{}_2A$ incurrat in globos B, C, aequales ipsi et quiescentes eodem tempore 12, idque fiat ita ut centra omnium faciant in concursu triangulum rectangulum isosceles, centro ipsius A', nempe ${}_2A$ cadente in angulum rectum, tunc post ictum quiescet A tempore 23 quod aequale sit tempori 12, unde ${}_2A$ et ${}_3A$ coincidunt, et eodem tempore 23 B ibit ex ${}_1B$ vel ${}_2B$ in ${}_3B$, celeritate ${}_2B{}_3B$, et similiter C ex ${}_1C$ vel ${}_2C$ in ${}_3C$ celeritate ${}_2C{}_3C$. His positis erunt motus ${}_2B$ ${}_3B$ et ${}_2C{}_3C$ in lateribus quadrati, in cujus diagonali perrexisset A eodem tempore 23 si obstaculum non invenisset, eruntque ob aequalitatem trium corporum quadrata celeritatum post ictum, aequalia quadrato celeritatis ante ictum, nam quadrata laterum aequantur quadrato diagonalis. Itaque ipsae obliquitatis leges nostris regulis consentaneae sunt. Neque unquam sat scio vel exemplum vel rationem reperiemus, quae principiis nostris obstare possit.

Argumentum meum ex altiori fonte ductum non pro merito expendisse videris. Metaphysica non minus evidentia sunt quam mathematica, si recte tractentur. Quod de Effectu objicis, ad litem nominis redit neque quicquam in ratiocinatione immutat. Si corpus aliquod motu uniformi moveatur, nomine effectus dico a me intelligi factum ex mole corporis et longitudine lineae. Quidni hoc mihi liceat? Cum vero plus adhuc insit motui, nec tantum referat quid efficiatur, sed et quam promte; seu non tantum quantum corpus per quantam lineam transmittatur, sed et qua celeritate; hinc quod aestimo conjunctis tribus omnibus adeoque conjuncto effectu (qui duo comprehendit) et promptitudine, id voco ipsam actionem, quippe in qua nihil quod aestimationem faciet, ulterius considerandum occurrit. Porro vim definio id cujus exercitio seu duratione fit completum istud seu actio, adeo ut actio fiat vi tantum ducta in tempus. His definitionibus adhibitis seu hoc sensu verborum supposito (in quibus nihil est quod non cum mathematicis evidentia certet) efficitur a priori nullo gravitatis aut Elastri aut alterius physici non explorati interventu Theorema illud magnum: Vires esse ut quadrata celeritatum; quod tum experimentis, tum et ratiocinationibus ex hypothesi gravium et elasticorum deinde pulcherrime confirmatur. Quod si (tibi dicto audiens) facerem actiones ut effectus, post tales definitiones positas, contradicerem ipse mihi. Itaque oportet Te valde festinasse in hoc ratiocinio expendendo, haud dubie quod praejudicio quodam jam esset praedamnatum Tibi. Caeterum hic vides de effectu formali sermonem esse, seu qui motui est essentialis qui totam actionis aestimationem minime absolvit. At secus esset in Effectu physico, qualis est ascensus gravis in datam altitudinem, ubi scilicet vis se agendo consumit; tunc enim vires totae per effectum aestimari possunt. Et vel ideo mihi ipse hac demonstratione placeo, quod vix alias in istis *μεταφυσικωτέροις* aliquid praestitum est *ἀκριβείᾳ* successuque Mathematicorum.

Utilissima est aestimatio probabilitatum, quanquam in exemplis juridicis politicisque plerumque non tam subtili calculo opus est, quam accurata omnium circumstantiarum enumeratione. Haec a Te tractata non primum a Dno. Fratre Tuo, sed aliunde me discere memini. Cum Empirice aestimamus probabilitates per experimenta successuum, quaeris an ea via tandem aestimatio perfecta obtineri possit. Idque a Te repertum scribis. Difficultas in eo mihi inesse

videtur, quod contingentia seu quae ab infinitis pendent circumstantiis, per finita experimenta determinari non possunt; natura quidem suas habet consuetudines, natas ex reditu causarum, sed non nisi ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ. Itaque quis dicet, an sequens experimentum non discessurum sit nonnihil a lege omnium praecedentium? ob ipsas rerum mutabilitates. Novi morbi inundant subinde humanum genus, quodsi ergo de mortibus quotcunque experimenta feceris, non ideo naturae rerum limites posuisti, ut pro futuro variare non possit. Cum ex aliquo observationum numero indagamus lineam cometae, supponimus eam esse ex conicarum aut alio faciliorum genere. Datis quotcunque punctis inveniri possunt lineae infinitae per ipsa transientes. Quod sic demonstro: Postulo (quod demonstrari potest) datis quotcunque punctis inveniri posse lineam aliquam regularem, per ipsa transeuntem. Inventa illa esse ponatur et sit A. Sumatur jam aliud punctum inter data, sed extra hanc lineam; et per puncta initio data et punctum novum transeat linea, quod fieri potest per idem postulatum: hanc necesse est esse diversam a priori, at tamen per eadem transire puncta data, per quae prior. Et cum punctum infinities variari possit, etiam aliae atque aliae in infinitum lineae erunt possibiles. His autem punctis comparari possunt casus observati et lineae regulari regulae seu aestimationes ex casibus ducendae. Etsi autem empirice non posset haberi perfecta aestimatio, non ideo minus empirica aestimatio in praxi utilis et sufficiens foret. Qui menstrua excerpta Germanica Hanoverae conscribebat, apud me fuit. Pensionarii de Wit libellus exiguus est, ubi aestimatione illa nota utitur a possibilitate casuum aequalium aequali et hinc ostendit reditus ad vitam sufficientes pro sorte a Batavis solvi. Ideo Belgice scripserat, ut aequitas in vulgus appareret.

P. S. 3 Decembr. 1703.

Oblitus sum notare supra, Te et Dn. fratrem Tuum ita loqui ac si solutio problematum differentialium consisteret in separatione indeterminatarum, sed vides ex hoc ipso exemplo, cum quaeritur $ddz : z = xxdxdx : a^4$ quod est adeo simplex, eam non sufficere, quanto minus in aequationibus compositis. Optatam quidem vocas talem aequationem, sed vero notavi dudum in omni differentiali cujuscunque gradus nullo negotio posse obtineri hanc separationem seu semper posse obtineri valorem ipsius dx vel ddx vel d^3x etc. olius per solas a, y, dy, ddy etc. ne mutando quidem indeter-

minatas. Exempli causâ in aequatione Tangentiali (seu differentiali primi gradus) $dy : dx = xx + yy, : aa$ ad hanc formam redacta $x = \sqrt{,}\, aadxdy - yydx,, : dx$ et differentiata, restat sola dx ex affectionibus ipsius x, quia ddx et d^3x etc. ponuntur aequales nihilo; et ita habetur dx per a, y, dy, ddy. Sed non ideo res redacta est ad quadraturas neque observatur quadratoria, ut sic dicam, homogeneitas. Eadem opera haberi plane potest relatio inter ipsos y, dy, ddy, d^3y etc: sine interventu ipsius x vel dx. Nam si aequatio $dx =$ valori per a, y, dy, ddy, evanescet dx et habebitur aequatio, in qua dabitur relatio inter a, y, dy, ddy, d^3y; ex quo aliquo modo intelligitur quae sit relatio ipsarum y, posito progressionem ipsarum x esse uniformem seu ddx esse $= 0$. Sed si hinc posset duci lex progressionis simplicioris, posset ejus ope perveniri ad quadraturas. In formulis quadratorie heterogeneis ea imperfectio est, quod ut plurimum summatio universalis institui non potest, quod tamen fit in quadratorie homogeneis, ubi summatio quae assumta una lege progressionis succedit, etiam succedit assumta alia quacunque v. g. $\int x\,dx$ fit $= \frac{1}{2}xx$, sive x procedant progressione Geometrica sive Arithmetica sive alia quacunque, quod non habet locum, si velimus quaerere $\int x\,ddx$ vel $\int dx\,dx$. Etsi res succedat, si velimus summare $x\,ddx + dx\,dx$ simul, ubi summa fit $x\,dx$.

Quantum Berolino intelligo, Celeberrimus Zwingerus conditionem medici regii non accepit, sed dicitur deferenda Dno. Gundelheimio, quicum Dno. Turnefort missu regis Christianissimi in Orientem profectus fuerat.

Ab aliquot annis actum est Berolini et alibi de Protestantium Reunione et mecum quoque a doctis utriusque partis viris communicatum; apparetque non omnem spem abesse, si res dextre instituatur, bonaque consilia locum habeant nec supervacaneo adiaphororum studio animi turbentur. Circa praedestinationis negotium vix mihi videtur superesse difficultas; modo evitentur quae attributis divinis justitiae, sapientiae, sanctitati praejudicium creare videri possent agnoscaturque omnia Deum juste agere, non modo quia summe est potens, sed et quia summe sapiens bonusque, ita ut statuendum sit nihil fieri posse melius quam quod facit, etsi

nobis in totam rerum harmoniam non admissis id apparere non possit. Hoc constituto quaestiones de absoluto vel conditionali decreto, gratiaque universali aut particulari partim philosophicae partim verbales videntur. Turbat adhuc nonnihil controversia, utrum solis electis vera fides et justificatio competat; in quo optem quorundam ex vestris exemplo caeteros quoque paulo accommodatius loqui. Meo judicio lites de coena Domini, quae debet esse vinculum caritatis, non debere talere schisma infelix; sunt tamen quidam in ea re rigidiores, quos molliri posse non desperem. Sed vestrorum Theologorum quos meam opinionem expetere ais (plus ut apparet mihi tribuentes quam agnoscere audeam) sententiam potius nosse optem.

XIV.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Tuis 26 Novbr. anni praeteriti ad me exaratis tardius respondeo, tum ad varia negotia quibus hucusque distractus fui, tum etiam ob affectum podagricum, qui aliquamdiu misere me lancinavit. Nempe volebam usu vini rubri optimi (quamvis modico) phlegma quo cerebrum quoque repletum sentiebam desiccare, sed pessimo eventu; vixdum enim per paucos dies continuaveram, cum dolores arthritici (quibus et nephritici quid admixtum erat) denuo et repente omnes meos artus ipsumque etiam cranium (rarissimo podagricorum exemplo) invaderent: quem adeo manifestum vini effectum persentiscens, ejus usu penitus me interdicere cepi; sicque jam a trimestri et amplius optime valeo et optime digero, contra Medicorum praesagium, qui potu solius aquae stomachum nimis iri debilitatum praedixerant.

Vidi nuper optato in Actis Lips. anni praeteriti mens. Jan. supplementum Tuum quadraturarum una cum methodo Fratris, quem Tu recte redarguis, quod asseruerit omnes quadraturas rationales pendere a quadratura circuli aut hyberbolae: et miror ipsum adeo sibi confisum esse, ut asserti sui veritatem in tam simplici formula, qualis est $\frac{dx}{1+x^4}$, examinare non sustinuerit. Sed

praeterea et illud notavi, quod Frater partem inventi tantum dederit facillimam, fundatam in proprietate fractionum, qua additae et multiplicatae fiunt cognomines; non dederit autem praecipuam, quam Tu adjecisti, nempe rationem progressionis in numeratoribus, quam ego longe maximi facio.

De Inventione serierum, quas dedi pro aequatione $dy:dx = yy + xx:aa$, recte conjecisti; sed cum putas, omnes aequationes differentiales altiorum graduum posse reduci ad quadraturas, me certe Tibi non habes ὁμοψηφον. Si enim dantur Curvae, quarum coordinatae non habent relationem algebraice exprimibilem, sed tantum coordinatarum elementa: cur non darentur tales, ubi nec ordinatae nec harum elementa, sed tantum elementorum elementa ejusmodi rationem habeant? Confirmor in suspicione ex eo, quod quemadmodum $dz:z = x^{v} dx$ nullo modo a quoquam ad algebraicam reduci potuit, ita nec $ddz:z = x^{v} dx^{2}$ ullo adhibito conatu ad simpliciter differentialem reducere potuerim. Neque metuendum nobis est, ne ita statuendo nimis feracem faciamus naturam in variandis suis effectis, cum delusos nos sentiamus, quotiescunque ipsi limites figere voluerimus. Si quando solutionem Problematum differentialium consistere dixi in separatione indeterminatarum, utique hoc de primi tantum gradus differentialibus affirmare volui. Caeterum et mihi jamdudum innotuit, quod altera indeterminatarum semper eliminari possit, h. e. quod dari possint aequationes locales, quas una tantum indeterminatarum literarum ingrediatur.

Ad ea, quae pro Tuis Dynamicis stabiliendis tam prolixe disseruisti, nescio quid dicam, nec habeo vel quae reponam vel quibus convincar: sunt enim ita concepta, ut dubitem a me satis intelligi. Interim vides, nobis in conclusionibus per omnia convenire, quod fieri non posset, si in principiis esset dissensus: puto ergo pugnam nostram in mera versari logomachia, quae ultro evanesceret, si alter alteri intelligeremur.

Quod Doctrina de probabilitatibus aestimandis in materiis juridicis non sola circumstantiarum enumeratione, sed eodem illo ratiocinio et calculo indigeat, quo alias in sortibus aleatorum computandis uti solemus, docent me variae quaestiones de Assecurationibus, de Reditibus ad vitam, de Pactis dotalibus, de Praesumptionibus, aliaeque; quemadmodum suo tempore liquido ostendam. Difficultas autem Tua contra modum meum Empiricum determinandi

rationem inter numeros casuum, non magis urget illa exempla, in quibus de numeris istis aliunde constare nequit, quam illa, in quibus etiam a priori cognosci possunt. Dixi autem, in istis me posse demonstrare; viditque demonstrationem jam ante duodecennium Frater et approbavit. Ut vero clarius comprehendas quid velim, do Tibi exemplum: Pono in urna quadam reconditos esse calculos aliquot, albos et nigros, et numerum alborum esse duplum numeri nigrorum, Te autem nescire hanc rationem, et experimentis illam determinare velle. Educis itaque calculum unum post alterum (reponendo singulis vicibus illum quem eduxisti, priusquam sequentem eligis, ne numerus calculorum in urna minuatur) et observas, albus an ater sit quem elegisti. Dico jam, quod (assumtis duabus rationibus rationi duplae quantumvis propinquis, una majore, minore altera, puta 201 : 100 et 199 : 100) scientifice determino numerum observationum, quem si instituas, decies aut centies aut millies etc. probabilius tibi fiat, rationem numeri vicium, quibus album eligis, ad numerum vicium, quibus eligis nigrum, intra quam extra hos limites rationis duplae 201 : 100 et 199 : 100 casuram; adeo ut tandem moraliter certus esse possis, rationem per experimenta deprehensam verae rationi duplae quantumvis proxime accessuram. Quod si nunc loco urnae substituas corpus humanum senis aut juvenis, quod fomitem morborum inter se velut urna calculos continet, poteris eodem modo determinare per observationes, quanto ille quam iste morti sit vicinior. Neque prodest dicere, numerum morborum, quibus uterque expositus est, esse infinitum; demus enim hoc; notum tamen est, et in infinito dari gradus, et rationem unius, infiniti ad aliud infinitum etiam numeris finitis, aut praecise aut quantum ad praxin sufficit, exprimi posse. Si morbi tractu temporis multiplicentur, novae tum utique observationes forent instituendae: et certum est, illum qui vellet ex hodiernis observationibus Londini, Parisiis alibique institui solitis de termino vitae Patrum antediluvianorum judicare, a veritate enormiter aberraturum esse. Exemplum de Trajectoria Cometae indaganda ex aliquot observatis ejus locis, fere hic est *ἀπροσδιόνυσον*; neque unquam illo uterer ad ostendendum propositum: quanquam et debito modo applicatum mihi non adversetur, cum negari non possit, quod observatis quinque punctis, quae omnia deprehendantur esse in Parabola, suspicio Parabolae jam major sit futura, quam si 4 tantum puncta fuissent observata: etsi enim infinitae sint il-

neae, quae per illa 5 puncta transeunt, praeter tamen has infinitas infinitae, imo infinities infinite sunt aliae, quae per sola 4 priora, non vero per 5^{tum} punctum transeunt, quaeque adeo omnes per 5^{tam} observationem excluduntur. Fateor tamen omnem conjecturam, quae ex ejusmodi observatis deducitur, admodum levem et lubricam fore, nisi jam pro concesso sumatur, lineam quaesitam esse unam ex genere simpliciorum curvarum; quod equidem mihi admodum veresimile fit, cum naturam ubique vias simplicissimas assectari videamus. Percipio ex Tua descriptione, Tractatum Belgicum Johannis de Wit talia continere, quae scopo meo apprime inserviunt. Rogo itaque Te quam maxime, Vir Amplissime, ut Tuum Libri exemplum qua poteris occasione mihi commodato transmittas, quandoquidem cum Amstelodami frustra perquireudum curavi. Remittam illum fideliter in proximis nundinis Francofurtensibus, una cum 4ta et 5ta parte Positionum mearum de Seriebus infinitis, quarum haec novissime impressa et ventilata fuit.

Frater meus Groningae febri ardente correptus lethaliter decumbit. Frequens delirium et lipothymia quibus infestatur, nos de vita ejus magnopere anxios et sollicitos reddunt; quanquam undecimus jam fuerit morbi dies, quo literae postremae Groninganae ad nos fuerunt exaratae.

Vale et favere perge etc.

Basileae 20 Aprilis 1704.

P. S. Hac hora inspiciendum mihi offertur magnum volumen in quarto, cui titulus: Nova Crisis temporum (oder Curiöser Philosophischer Zeitvertreiber) in quo Auctor Dethlevus Cluverdus confusum chaos miscuit plurimarum rerum, atque in geometricis antiqua sua somnia de structura mundi, de quadraturis planetariis etc. recoquit, meque etiam, quem Auctorem credit libelli ab Hermanno nostro Considerationibus Nieuwentitianis oppositi, hinc inde perstringit: sed nondum assequor quid velit, adeo mystice et cryptice dicta sunt omnia. Obsecro, Vir Amplissime, num Tu hominem intelligis? Ego certe nunc revera credo, illum *ἀρρωστίᾳ τῆς διανοίας* laborare. Nuper quoque insperato literas accepi a D. Joh. Ott, Med. D. Scaphus. in quibus judicium meum perquirit de methodo quadam sua rectificandi quadrandique omnes curvas et omnia spatia; at ego nihil tale sequi video ex iis, quae bina vice prolixe ad me perscripsit: miror vero, numquid Tibi horum olim aperuerit: quandoquidem ea jam ab anno 1659 sibi cognita esse scribit.

XV.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Cum in procinctu sim proficiscendi in Thermas Badenses, nolui differere responsum ad binas Tuas, quarum alteras per D. Hottingerum mihi perferendas curasti. De Fratre meo nil novi, nisi quod cum pristina sanitate pristinum in me animum resumere videtur; in litteris enim ad Hermannum nostrum subinde mihi molestus esse pergit, mentionem debiti nescio cujus injiciendo: vellem hunc tandem concederet, Professionis Graecae a Proceribus nostris sibi demandatae auspicia facturus, ut causam hic nostram coram judice forensi agere, et uter alteri in aere sit discutere possimus. Nuper Wallisio, Huddenio et Hospitalio quos recenses, ac praeterea Sturmio, parentatum vidi in Actis Lips. mirorque in iis praeteritum Vivianum. Nihil ab hoc Auctore scriptum conspexi, ne quidem ejus Exercitationes de Maximis et Minimis. Luce dignum esset illius opus de Locis, siquidem et Loca Linearia seu sectionibus Conicis altiora tractaret; alias vix quicquam novi continere posse puto. Ejus observationes de aquis fluentibus fortasse non differunt ab his, quae ejus haud dubie Discipulus Guilielminus de hac materia jam evulgavit. Huddenio Tractatus quidam Mechanices mihi ignotus tribuitur in Mercurio Historico-Politico; ut et inventio cujusdam Machinae, qua canales Amstelodamenses eadem opera aquis foetentibus repurgari et puris adimpleri soleant. Structuram Machinae utilissimae nosse peroptarem, quia Viri ingenium maximi facio.

De Reductione Problematum differentialium ad Quadraturas, de separatione indeterminatarum etc. nolo disputare ulterius, sed rem in medio relinquo; nemo enim me lubentius de iis rebus tacet, in quibus certitudinem assequi nequimus. Unum hic subit occasione summationis differentialium, quod liceat ex Te percontari: nempe an aliquod Tibi notum sit exemplum Producti ex elemento indeterminatae et quantitate rationali quotcunque terminorum multiplicata vel divisa per radicem qualemcunque quantitatis alterius rationalis quotlibet etiam terminorum (talisque ut exponentes potestatum indeterminatae ubique sint integri et positivi, sed exponens maximus in vinculo plus quam unitate super et maximum extra vinculum) quod absolute summari possit. Nam si nullum tale detur exemplum, puto me aliquid praestitisse exhibendo universalem Canonem, quo

ejusmodi differentialia, quae maximum exponentem in vinculo vel minorem vel non plus quam unitate majorem habent maximo exponente extra vinculum, aut absolute summantur, si summabilia sunt, aut saltem reducuntur ad talia, ubi exponens in vinculo plus quam unitate superat exponentem extra. Intelligo autem quantitatem quoad fieri potuit vinculo liberatam; nam ex. gr. summationem recipit quantitas $x\,x\,d\,x\sqrt{a\,a\,x\,x + x^4}$, etiamsi exponens in vinculo binario superet exponentem extra, quoniam reducitur ad $x^3 d\,x\sqrt{a\,a + x\,x}$.

Accipiam brevi ab Abbate Varignonio duo exemplaria Historiae Academiae Scientiarum pro anno 1701, Tibi Fratrique mittenda: Tuo adjungi curabo quartam quintamque partem Positionum mearum de Seriebus Infinitis; exspectans vicissim his nundinis a Te scriptum Pensionarii de Wit, cui utinam adjungere posses quae de Conditionibus olim scripsisti. Velim etiam exemplum aliquod legati conditionalis mihi suppedites; quid item per reditus qui constituuntur in plures vitas intelligas, exemplo declares; nam studio Juridico nunquam ego animum ex professo applicui. Rationem inter numeros morborum etsi infinitos determinare possumus finitis experimentis non praecise, sed quantum ad praxin sufficit accedendo subinde propius donec error insensibilis fiat; quod vel in ipsa Geometria vulgare est, sic ratio diametri ad circumferentiam, etsi accurate determinari non possit nisi per numeros Cyclicos Ludolphi in infinitum continuatos, ab Archimede tamen limitibus ad usum sufficienter constrictis 7 : 22 et 71 : 223 definitur. Specimen artis conjecturandi exhibeo in aliquot ludis aleae, praesertim in ludo pilae reticularis, quo de prolixe tracto; sed in plerisque chartarum ludis non succedit, multo minus in latrunculorum ludo, ob immensam complexionum varietatem, quam repetiti calculorum jactus recipere possunt. D. Cluveri librum, qua fui patientia, totum perlegi, sed nihilo doctior redii ab ejus lectione, ut fateri cogar me tempus meum nunquam pejus collocasse. Asserit alicubi, se ad ultimas meas per Te acceptas responsum eadem mihi via remisisse, non memini autem, me quicquam a Te accepisse, uti nec a D. Ottio ullas accepi, ex quo ipsi rectificationem suam Parabolae erroneam esse ostendi. D. Fatzius Angliam quantum scio jamdudum repetiit. Frater ejus natu major et ipse Geometra insignis, nuper cum Hermanno nostro communicavit ingeniosum ipsius inventum de Transmutatione seriei tuae Cyclicae $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ etc. quae terminos habet alternatim

affirmativos et negativos, in hanc aliam pure affirmativam $\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}$ $+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{4}{5.7.9}+\frac{4.5}{5.7.9.11}+\frac{4.5.6.}{5.7.9.11.13}$ etc. quae celerrime convergit, utpote in qua terminus quilibet minor est quam subduplus praecedentis, addiditque, quod sibi constitutum sit proximam hyemem impendere in provehendis seriei hujus ope numeris Ludolphinis ad centum usque notas, quare suasor fui Hermanno, ut sese socium laboris ipsi adjungeret, quo communicatis utrinque calculis de operationis probitate eo certius constaret, quod hic etiam se suscepturum promisit. Vale, Vir Amplissime, et fave etc.

Basileae 2 Augusti a°. 1704.

XVI.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Quoniam ex ultimis Tuis intelligo, responsum meum ad praecedentes Tibi traditum non esse, copiam ejus hic transmitto. Quae D. Hermannum concernunt, ad ea Tibi respondebit ipse. Expectabam a Te his nundinis Tractatum Tuum D. de Wit, sed frustra. Eum fortasse D. Menkenius tempore nundinarum Lipsiensium per mercatores huc curare poterit. Historiam Academiae Scient. nondum, quod miror, Parisiis accepi. R. P. Lelong, Oratorii sacerdos, catalogum quendam Librorum pro Te mihi proxime submittet Historiae huic adjungendum. Cum utrumque accepero, qua primum occasione potero, Hanoveram curabo. Vale.

Basileae 15 Novembr. 1704.

XVII.

Leibniz an Jac. Bernoulli.

Gratissimas Tuas recte, etsi paulo serius, accepi, cum jam diu abfuerim domo. Interea ad Te scripseram cl. Hermanni causa, cui offertur Mathematica apud Patavinos cathedra. Utriusque vestrum responsionem accepi, Tuam breviculam, ipsius fusiorem, sed tanquam conditionem declinantis, religionis causa. Malui tamen apud

Venetos dissimulare sententiam viri, ut amplius ei deliberandi spatium darem, praesertim, cum me hortante scripsisset ad eum doctissimus Naudaeus noster, cui responsionem adhuc debebat. Nec mè poenituit morae, nam posteriores cogitationes secutus huic demum significavit: amicis prudentibus visum, posse illic officio vacari nullo conscientiae detrimento, nec contemnendo in publicum fructu.

Nollem suadere Dno. Fratri Tuo, ut professionem Graecae linguae apud vos acciperet; ita enim a rebus mathematicis non parum distraheretur. Caeterum non dubito, fraterno vos invicem animo fore, ut decet viros scientiarum cultu celebres; ubique paene primas violare humanitatis leges, quae tam propinquos colligat, mali res exempli foret.

Huddenii Tractatus Mechanicus mihi est ignotus. De machina aliquid audivi, sed vagum et obscurum.

Pensionarii Wittii dissertatio, vel potius Scheda impressa de reditibus ad vitam, sane brevis, extat quidem inter chartas meas, sed cum ad Te mittere vellem, reperire nondum potui. Dabo tamen operam ut nanciscare, ubi primum domi eruere licebit alicubi latitantem. Caeterum nihil continet, quod Tibi possit esse valde novum. Mea de conditionibus dissertatio duplex Academica Lipsiae impressa est anno, si bene memini, 1665. Biennio post reformata cum aliis quibusdam meditatiunculis meis juridicis recusa est Noribergae, ubi reliqueram Altorfio digrediens in peregrinationes, sed exemplaria ita evanuere, ut aegre unum postea in Germaniam redux casu impetrarim ab amico. Cogito de nova aliquando procuranda editione.

Non dubito, quin Tibi facile sit Canones quosdam summationum absolutarum aut reductionum pro non absolutis fabricare. Sed non video, cur desideres rem eo reducere, ut exponens in vinculo plusquam unitate superet exponentem extra, cum malim ego exponentem in vinculo esse quam minimum. Exempla quale postulas, etiamsi forte mihi affuissent aliquando, an semper putas esse in numerato quodvis aliud potius jam dudum agitanti? Talium plus est in meis schedis quam in mea mente. Interim si differentietur formula $x^e + cx_f, \sqrt{(am + bx^r)}$ prodit (ni fallor) calculanti dum haec scribo et parentheses pro vinculis adhibenti

$$dx, \frac{\left.\begin{array}{c}(2am + 2bx^r)\,(ex^{e-1} + cfx^{f-1}) \\ brx^{r-1}\,(x^e + cx^f)\end{array}\right\} \sqrt{(am + bx^r)}}{2am + 2bx^r}$$

unde cum pateat effici licere, ut $x^e + cx^f$ dividi possit exacte per $am + bx^r$, quoniam numeri e, f, r sunt a se invicem independentes, quemadmodum et m, b, c (quod magis etiam variare liceret, si pro $x^e + cx^f$ adhiberemus $x^e + cx^f + gx^h$ aut etiam formulam magis compositam) consequens est, facta divisione habitum iri formulam exacte summabilem carentem indeterminata in fractione, ubi irrationalis dicta multiplicatur per quantitatem rationalem integram et ubi nihil prohibet maximum exponentem ipsius x intra vinculum esse unitate majorem exponente extra vinculum. Sed fortasse non satis mentem Tuam intelligo et (fateor) in talia incumbere nunc non vacat malimque ea a Te discere, quam Tecum contendere, uter prius observarit.

In quibusdam non satis colligatis (pro nostro scilicet captu) certum non est, aucto datorum numero veluti novis annis ad observationes morborum accedentibus nos propius accedere ad veritatem mediam in universum, etsi prudentia rem ita accipi jubeat, sed in serie, qualis Ludolphina, continuando semper acceditur. In Ludis sive purae rationis (velut scaccorum et aggerum) sive semifortuitis, ut chartularum quem h o m i n i s vocant Hispani (hombre) vel aleae quem nostri conversionis appellant (Verkehren) etsi non sit facile definire calculo, q u a n t o unum eligendorum altero sit ad spem victoriae convenientius, plerumque tamen definiri potest ratione u t r u m sit convenientius quantum licet judicare fas est ex datis. Unde videmus lusores ingeniosos propemodum ut in re militari aut medica, quid sit melius decernere, usos considerationibus magis multiplicibus quam profundis, quod ipsum quoque est artis.

Si quid Dn. Cluverius mihi pro Te olim misit (quod an ita sit, dicere non possum) haud dubie ad Te destinavi.

Non suaserim Dn. Hermanno nostro, ut tempus terat Ludolphinis calculis extendendis, etsi placeat Faciana series, quae quomodo ex mea deducta sit nosse velim. Malim adhibita mea Arithmetica Dyadica, ubi omnia scribuntur per 0 et 1, inveniri regulam generalem qua appareat, quomodo Magnitudo circumferentiae vel aliae quantitates Transcendentes determinatae exprimi possint per seriem infinitam integrorum vel quasi integrorum numerorum id est (pro decimalibus) bimalium, quemadmodum si regula haberetur, qua series Ludolphina semper continuari posset. Scripsi ea de re ad Dn. Hermannum, nec puto ullam esse Methodum meliorem pro expres-

0	0	sione quantitatum determinatarum. Hac enim scri-
1	1	bendi ratione omnes series omnium potentiarum ha-
10	2	bent periodos columnarum, quales vides habere natura-
11	3	lium seriem, ubi periodus primae columnae est 01,
100	4	secundae 0011, tertiae 00001111, etc.
101	5	Guilielminum Viviani discipulum fuisse non puto, nec
110	6	sua de aquis decurrentibus ab ipso hausisse. Liber hujus
111	7	de Locis non est malus; sed nullus Veterum commentator
1000	8	aut imitator circa Loca mihi hactenus satisfecit. Vale.

Berolini 28 Novembr. 1704.

XVIII.
Jac. Bernoulli an Leibniz.

Differre volui responsum meum, donec certiorem Te reddere possem receptionis tum Catalogi Patris Le Long, tum et Librorum, quos cum Icone Sereniss. Electoris vestri defuncti D. Brousseau ad me mittere debebat: sed frustra hucusque exspectavi, haud dubie quod illos directa ad Te via curabunt, patente nunc iterum, ut opinor, libero mercium commeatu. Si quid tamen etiamnum pro Te accipiam, certus esto, me sine mora Augustam curaturum, quo mittendi hic frequens occasio se offert. Historiam Academiae Scientiarum Parisinae una cum inclusis 4ta quintaque Parte Positionum de Seriebus ab ipso pariter D. Varignonio immediate accipies, nisi forte jam accepisti. D. Wittii Tractatum mihi vicissim mittere quaeso memento, si quando interea in manus Tuas inciderit; quaecunque enim continet, mihi non possunt non esse plane nova; quemadmodum etiam Tua, quaecunque unquam publicasti, mihi semper peroptabilia erunt, si quorundam me compotem reddere digneris; nihil eorum habeo praeter Artem Combinatoriam et Hypothesin novam Physicam.

Quae Dnum. Hermannum concernunt ejusque vocationem Patavinam, ex ipso haud dubie plenius rescisces. Agitata fuerunt inter Marpurgenses consilia de eodem in locum D. Papini, qui nunc Cassellis in aula degit, surrogando: sed ipse Patavium praeferre videtur, Tui praesertim, ut ait, Tuique calculi gratia quem etiam in Italia notum facere gestit. Accepit nuper a Cl. Fardella literas humanitatis plenissimas, et nunc alteras exspectat, quibus de decreto sibi

salario certior reddatur; ita ut non dubitem amplius, quin ista res successum sit habitura. Nunc illi certe nec ipse suaserim, ut superfluis calculis tempus terat, quando praeter linguae Hetruscae studium, cui jam totus incumbit, mox alia ipsum negotia manebunt. Artificium commutandi seriem Tuam in Facianam leviculum est, et consistit in sola additione continua primi et secundi, secundi et tertii, tertii et quarti etc. termini, prout uberius Tibi ab ipso Hermanno explicitum esse credo. Unum hoc addo, quod ejusdem artificioli ope series hyperbolica $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$ etc. convertatur in hanc $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.8}+\frac{1}{4.16}+\frac{1}{5.32}+\frac{1}{6.64}+$etc. quae eadem mihi ex alio fundamento se obtulerat (vid. Prop. LIX de Seriebus) et in qua per 18 primos terminos tantundem approximatur, quantum per mille terminos alterius.

De mysterio Arithmeticae Tuae Dyadicae (quam video esse supplementum Tetractys Weigelianae) nihil adhuc mihi innotuerat; ex iis autem, quae de illa refers, non apparet sequi quod intendis; nam et in serie numerorum naturalium Arithmeticae Decadicae periodis locus est, in altioribus autem potentiis et quantitatibus praesertim transcendentibus nec in Dyadica nec in Decadica ejusmodi perioda obtinere puto. Vides enim in serie hac quadratorum dyadice

0	0
1	1
100	4
1001	9
10000	16
11001	25
100100	36
110001	49
1000000	64
1010001	81
1100100	100
1111001	121
10010000	144
10101001	169
11000100	196
11100001	225
100000000	256
etc.	etc.

expressa, periodum quidem primae columnae esse 01; secundam columnam constare meris cifris, periodum tertiae esse 1000, in caeteris vero columnis nullas tales periodos haberi, aut (si habeantur) saltem nullas periodorum periodos observari. Quid multis? Numerum illum Ludolphinum 36 notarum 3,1415 etc. qui circumferentiam circuli refert, existente diametro 1, cum 35 cifris dyadice sic exprimendum invenio:

1111001000000010011111110110011000110110110110011000 0100
1111001001011001010110110110101000110111001010100000000
111101000^{1}_{0}, ubi exponentes vicium, quibus eadem nota (1 vel 0) continue repetitur, hoc ordine progrediuntur:

42161261222321212122241242121122111212121111321321111174114:

at nulla hic apparet notarum periodus, nec ulla progressionis lex, non magis quam in ipsis Ludolfii numeris 3,1415 etc. quare et in aliis parum hoc pacto nos consequi posse sperandum.

Ex iis, quae contra Canonem meum Summationum movisti, Vir Amplissime, video me Tibi non satis intelligi; idcirco mentem meam exemplo declaro: Sit integrandum differentiale $\overline{ax^5+bx^4+cx^3+exx+fx+g}$, $dx\sqrt[3]{hx^3+ixx+kx+l}$. Dico, me illud ope Canonis mei statim reducturum ad $\overline{qx^3+rxx+sx+t}\,\sqrt[3]{hx^3+ixx+kx+l}^{\,4}$, aut saltem ad hanc quantitatem, auctam minutamve quantitate $\int\overline{\overline{mx+n},\, dx\sqrt[3]{hx^3+ixx+kx+l}}$, in qua exponens maximus extra vinculum plus quam unitate superetur a maximo intra: unde patet, si quantitates ejusmodi non possunt absolute summari, me praestitisse quodcunque praestari poterat; at si inter infinitas vel una summata sit, me Canone meo nihil admodum profecisse, cum semper verendum esset, ne et ista summationem admitteret. Valde itaque scire cuperem, num ullum detur exemplum talis summationis, quale fortasse Frater meus exhibere posset, si ipsi proponeretur. Ex formula sane Tua possibilitatem ejus colligere possum, cum $\overline{x^e+cx^f}\sqrt{am+bx^r}$ differentiata acquirat extra vinculum exponentem $f+r-1$ et $e+r-1$, qui non potest esse plus unitate minor ipso r exponente intra, nisi f et e contra hypoth. statuantur negativi.

Quod Verisimilitudines spectat, et earum augmentum pro aucto scil. observationum numero, res omnino se habet ut scripsi, et certus sum Tibi placituram demonstrationem, cum publicavero.

Dum scribis, neminem circa Locorum Doctrinam Tibi satisfecisse, quaeso num loca solida h. e. Sectiones Conicas, an vero Loca, ut vocant, Linearia seu Curvas altiores intelligis? Si de his loquaris, certe Tibi non satisfactum esse minime miror. Cum enim his diebus occasione Epistolae Tuae animum huc applicarem, deprehendi earum solummodo curvarum, quae Sectiones conicas proxime excipiunt, seu quarum coordinata alterutra aut productum ex utraque ad tres dimensiones, nec ultra, assurgit, tam stupendam esse multitudinem, ut credam neminem mortalium unquam illas omnes enumeraturum. Hinc ex toto numero simpliciores tantum inquisivi, reperique 33 differentes curvas esse, quarum nulla insuper plurium quam trium terminorum aequatione exprimatur, et quas aliquando cum suis flexibus et asymptotis delineatas exhibere possum, si Tibi operae pretium videatur, nemoque sit qui id laboris jam occuparit, quod quidem ex Te discere lubenter cupio. Vale interim, Vir Amplissime, faveque etc.

Basileae 28 Februarii 1705.

P. S. Cum haec absolvi, legendus mihi offertur Januarius Act. Lips. hujus anni, ubi video non sine stupore, D. Newtonum in speculatione Curvarum secundi generis non tantum praevenisse me, sed et praestitisse, quod ego impossibile judicabam, definiendo scil. numerum harum Curvarum ad 72, sed dubito tamen, annon multo sint plures? nam generalibus istis ideis, quibus utitur, caveri vix potest, quin aliquid praetereat inobservatum, et cum ad particularia devenitur, plerumque multo feracior deprehenditur Natura, quam initio videbatur. Avidissime itaque expecto librum, in quo haec fusius explicantur, visurus annon in meis 33 curvis quaedam occurrat, quae in illius 72 non contineatur.

XIX.

Leibniz an Jac. Bernoulli.

Libenter intellexi ex Tuis, negotium Patavinae professionis a me propositae spem successus ostendere Clmo. Hermanno nostro, et Dn. Abbatem Fardellam, virum doctissimum et humanissimum,

literas eam ob rem cum ipso commutare. Fascem Parisinum puto adhuc Basileam venturum, sed quaedam transmissionem distulere. Itaque si adveniet, utemur favore Tuo. Pro nihilo computo, quae ex scriptis meis habere Te ais, Artem Combinatoriam et Hypothesin physicam; pene enim puerilia sunt in prima adolescentia confecta, cum prior prodierit in lucem anno 1666, posterior puto anno 1670. Quae ab eo tempore edidi extra diaria, sunt diversi plane argumenti a Philosophia et Mathesi. Pensionarii Wittii scriptum nondum satis quaerere licuit inter chartas; non dubito tamen, quin sim tandem reperturus, ubi vacaverit. Sed vix aliquid in eo novum Tibi occurret, cum fundamentis iisdem ubique insistat, quibus cum alii viri docti jam erant usi, tum Paschalius in Triangulo Arithmetico, et Hugenius in diss. de Alea, nempe ut medium Arithmeticum inter aeque incerta sumatur; quo fundamento etiam rustici utuntur, cum praediorum pretia aestimant, et rerum fiscalium curatores, cum reditus praefecturarum Principis medios constituunt, quando se offert conductor.

Non possum non duo submirari in literis Tuis. Primum est, quod methodum quandam Tuam pro certi generis quadraturis involucro quodam tectam memoras, velut exploraturus, an eodem pervenire possim. Sed etsi id mihi admodum difficile foret, putabam tamen ea aetate iisque occupationibus frui me posse jure emeriti, cui quae vobis occurrerent, candide ac sine aemulatione communicari possent. Quia tamen aliter Tibi visum nunc fuit, non potui mihi temperare, quin recurrerem ad veteres schedas. Revera enim id, de quo agitur, satis facile et ejus est naturae, ut vix potuerit non exercere inquisitionem meam ante multos annos. Nec mirari debes, quod nondum edidi olim reperta. Sane Quadraturam Arithmeticam et Analysin infinitesimalem ex praecepto Horatii in nonum et amplius annum pressi, et quadraturarum rationalium methodum nuper demum editam habui jam in Gallia, id est ante annos triginta; et tamen non nisi biennium est, quod in lucem produxi, ac tum demum ostendi etiam usum imaginariarum, quem jam olim Hugenio etiam in Gallia a me communicatum literis ejus docere possum. Et jam tum repereram circuli aream per logarithmos imaginarios exprimi.

Habeo adhuc methodum pro radicibus irrationalibus altiorum aequationum, aliaque multa, quae elaborare non vacavit, quae colligam aliquando attingamque saltem ne pereant. Sunt enim non-

nulla, quae non facile occurrunt. Sed quadratura figurae cujus ordinata est $\text{♀}\sqrt[e]{\text{☽}}$, posito e esse numerum, et ♀, ☽ esse formulas, in quibus una indeterminata x non occurrat, nisi rationaliter integre, ita ut vel absolute praestetur quadratura, vel reducatur ad simpliciores, quando id licet, plane difficultate caret, cum tantum formulam assumere liceat, qualis $\text{♀}\sqrt[e]{\text{☽}} + \int \text{♃}\sqrt[e]{\text{☽}}\,dx$ (posito ♃ esse formulam simpliciorem, quantum satis est, quam ♀) ejusque differentiationem comparare cum data summanda, nam in comparando nulla plane occurrit difficultas. Ubi notandum, posse formulam ♃ sufficientem assumi variis modis, et non tantum posse eam intelligi gradus, cujus exponens sit binario inferior exponente gradus ipsius ☽, quemadmodum innuis, sed gradus cujuscunque non excedentis gradum ipsius ♀; numeri vero terminorum binario deficientis a numero terminorum ipsius formulae ☽. Terminos autem computo etiam intermedios, qui vacant, et in ☽ etiam postremos. Interim fateor ex ipsis ♃ assumibilibus eam fore simplicissimam formulam, in qua gradus quoque binario deficit a gradu ipsius ☽, tunc nimirum, cum termini ab x non habent exponentes, nisi affirmativos. Sed si occurrant negativi, res secus habet, interim numerus terminorum semper erit binario minor.

Caeterum methodum meam pro eo, de quo agitur, et canonem in tabulae modum in adjecta scheda*) sum complexus, gratumque erit, si examines, an Tuo consentiat, quo securiores simus, in calculo non esse erratum: gratiusque adhuc, si distinctius absolvas calculum et legem progressus prodeuntem explicatione literarum valoris assignati. Quia enim id non vacavit facere, ea fuit, credo, causa, quod tot annis neglectae jacuere schedae meae huc pertinentes, cum tot aliis, more meo, qui methodis contentus soleo parum curare, quae video esse in potestate. In adjecta charta monui etiam Analysin Quadraturariam hinc haberi (accedente nuper a me editorum auxilio) etsi ordinata esset $\frac{\text{♀}}{\text{♂}}\sqrt[e]{\text{☽}}$. Habeo et alias cogitationes quibus haec longius promoveri possint.

---

*) Siehe die Beilage zu diesem Schreiben.

Alterum est, quod submiror celere adeo judicium tuum de iis, quae circa dyadica scripsi. Dixeram Tibi in omnium potestatum dyadice expressarum utcunque altarum columnis quibuscunque esse periodos, idque potui dicere non temere, quia certa demonstratione comperi. Tu, re vix inspecta, negas, et in ipso quadrato putas quartam et sequentes columnas periodis carere; sed si paulo fuisses in meis considerandis attentior, contrarium ipsis oculis deprehendisses. Nam quarta periodus perpetuo utique recurrens est 10100000 | 10100000 | 10100000 etc. Et quinta periodus est 1101010110000000. Et tale quid etiam in sequentibus columnis locum habet. Equidem non dantur hic periodorum periodi, sed quin certa lege procedant, quae a nobis possit deprehendi, et utiliter quaeratur, non dubito: idemque sentio de progressu notarum ad Ludolphinae expressionis modum in dyadicis exhibitarum. Non semper serierum leges, etsi ad centum et ultra terminos perducas, sunt oculis obviae, aut nuda inductione facile deprehenduntur, sed tamen ex fonte analytico hauriri possunt. Porro etsi satis sciam, etiam decadicas et alias quascunque progressiones habere periodos quasdam, aut procedendi Leges (licet quodammodo per saltum, quoniam in iis quidam pro arbitrio assumuntur characteres, quod in dyadicis non fit, ubi omnis notatio redit ad prima elementa 0 et 1) hoc, inquam, etsi non ignorem, id tamen discrimen intercedere deprehendo, quod in dyadicis incomparabiliter major est facilitas pro legibus progressionum deprehendendis. Interim velim aliquando pergi a dyadicis ad triadica, tetradica, et ita porro, donec haec ipsa comparatio dederit legem pergendi; sed hoc tum demum tentare operae pretium erit, cum in dyadicis egregios progressus fecerimus, veluti cum periodos in columnis potentiarum ad leges reduxerimus. Idque ideo ad transcendentes quoque maximi momenti est, quia series infinitae per potentias ipsius x optimae quidem sunt ad valores generales, v. g. logarithmum quemcunque, arcum circuli quemcunque; sed pro determinatis quantitatibus, e. g. logarithmo binarii, arcu quadrantis etc. series tales non sunt optimae. Et licet in indefinitis satis habuerimus ipsam incognitam x, ejusque potestates occurrere rationaliter integre, seu extra vincula et denominatores; in ipsis determinatis tamen id non est satis, quoniam praeterea effici potest, ut ipsi numeri occurrant non nisi rationaliter integre. Idque ipsum fit dyadica vel alia hujusmodi expressione ad Ludolphinae modum;

ex quibus dyadica via, utique generatim loquendo, simplicissima est. Et hae series vel ideo praeferendae sunt, quia sunt unicae et invariabiles.

Etsi alio sensu, quam quem memoras, dixerim circa locorum doctrinam mihi non esse satisfactum; gaudeo tamen, quod tuo modo acceperis, eaque occasione in lineas altiores inquisiveris. Newtonius suae enumerationis linearum tertii gradus, quas 72 facit, demonstrationem non addidit, credo, ut aliorum quoque ingeniis exercendi se materiam relinqueret, nisi forte studio brevitatis et longi sermonis impatientia a se impetrare non potui, ut progressum inventionis describeret. Tuae interim 33 curvae pro lapide lydio inservient; quanquam Tibi non usque adeo difficile futurum putem, ubi animum applicueris, certum designare numerum curvis hujus gradus, praesertim si consideremus, quandonam una eademque linea aequationibus localibus diversae prorsus formae exprimi possit. Optassem Newtonum non tantum ordinatas, centra, diametros et asymptotos, sed et focos in consilium adhibuisse; sed cum hanc disquisitionem aliis reliquerit, hortatus sum Dn. de Tschirnhaus, qui huic doctrinae focorum dudum incubuit, ut supplere studeat hunc defectum.

Caeterum imperfectio doctrinae de Locis, vulgo prostantis, quam ego in mente habebam, cum ad Te scriberem, etiam ad loca plana et solida pertinet, quae veteres multa excogitavere, etsi non nisi paucas curvas contineant, ut viam aperirent ad constructiones geometricas commodas. Horum Locorum quaedam nobis conservavit Pappus, quaedam posteriores addidere; sed cum demonstrationes dedere locorum a veteribus enumeratorum, non satisfecere toti negotio; neque enim fontem inventionis aperuere, qua veteres pervenere ad has suas enumerationes, multoque minus dedere modum supplendi. Et omnino tota doctrina de constructionibus Geometricis commodis eruendis ad morem veterum, nondum satis exculta est. Fateor ea careri posse ad usum, nosque numeris incognitas quantitates potius in praxi quam linearum ductu determinare; sed pertinet tamen artis construendi promotio ad elegantiam, et hunc usum habet saltem, ut ars inveniendi promoveatur. Itaque molitus aliquando sum novam characteristicam situs, differentem a nostra analysi hactenus cognita, quae proprie est characteristica magnitudinis, quae tamen situs characteristice et ipsa quodam sui generis calculo constaret. Sed facilius est talia in-

venire quam elaborare. Illud ingenio, hoc tempore et labore constat.

Antequam hinc abeam, Tibi si placet ac Cl. Hermanno commendabo inquisitionem quandam circa series infinitas, quae nondum, quod sciam, babetur, et tamen ad earum sufficientem cognitionem est necessaria. Video enim Te peculiari studio in seriebus infinitis versari nec minore successu. Scis cujuslibet aequationis radicem facile exhiberi posse per seriem infinitam, modumque id praestandi generali canone a me datum aliquando in Actis, quando Dn. Facio respondi, statimque ibi valorem radicis prodire, si omnes coefficientes terminorum aequationis, in quibus est y, sunt aequales nihilo, manente sola indeterminata x. Verum cum extractio talis pertineat etiam ad eas aequationes, quae sunt impossibiles, deberet id ex ipso valore radicis per seriem infinitam rationaliter expresso posse internosci. Nempe tunc necesse est, ut series, si per partes sumatur, continueque producatur, quaesito non advergat, seu non ita accedat, ut ostendi possit differentiam tandem fieri minorem quavis data. Cum vero id non semper facile ex serie literaliter expressa appareat, opus est indicia posse constitui, ex quibus id colligatur, utrum nempe series sit advergens vel non: indicia, inquam, eruta ex ipsa serie, non ex aequatione, unde est deducta series, praesertim cum interdum ignoretur haec aequatio, et saepe series significet quantitatem transcendentem, quae ex nulla hujusmodi aequatione deducta est. Sed ubi rem in seriebus aequationum radices exprimentibus constituerimus, facilius idem et in ceteris efficiemus.

Cl. Dn. Hermannum rogo, ut a me salutes; literas nuper ad me datas recte ipsi redditas puto. Si quis imposterum, vel Tu, vel ille, ad me voletis, commendate quaeso literas Dno. Schrokio, Agenti Electorali Brunsvicensi apud Augustanos. Et hac via etiam fasciculi minores ad me curari possunt, non expectatis semper nundinis. Eademque ratione Wittianam schedam a me accipies, ubi primum eruere licuerit. Vale.

Beilage *).

Quadraturae Irrationalium simplicium.

Quaeritur $\int ♀ \sqrt[e]{☽}\, dx$, posito ☽ et ♀ esse formulas rationales integras quoad x, veluti si ☽ esset $10 + 11x + 12xx + 13x^3 + \text{etc.}$ Quia igitur oportet quantitatem et ejus summatricem ejusdem esse ambiguitatis seu eandem ambiguitatem praestantis irrationalitatis, et quia quantitatis uno irrationali vinculo constantis, ut $\sqrt[e]{☽}$, differentiale per hanc ipsam irrationalem multiplicatur; ideo facio $\int ♀ \sqrt[e]{☽}\, dx = e ☿ ☽ \sqrt[e]{☽} + \int ♃ \sqrt[e]{☽}\, dx$, ponendo ♃ esse formulam simpliciorem quam ♀, quantum opus est, et licet, ut quaesita quadratura vel habeatur absoluta, vel reducatur ad simpliciorem ejusdem ambiguitatis. Ergo utrinque differentiando fiet

$$e ☽ d☿ + (e+1) ☿ d☽ + ♃ dx - ♀ dx = 0.$$

Quare cum formulae ☿ et ♃ sint arbitrariae, adeoque potentiae ipsius x in his formulis habeant arbitrarios coefficientes ex eo determinandos, quod quivis terminus est destruendus, hinc posito Exponentes graduum ad quos assurgunt ☽, ♀, ☿, ♃, esse α, β, γ, δ, oportet ut quantum satis arbitrariarum obtineatur, et ♃ tamen maneat quam licet simplicissima, fieri $\gamma = \beta + 1 - \alpha$, et ♃ constare ex numero terminorum, qui unitate sit minor ipso α, atque ideo posse habere terminos x^0, x^1, x^2 etc. vel x, xx, x^3 etc. vel xx, x^3, x^4 etc. imo et non continuos, sed tamen semper eodem manente numero ipsorum $\alpha - 1$, primum tamen casum esse simplicissimum; quo posito fiet $\delta = \alpha - 2$. Porro quantitas ♀ posset quidem esse Formula composita ex multis terminis, velut si esset $♀ = 20 + 21x + 22xx + 23x^3 + \text{etc.}$ sed quia unusquisque ex his terminis in $\sqrt[e]{☽}$ ductus, qualis $x^3 \sqrt[e]{☽}$, ordinatae est valor, cujus figura quadraturam recipit, vel absolute vel ope inferiorum ut $(20 + 21x) \sqrt[e]{☽}$, sequitur inventa singulorum terminorum in $\sqrt[e]{☽}$ ductorum, quales x^3, x^4 etc. summatione, etiam formulae ex ipsis conflatae summationem haberi.

---

*) Leibniz hat bemerkt: Hoc ad Jac. Bernoullium misi April. 1705.

Contenti ergo assumere ♀ unius termini, quo magis calculum contrahamus, ponatur exemplum, unde reliqua aestimentur. Et sit

data { ☽ = 10 + 11 x + 12 xx + 13 x^3 + 14 x^4 * * * *
       ♀ = * * * * * * * * + x^8

quaesita { ☿ = 30 + 31 x + 32 xx + 33 x^3 + 34 x^4 + 35 x^5 * * *
           ♃ = 40 + 41 x + 42 xx * * * * * *

fiet $\alpha = 4$, $\beta = 8$, $\gamma = 5$, $\delta = 2$.

Compendii jam causa assumamus numeros novos, quales 130, vel 152, vel 173, et similes, qui significant 3 e + 0, 10, vel 5 e + 2, 12, vel 7 e + 3, 13, ubi 0, 2, 3, 5, 7, sunt numeri veri, sed ipsi 11, 12, 13 etc. 30, 31 etc. 40, 41 etc. 130, 152, et similes sunt fictitii, loco literarum a me assumti, ut melius exprimant relationes coordinationesque quantitatum datarum vel quaesitarum.

Destructis igitur in Aequatione supradicta Terminis, determinantur arbitrariae assumtae 35, 34, 33, 32, 31, 30; et 40, 41, 42, hoc modo:

35 = + 1 : 194
34 = − 183 : 194 . 184
33 = − 184 . 172 + 183 . 173, : 194 . 184 . 174
32 = { − 184 . 174 . 161 + 183 . 174 . 162 + 184 . 172 . 163 − 183 . 173 .... } : 194 . 184 . 173 . 164
31 = { − 184.174.164.150 + 183.174.164.151 + 184.172.164.152 + 184.174.161.153 − 183.173 ..... − 183.174.162 ... − 184.172.163 ... + 183.173 ..... } : 194.184.174.164.154.

Similiterque ascribi facile posset valor ipsius 30, et Regula generalis satis brevis hos valores inveniendi et continuandi est talis: Denominatores quidem per se patent, qui sunt 194, 194 . 184, 194 . 184 . 174 etc. ubi nota dextra semper est α, hoc loco 4, sinistrae vero (omissis 1 initialibus semper occurrentibus) $\gamma + \alpha$, $\gamma + \alpha - 1$, $\gamma + \alpha - 2$ etc. (hoc loco 5 + 4, 5 + 4 − 1, 5 + 4 − 2 etc.). Quoad Numeratores in primo valore, nempe ipsius 3γ (seu 35 hoc loco) is numerator est + 1 seu unitas. De caeteris ex Numeratore qui est in valore jam invento Numeri, ut 3x (exempli causa 32, posito $x = 2$) potest inveniri Numerator qui est in valore sequenti ipsius Numeri 3 | x − 1 (hoc loco 31) tali modo: in invento jam numeratore numerus quivis, cujus nota sinistra est inter caeteras minima (quae vocetur h, et est semper = $\alpha + x$) minuatur unitate et tantundem minuatur ipsi adhaerens nota dextra (itaque in numeratore valoris 32 ex 161, 162, 163 fiet 150, 151, 152) et quod provenit, multiplicetur per numerum cujus nota sinistra sit h, dextra

vero α (hoc loco per 164, ubi nota sinistra est $h = \alpha + x$ seu $4+2$ et dextra est 4) a producto auferatur aliud productum ex eodem valoris inventi seu ipsius $3x$ numeratore toto (qualis erat) multiplicato per numerum cujus nota sinistra sit $h-1$, dextra vero $\alpha - 1$ (hoc loco per $1|6-1|4-1$ seu 153). Ita tandem confectus est Numerator novus valoris $3|x-1$ (hoc loco 31). Quod si contingat, notam dextram debere descendere infra 0 ad -1 seu $\overline{1}$, tunc quod provenire deberet, evanescere intelligitur, quod contingit in valore ipsius 30 deducto ex 31. Nempe quia compendio

$$31 = -150\,l + 151\,m + 152\,n + 153\,p, : 194.184.174.164.154,$$

ideo fiet exinde per Regulam

$$30 = \frac{-14\overline{1}\,l + 140\,m + 141\,n + 142\,p - 143\,(-l + m + n + p)}{194.184.174.164.154.144}$$

ubi evanescet $-14\overline{1}\,l$.

Multae et singulares hic progressus et combinationis Leges observari possent, sed quas brevitatis causa nunc praetereo, una tantum notata, quod Termini Numeratoris habent numerum membrorum in progressione Geometrica dupla crescentem.

Inventis jam valoribus ipsarum 30, 31, 32, 33, 34, 35, facile inveniri possunt valores ipsorum 40, 41, 42 etc. qui supersunt determinandi. Nam fit:

$$-40 = 111.30 + 110.31$$

$$-41 = 122.30 + 121.31 + 120.32$$

$$-42 = 133.30 + 132.31 + 131.32 + 130.33$$

et ita porro, si opus. Unde ex inventis ipsis 30, 31, 32 etc. etiam ipsas 40, 41 etc. haberi patet. Habitis jam singulatim Quadraturis quales $\int x^r \sqrt[e]{\mathfrak{D}}\, dx$, patet etiam haberi $\int \mathfrak{Q} \sqrt[e]{\mathfrak{D}}\, dx$, posito $\mathfrak{Q}$ non esse x^r, sed ex pluribus hujusmodi conflari. Quanquam Tabula valorum quales pro simplice $\mathfrak{Q}$ dedimus, etiam non abludente progressu staret pro $\mathfrak{Q}$ composita, seu si $\mathfrak{Q}$ esset $20 + 21x + 22xx + 23x^3$ etc. eadem prorsus calculandi ratione.

Eadem fere Methodus adhiberi poterit, si Elementum summationis sit non ut hactenus $x^r \sqrt[e]{\mathfrak{D}}\, dx$, sed potius $\frac{1}{x^r} \sqrt[e]{\mathfrak{D}}\, dx$. Ponamus

☽ esse $10x^{\alpha} + 11x^{\alpha-1} + 12x^{\alpha-2} +$ etc. usque ad x^0 inclusive
et ♃ esse $40x^{\alpha-1} + 41x^{\alpha-2} +$ etc. usque ad x^{-1} inclusive
☿ esse $\frac{31}{x} + \frac{32}{xx} + \frac{33}{x^3} +$ etc. usque ad $\frac{1}{x^{r-1}}$,

ita (ut prius) e☽d☿ $+ (e+1)$☿d☽ $+$ ♃dx aequando ipsi $\frac{1}{x^r}$ atque ita inveniendo assumtitias 30, 31, 32 etc. 40, 41, 42 etc. habetur quadratura $\int \frac{1}{x^r} \sqrt[e]{☽}\, dx$ vel absolute vel saltem praesupponendo eas tantum quadraturas, ubi x non est in denominatore, quas jam absolvimus, nisi quod una adhuc quadratura desideratur $\int \frac{1}{x} \sqrt[e]{☽}\, dx$, quae est omnium quantitatem indeterminatam x in Denominatore habentium simplicissima. Et ad hanc reducitur quadratura Figurae cujus ordinata est $\frac{1}{y+b} \sqrt[e]{☽}$, posito esse ☽ $= 10 + 11y + 12yy +$ etc. Nam tantum oportet facere $y + b = x$ seu $y = x - b$, et hunc valorem substituere in valore ipsius ☽, ut ita tantum quaeratur $\int \frac{1}{x} \sqrt[e]{☽}\, dx$.

Hinc patet tandem, si proponatur quadranda Figura cujus ordinata sit ♀$\sqrt[e]{☽}$: ♂, posito ☽, ♀, ♂ esse formulas rationales integras secundum abscissam x, omnem rem reduci ad Quadraturam Figurae cujus ordinata est $\frac{1}{x} \sqrt[e]{☽}$ vel $\frac{1}{x+b} \sqrt[e]{☽}$; et praeterea ad quadraturas figurarum aliquot, quarum ordinatae sunt quales $\sqrt[e]{☽}$, $x\sqrt[e]{☽}$, $xx\sqrt[e]{☽}$ etc. quarum numerus unitate differat ab α, exponente gradus ipsius ☽. Ostendi enim, cum Quadraturarum Rationalium Analysin ederem, Fractionem Rationalem quamvis, qualis

$$\frac{c + ex + fxx + gx^3 + \text{etc.}}{1 + mx + nxx + px^3 + \text{etc.}} = \frac{♀}{♂}$$

posse divelli in partes quales 50, 51x, 52xx etc. $\frac{60}{x}$, $\frac{61}{xx}$, $\frac{62}{x^3}$ etc. $\frac{71}{x+h}$, $\frac{72}{qu\,(x+h)}$, $\frac{73}{cub\,(x+h)}$ etc. Ubi jam potentias quotcunque ut x^r, cum r est numerus rationalis integer positivus, in quadrando ad pauciores reducendi modum hoc schediasmate

ostendimus, sed et cum occurrant quotcunque quales $\frac{1}{x^r}$, novissime jam monstravimus, quomodo ad solas x^r accedente unica $\frac{1}{x}$ res reducatur. Ita Quadratura $\int (♀:♂)\sqrt[e]{☽}\,dx$ dependet ad summum ab aliquot quadraturis, qualis $\int x^r \sqrt[e]{☽}\,dx$, tot numero quot sunt unitates in exponente gradus ipsius ☽ demta una, et praeterea a Quadraturis qualis $\int \frac{1}{x+h}\sqrt[e]{☽}\,dx$. Caeterum haec Analysis amplius promoveri potest per vias singulis gradibus aut aliis varietatibus accommodatas, sed hoc loco generalia dare satis fuit.

XX.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Significavit mihi nuper D. Brosseau per literas, se 22. die praeteriti mensis geminum pro Te fascem Parisiis ad me direxisse, quos etiam cum accepissem, ad D. Schröckium Augustam curaturus eram, prout jussisti. Sed ecce! supervenit quidem Petrus Chiffelle Neocomensis, a servitiis, ut refert, Exc. Comitis de Platen, qui se in commissis habere ait, post reditum suum e patria, quo tendit, fasces hos secum asportandi Hanoveram. Et quia nihil habet, quo fidem mihi faciat homo ignotus, rogandum Te duxi, ut quid factum velis, ocius mihi perscribas. Si redux ille fuerit, et ego accepero fasces, priusquam responsum a Te obtinuero, cogor Tua venia aperire sarcinas, visurus, num insint, quae ille inesse perhibet; cum aliter mihi de hominis fide constare non possit. Vale et fave etc.

Basileae 25 April. 1705.

P. S. Jamjam clausurus eram istas, cum ecce ad ultimas meas responsum a Te accipio, sed cui nunc ob temporis et chartae angustiam reponere non possum. Has via ordinaria ad Te mitto, veritus ne non in tempore Tibi redderentur, si Augustam ad D. Schröckium dirigerem. Vale.

XXI.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Ipso demum die Pentecostes redux hic factus est D. Chiffelius, sed quem carpento aut rheda similique vectura instructum credebam, solo vectus equo iter prosequitur, ut neutram sarcinarum, quarum pondus junctim 200 libras aequat, secum sumere voluerit aut potuerit: cui rei sane multum indolui: hoc enim si indicasset antea, sarcinas integro mense maturius vix committere potuissem. Nunc illas Forum Tiberii, ubi mercatus annuus hac celebratur hebdomada, mittere cogor, inde porro Augustam ad D. Schrökium, Agentem Vestrum, curaturus: licet autem huic scribere non possim, quod mihi non constet de Viri professione, et utrum sit celebris ille medicus Schrökius, Praeses Academiae Leopoldinae et Com. Palat. Caes. an vero aliquis alius diversus ab isto; tamen filio meo Augustae commoranti scribo, ut de illo perquirat, eique ..... significet, ipsum tales talesque sarcinas a tali vel tali mercatore accepturum. Unum est, Vir Amplissime, quod me sollicitum tenet: nosti severum interdictum de non importandis et exportandis e Gallia in Germaniam mercibus: nosti etiam destitui has sarcinas literis salvi commeatus; quippe de quibus et nihil mihi mandasti, et quas mihi privato comparare multi temporis et magnae impensae res fuisset; itaque Tuum erit in omnem eventum mature prospicere, si quando contingat illas alicubi detineri, ut interveniente auctoritate principali ocyus relaxentur. Expensas in vecturam et alia, quas tulit Gener meus (ob varias enim aegritudines, quibus ab aliquo tempore sum conflictatus, opera hic sua me sublevavit, et omnem sarcinarum curam in se recepit) scheda haec exhibet, quam Tibi, jubente sic D. Brussello, his inclusam transmitto; quo nomine tamen nescio, an dictus meus Gener in instanti mercatu sibi satisfieri curabit, necne.

Hermanus noster omnes D. Fardellae literas accepit, singulisque etiam statim reposuit, sed ad suas semper non nisi bimestri post responsum obtinuit, adeo ut culpa morae non stet penes Hermannum, sed penes ipsos Italos. In eo sane boni hominis vices doleo, quod video hac tergiversatione facile fieri posse, ut ipse cum Patavina etiam simul Marburgensi vocatione excidat.

Si rumor vera narrat, redibit certe frater meus Basileam, non tamen Graecam (cum ipse sit ἀναλφάβητος) sed meam potius stationem (quam brevi cum vita me derelicturum, forte non vane, existimat) occupaturus. De iniquis suspicionibus, quibus me immerentem onerasti in Tuis penultimis, alias, ubi plus otii nactus fuero. Nunc vale et fave etc.

Basileae 3 Junii 1705.

BRIEFWECHSEL

zwischen

Leibniz

und

Johann Bernoulli.



Johann Bernoulli *) wurde von seinem älteren Bruder Jacob in der Mathematik unterrichtet und namentlich in die Principien der höheren Analysis eingeweiht. Dies wird von dem letzteren in dem Schreiben an Leibniz vom 15. Nov. 1702 ausdrücklich versichert. Indess ist nicht zu verkennen, dass der jüngere Bruder vermöge seines ausgezeichneten Talentes den älteren, der ja nur auf sich angewiesen war und sich selbst bildete, bald einholte und in kürzester Zeit mit Meisterschaft ihm zur Seite trat. An dem Studium der Medicin, dem Joh. Bernoulli dem Wunsche seines älteren Bruders gemäss sich widmete, schien er keinen besondern Geschmack zu finden; nur zwei Schriften: Dissertatio de Effervescentia et Fermentatione nova hypothesi fundata, Basil. 1690, und: Dissertatio inauguralis physico-anatomica de Motu musculorum, Basil. 1694, zeugen von seiner Thätigkeit auf diesem Gebiet; vielmehr folgte er sehr bald ganz der Neigung, die ihn unwiderstehlich zu den mathematischen Wissenschaften hinzog. Beide Brüder arbeiteten anfangs in brüderlicher Eintracht zusammen; jedoch

*) Wie schon früher erwähnt, ist von dem für die Geschichte der schweizerischen Mathematiker rastlos thätigen R. Wolf in Bern ein von Joh. Bernoulli selbst verfasster Lebensabriss neulich bekannt gemacht worden. Darin zeigt sich ganz besonders der Charakter des Mannes; er strotzt durch und durch von ungemessenem Stolz und höchster Anmassung. In Bezug auf Hauptmomente in der Entwicklung seines Lebens, namentlich in Bezug auf die Verhältnisse mit seinem Bruder, ist Joh. Bernoulli sehr oberflächlich, unvollständig und gewiss unzuverlässig, so dass wir kein Bedenken tragen, den schlichten Aeusserungen Jac. Bernoulli's unbedingten Glauben zu schenken.

lockerten die durch übermässige geistige Anstrengung hervorgerufene, den innersten Lebenskern frühzeitig zerstörende Hypochondrie und Morosität des älteren Bruders auf der einen Seite, auf der andern das schnell zum Bewusstsein gekommene hohe Selbstgefühl Joh. Bernoulli's allmälig das innige Freundschaftsband und führten Verstimmung und gegenseitiges Misstrauen herbei, das zuletzt in die erbittertste Feindschaft ausartete.

Ehe es jedoch dahin kam, begann die Correspondenz zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli und zwar zu einer Zeit, in welcher die zwischen Leibniz und Jac. Bernoulli unterbrochen war. Sie wurde vermittelt durch Mencken, den Herausgeber der Acta Eruditorum Lipsiensium, an den sich, wie es scheint, Joh. Bernoulli wegen eines Unterkommens gewandt hatte. Dieser hatte ihn Leibniz empfohlen, der für die Akademie, welche der Herzog Anton Ullrich von Braunschweig-Wolfenbüttel zu gründen gedachte, einen Mathematiker suchte. Ehe jedoch Leibniz Schritte im Interesse Joh. Bernoulli's gethan hatte, zog dieser seine Bewerbung zurück und blieb vorerst in seiner Vaterstadt. Sowohl der Brief Joh. Bernoulli's an Mencken, als der erste an Leibniz sind voll der schmeichelhaftesten Lobeserhebungen des letzteren; er wird gefeiert als der Urquell, aus dem die ganze Wissenschaft fliesst und zu schöpfen ist, als der Mittelpunkt, von dem alle angezogen werden: kein Wunder, dass Leibniz, der für dergleichen durchaus nicht unempfänglich war, an Joh. Bernoulli mehr Gefallen fand, als an dem einfach schlichten, wegen seiner Gründlichkeit auch wohl unbequemen älteren Bruder. Dazu kam, dass Leibniz nicht unbekannt war, dass Joh. Bernoulli bereits für die Ausbreitung der höheren Analysis in Frankreich viel gewirkt, dass er den Marquis de l'Hospital und Varignon darin eingeweiht hatte; er durfte mithin in ihm einen rüstigen, muthigen Vorkämpfer für sein Werk erkennen, der immer bereit schien, stets auf ihn, den Altmeister, der wegen anderer überhäufter Geschäfte nicht mehr viel für seine Schöpfung thun konnte, etwas von dem errungenen Ruhm zurückstrahlen zu lassen.*)

*) Dies ist ohngefähr der Sinn der Worte, die Leibniz 24. Jan. 1695 an Joh. Bernoulli schreibt: Tuum ego pluris feci acumen maximum, quod conjunctum esse visum est cum candore et moderatione, quae saepe deesse solent juvenibus etiam praestantissimis, at nondum expertis, quantum sit momentum in recto videndi instituto.

Daher ist denn auch diese Correspondenz zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli die umfangreichste unter allen geworden; sie erstreckt sich ohne Unterbrechung von 1693 bis zum Tode Leibnizens. Sie ist vielleicht auch die wichtigste unter allen, denn an sie knüpft sich der Ausbau der höheren Analysis und besonders der Integralrechnung, derjenigen Disciplin, die Joh. Bernoulli den Namen und die namhaftesten Erweiterungen zu verdanken hat.*)

Leibniz, um diese Zeit viel beschäftigt und öfters von Krankheit heimgesucht, konnte nur wenige Stunden seinen Lieblingsstudien widmen. Um jedoch mit den Fortschritten der Wissenschaft bekannt zu bleiben, unterhielt er, wie es scheint, vorzugsweise gern und mit besonderer Sorgfalt die Correspondenzen mit Mathematikern; auch bot sich ihm so fortwährend neue Gelegenheit, über Methoden und Theoreme, die er durch frühere Studien gewonnen hatte, sich auszusprechen und namentlich die Lücken zu bemerken, die zur Vervollkommnung der Wissenschaft noch auszufüllen waren. So bezeichnet er sogleich in seinem ersten Schreiben an Joh. Bernoulli zwei Punkte, worin die Integralrechnung noch mangelhaft sei, dass nämlich zum Behuf der Construction der Curven es vorzuziehen sei, nicht die Quadratur, wie es gewöhnlich geschähe, als vielmehr die Rectification zu finden, und zweitens, dass die Inte-

*) Allgemein hält man Joh. Bernoulli für den Entdecker der Integralrechnung; er selbst sagt es ebenfalls in dem bereits oben erwähnten, von ihm selbst verfassten Lebensabriss: Après cette heureuse découverte (d. i. nach dem Eindringen in das Mysterium der Differentialrechnung) je fus le premier, qui songeoit à inventer quelque méthode pour remonter des quantités infiniment petites aux finies dont celles-là sont les élémens ou les différences. Je donnai à cette methode le nom de calcul intégral, n'en ayant point trouvé alors de plus convenable. Bei der genauen Durchsuchung der Leibnizischen Manuscripte ist indess das historisch denkwürdige Manuscript vom 29. Octbr. 1675 aufgefunden worden, in dem Leibniz zuerst den Algorithmus der höheren Analysis einführt; es ergiebt sich daraus, dass er zuerst die Integralrechnung fand, die er „Calculus summatorius“ nannte, und alsdann den Algorithmus der Differentialrechnung ausbildete. Aus dem Grunde wahrscheinlich, dass er für die letztere sehr bald allgemeine Lehrsätze aufstellen konnte, und in derselben ein vorzügliches Mittel zur allgemeinen Behandlung des Tangentenproblems und der Frage über Maxima und Minima erkannte — aus diesem Grunde machte er allein die Differentialrechnung bekannt und hielt die Integralrech-

grale auf gewisse nicht weiter reducirbare Formen zurückgeführt werden müssten. Joh. Bernoulli erwiedert, dass eine allgemeine Regel, jeden Differentialausdruck zu integriren, niemals entdeckt werden würde, dass er jedoch mehrere specielle Methoden hätte, wodurch sehr viele Ausdrücke sich behandeln liessen. Ein vorzügliches Mittel zur Integration der Differentialgleichungen sei die Trennung der Veränderlichen. Er erwähnt ferner, dass er eine neue Art Curven aufgestellt hätte, die in der Mitte ständen zwischen den geometrischen und mechanischen (so hatte sie Descartes eingetheilt) und die er deshalb „curvae percurrentes" nennt; zur Behandlung derselben habe er eine neue Rechnung „calculus percurrens" erfunden. Es sind dies Curven, die durch Gleichungen von der Form $a^x = y$ ausgedrückt werden. Leibniz nannte die Rechnung „Exponentialrechnung" und hatte sie schon in der Correspondenz mit Hugens zur Sprache gebracht. Durch sie wurden die Logarithmen in das Bereich der Differential- und Integralrechnung eingeführt. Im Allgemeinen ist zu bemerken, dass sogleich in den ersten Jahren der Correspondenz zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli all' die Methoden, die gegenwärtig für die Integration der Differentialausdrücke im Gebrauch sind: Integration durch Substitution, durch Zerlegung, theilweise Integration, Integration durch Reihenentwicklung, erwähnt werden. Ferner theilt Leibniz in dem Schreiben vom $^6/_{16}$ März 1695 die Uebereinstimmung mit, die zwischen den Potenzen eines Binoms und den Differentialen eines Produkts zweier von einander unabhängigen Veränderlichen stattfindet, und fordert Joh. Bernoulli auf, etwas dem Aehnliches für die Integrale aufzustellen. Dieser war aber gerade in seiner Uebersiedelung nach Holland begriffen, wohin er auf Hugens' Empfehlung zur Uebernahme einer mathematischen Professur an der Universität zu

nung zurück, für welche er solche allgemeine Methoden nicht aufstellen konnte. Erst später (Leibnizens Schreiben $^8/_{18}$ März 1696 und Joh. Bernoulli's Antwort 7. April 1696) einigten sich Leibniz und Joh. Bernoulli dahin, dass jener die Benennung „summatio" aufgab und dafür nach Joh. Bernoulli's Benennungsweise „integralis" sich gefallen liess, dieser hingegen das Zeichen Leibnizens $\int$ für das anfänglich gebrauchte I (den ersten Buchstaben des Wortes Integral) annahm.

Gröningen berufen wurde; er konnte deshalb diesen Gegenstand nicht hinreichend genug verfolgen. Endlich theilt Leibniz selbst einen Ausdruck für das nfache Integral eines Produkts zweier unabhängigen Veränderlichen mit, den er aus der Formel für das n^te Differential eines solchen Produkts herleitet. Damit wird diese Frage verlassen, die zuletzt gegen die Discussion über das Princip der Dynamik, so wie es Leibniz in dem Streit mit den Cartesianern aufgestellt hatte, in den Hintergrund getreten war. Veranlassung zu dieser Discussion, die einen grossen Theil der Correspondenz in den Jahren 1695 und 1696 einnimmt, gab die Abhandlung Leibnizens: Specimen Dynamicum pro admirandis Naturae Legibus circa corporum vires et mutuas actiones detegendis et ad causas suas revocandis, die in den Act. Erudit. des Jahres 1695 erschienen war. Leibniz fand an Joh. Bernoulli einen hartnäckigen Gegner, der sich jedoch zuletzt zu Leibnizens nicht geringer Genugthuung für das Princip desselben erklärte. Ehe es jedoch dahin kam, brachte Joh. Bernoulli das denkwürdige Problem der Brachystochrone in dem Schreiben vom 9. Jun. 1696 zur Sprache, von dessen Schönheit Leibniz so ergriffen ward, dass er, ohngeachtet sein körperlicher Zustand ihm verbot, mit mathematischen Untersuchungen sich anhaltend zu beschäftigen, nicht eher ruhte, als bis er die Auflösung gefunden hatte. Er selbst hat darüber ausser der Lösung und der Construction der Curve in dem Schreiben vom 16. Jun. 1696 nichts bekannt gemacht; unter seinen hinterlassenen Manuscripten ist jedoch die Analyse dieses Problems noch vorhanden, und sie ist in sofern von dem höchsten Interesse, als daraus hervorgeht, mit welcher Meisterschaft Leibniz die von ihm so angelegentlichst zur Ausbildung empfohlene „ars inveniendi" handhabte. An das Problem der Brachystochrone knüpfen sich bekanntlich die Anfänge der Variationsrechnung; es darf indess nicht unerwähnt bleiben, dass Leibniz bereits in einem früheren Schreiben (6/16 Mai 1695) Joh. Bernoulli auf die Lehre von den Maximis und Minimis, als eine noch unerschöpfte und der Erweiterung fähige aufmerksam gemacht hatte. Er machte den Vorschlag, falls dergleichen Probleme sich nicht auf Differentialgleichungen zurückführen liessen, was öfters mit Schwierigkeiten verknüpft wäre, das Integral durch unendliche Reihen auszudrücken, deren Coefficienten auf eine sehr künstliche Weise bestimmt werden. Es muss ferner erwähnt werden, dass Leibniz sehr wohl die Neuheit von derglei-

chen Problemen und ihre Verschiedenheit von den gewöhnlichen Aufgaben über Maxima und Minima erkannte; in der Abhandlung: Communicatio suae pariter duarumque alienarum ad edendum sibi primum a Dn. Joh. Bernoullio, deinde a Dn. Marchione Hospitalio communicatarum solutionum problematis curvae celerrimi descensus a Dn. Joh. Bernoullio Geometris publice propositi, una cum solutione sua problematis alterius ab eodem postea propositi, durch welche er die eingegangenen Lösungen des Problems der Brachystochrone in den Act. Erudit. 1697 bekannt machte, sagt er: Est autem in hoc problematum genere, circa maxima et minima tali modo proposita, aliquid inusitatum et longe superans vulgares de maximis et minimis quaestiones, quibus solis Fermatius (primus aliqualis circa ipsa Methodi Autor) Cartesius, Huddenius, Slusius aliique methodos suas (de quibus quidem constat) aptavere. Nam in ipsorum quaestionibus res fere eo redit, ut quaeratur maxima vel minima ordinata alicujus curvae datae, quod non nisi corollarium est Methodi tangentium vulgaris seu directae. Sed hoc loco curva ipsa aliquid optime praestans quaeritur, cujus saepe adeo recondita est natura, ut ex datis conditionibus ne tangentium quidem proprietas appareat, adeoque nec ad methodum tangentium altiorem seu inversam facile quaestio reduci possit. Et ipsum problema Curvae Catenariae talis naturae foret, nisi praeparatione facta ad methodum tangentium inversam reducatur. Quaeritur enim ibi, quae sit forma curvae inter duo data puncta magnitudine data sic interceptae, ut ipsius centrum gravitatis maxime descendat. Unde apparet, quam longe hactenus Analysis a perfectione abfuerit, quicquid aliqui de Methodis suis jactarint.

Am Schlusse der Abhandlung über das Problem der Brachystochrone, die wir hier in der ursprünglichen Form mittheilen, so wie sie von Joh. Bernoulli an Leibniz übersandt wurde, legte derselbe zwei neue Probleme zur Lösung vor: 1) das Problem der Synchrone d. h. diejenige Curve zu finden, die alle von einem gemeinsamen Anfangspunkt ausgehenden Cycloiden rechtwinklig durchschneidet; 2) diejenige Curve zu finden, die gewisse über einer gemeinsamen Axe und durch einen gegebenen Punkt gehenden transcendenten Curven z. B. logarithmische Linien unter rechten Winkeln durchschneidet. Er suchte wiederholt die Aufmerksamkeit Leibnizens auf diese Probleme zu lenken; dieser ging jedoch, von vielen andern Geschäften überlastet, nicht darauf ein, worauf dann

Joh. Bernoulli selbst eine Lösung des obigen zweiten Problems gab (in dem Schreiben vom 27. Octbr. 1696). Bald bietet sich indess Joh. Bernoulli eine andere Veranlassung dar, Leibniz zur Erörterung mathematischer Probleme gewissermassen zu zwingen. Joh. Bernoulli war nämlich in den Besitz des Exemplars der Acta Eruditorum Lips. gekommen, das Hugens gehört hatte, und worin derselbe, namentlich bei den mathematischen Abhandlungen Leibnizens, zahlreiche Bemerkungen eingetragen hatte; unter andern war bei der Abhandlung: De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus (Act. Erudit. 1682) zu den Worten: Et quoniam quotcunque terminorum numero finitorum progressionis harmonicae summa compendio aliquo iniri potest etc., von Hugens bemerkt: non novi hoc compendium. Joh. Bernoulli fragt nun an, wie es sich mit diesem „compendium" der Summation verhielte. Leibniz erwiedert, dass er sich hinsichtlich dieser Summation in einem Irrthum befunden habe; er erwähnt aber dafür die Summation der unendlichen Reihe $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}$ etc. und dadurch wird die Correspondenz gegen Ausgang des Jahres 1696 auf die Integration logarithmischer Ausdrücke geführt. Joh. Bernoulli knüpft daran eine Methode, die Summen unendlicher Reihen durch Differentialgleichungen auszudrücken.

Zu Anfang des Jahres 1697 übersendet Joh. Bernoulli die falsche Auflösung des Problems der Brachystochrone von dem französischen Mathematiker Sauveur an Leibniz. Dieser Sauveur hatte nicht allein etwas Anderes gesucht, als das Problem verlangte, sondern auch in seiner Lösung eine falsche Anwendung der Differentiale gemacht. Dies giebt nun Veranlassung zu einer interessanten Erörterung zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli über die Natur der letzteren, namentlich ob die von Sauveur gebrauchten Grössen Differenzen der ersten oder zweiten Ordnung sind. Aus dieser Discussion geht recht deutlich hervor, auf wie schwankenden Bestimmungen damals die Entscheidung darüber beruhte, und wie nöthig es war, das Princip der Differentialrechnung für den grossen Haufen der Mathematiker deutlicher darzustellen und fester zu begründen. Die wiederholten Angriffe Nieuwentiit's auf die Richtigkeit des Fundaments der Differentialrechnung um dieselbe Zeit hätten ausserdem noch für die Mathematiker ersten Ranges eine Veranlassuug dazu sein sollen.

In Bezug auf das Problem der Brachystochrone waren Leibniz und Joh. Bernoulli übereingekommen, den Termin zur Einsendung der Auflösungen bis zu Ostern des Jahres 1697 zu verlängern, um den Geometern Zeit zur Behandlung desselben zu lassen und bei dieser Gelegenheit zugleich zu sehen, wer wohl fähig wäre dergleichen Aufgaben zu lösen. Joh. Bernoulli machte dies in einem besondern Programm (Jan. 1697) bekannt, in dem er am Schluss ein zweites Problem aufstellt: Inveuire lineam, quam recta quaevis per punctum fixum transiens ita secet in duobus punctis, ut summa potestatum a segmentis, interceptis inter punctum fixum et alterutrum punctum curvae, aequetur quantitati constanti. Obwohl Leibniz die Einladungen Joh. Bernoulli's zur Lösung seiner Probleme mit Rücksicht auf seine Gesundheit fortwährend zurückwies, so konnte er sich doch nicht enthalten, die Lösung dieses Problems zu versuchen; er selbst hat nur die Gleichung der Curve bekannt gemacht (Act. Erudit. 1697), die vollständige Analyse desselben fand sich unter seinen Manuscripten nach vor und folgt als Beilage zu dem Schreiben vom 23. Febr. 1697.*) — Nach und nach erschienen die Auflösungen des Problems der Brachystochrone und des oben erwähnten zweiten vom Marquis de l'Hospital und Newton. Sie folgen hier als Beilagen zu den einzelnen Schreiben, in welchen sie erwähnt werden, nicht allein des hohen Interesses wegen, das sie als Produkte des Scharfsinns der grössten Mathematiker der damaligen Zeit darbieten, sondern auch weil die Correspondenz zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli in der ersten Hälfte des Jahres 1697 sich fast nur über die Vorzüge der einen oder der andern Lösung bewegt.

Endlich erschien im Maiheft der Acta Erudit. des Jahres 1697 die Auflösung des Problems der Brachystochrone von Jacob Ber-

*) Aus einem spätern Schreiben Leibnizens (26. Mai 1697) verdient hier seine Ansicht über den Nutzen der Lösungen von dergleichen Problemen hervorgehoben zu werden: Cum de problemate aliquo solvendo agitur, meus scopus non solet esse, quem memoras, explorare acumen solutoris, sed vel praestari aliquid utile aut elegans vel saltem augeri artem meditandi. Ferner bemerkt er in dem Postscriptum zu diesem Briefe in Bezug auf das isoperimetrische Problem: Judicabis ipse, an putes per problemata ejus (fratris) augeri posse artem inveniendi, quo casu Te digna erunt.

noulli zugleich mit neuen Aufgaben, unter welchen die über die isoperimetrischen Figuren besonders hervorzuheben sind. Sie waren die Ergebnisse des angestrengtesten Nachdenkens und nirgends hat wohl Jac. Bernoulli seine durch eigene Kraft errungene Meisterschaft glänzender bekundet, als in der Behandlung dieser Probleme und in den Streitigkeiten, in die er dadurch mit seinem Bruder verwickelt wurde. Nicht allein das, dass Jac. Bernoulli gewagt hatte, seinem Bruder Aufgaben zur Lösung vorzulegen und das Talent desselben so auf die Probe zu stellen, sondern auch dass er, wie aus der Aufforderung indirect hervorzugehen scheint, an der Möglichkeit der Lösung durch denselben zweifelte, das, sage ich, brachte wahrscheinlich den äusserst reizbaren Joh. Bernoulli in die höchste Aufregung, und in allzugrosser Eilfertigkeit und in zu hohem Selbstvertrauen auf sein Talent übersah er die Schwierigkeiten, welche namentlich das isoperimetrische Problem darbot. Er gab die Construction der einen Aufgabe über die Cycloide des schnellsten Falles, die mit dem von ihm selbst früher aufgestellten Problem der Synchrone verwandt war, und meinte das über die isoperimetrischen Figuren bei weitem allgemeiner behandelt zu haben, als sein Bruder verlangt hätte. Leibniz, dem Joh. Bernoulli sogleich von seiner Lösung Nachricht gab, hatte die Probleme Jac. Bernoulli's nur sehr oberflächlich betrachtet, und er liess sich jetzt durch das Urtheil Joh. Bernoulli's bestechen, so dass er keine besondere Aufmerksamkeit weiter darauf verwandte und die unvollständige und fehlerhafte Behandlung des isoperimetrischen Problems von Seiten Joh. Bernoulli's nicht bemerkte. Kaum hatte aber letzterer seine Lösung bekannt gemacht, als Jac. Bernoulli das Mangelhafte derselben vollständigst aufdeckte und zugleich seinen Bruder aufforderte, seine Methode zu verbessern. Dies geschah, ohne dass jedoch Joh. Bernoulli den Grundfehler seiner Methode erkannte. Am 5. Juli 1698 sandte er diese revidirte Auflösung (sie folgt hier als Beilage zu diesem Schreiben) an Leibniz, der von ihm sogleich anfangs aufgefordert worden war, das Schiedsrichteramt in dieser Sache zu übernehmen. Dieser aber liess sich durch das übereinstimmende Resultat, das Joh. Bernoulli durch eine directe und indirecte Behandlung der Aufgabe gewonnen hatte, wiederum täuschen und hielt die Auflösung für richtig. Der weitere Verfolg der Streitigkeiten zwischen beiden Brüdern über die richtige Auflösung des isoperimetrischen Problems wird in der Correspondenz zwischen

Leibniz und Joh. Bernoulli nur sehr beiläufig erwähnt; wir übergehen sie deshalb hier und verweisen auf die ausführliche Darstellung Bossut's in seiner Geschichte der Mathematik Theil II. S. 164—181 (deutsche Uebersetzung von Reimer).

Auf das wiederholte Geständniss Joh. Bernoulli's, dass es ihm unmöglich sei, das erste der Probleme seines Bruders, von dem er nur eine lineare Construction gegeben hatte, auf eine Differentialgleichung zurückzuführen, hatte Leibniz seine Aufmerksamkeit darauf gerichtet; er fand eine allgemeine Methode zur Behandlung von dergleichen Problemen, die „differentiatio de curva in curvam" genannt worden ist. Er meldete es unter 25. Juli 1697 an Joh. Bernoulli und erläuterte sie in dem nächsten Briefe durch ein Beispiel. Eine etwas weiter ausgeführte Darstellung dieses Verfahrens, von dem Leibniz selbst nichts bekannt gemacht hat, fand sich unter seinen Manuscripten; sie folgt hier als Beilage zu dem Schreiben vom 3. August 1697. Das Fundament dieser Methode besteht darin, dass bei der Differentiation und Integration einer und derselben Function ein Wechsel zwischen den vorkommenden Veränderlichen und Constanten stattfindet. In der erwähnten Beilage deutet Leibniz selbst an, welcher Fortschritt durch diese neue Methode für die höhere Analysis gewonnen sei, und es darf nicht unerwähnt bleiben, dass durch diese Methode Leibnizens eine Auflösung des später so viel bearbeiteten Problems der Trajectorien möglich ward. Durch die Neuheit derselben wurde Joh. Bernoulli so hingerissen, dass er in seinem Antwortschreiben das offene Bekenntniss ablegt: Incredibili gaudio perfusus sum, cum viderem eundem genium Tibi totum mysterium pandisse, sed indignor quod Te altius admiserit quam me; und er löst mit Hülfe dieser neuen Methode das Problem: Construere curvam datas ordinatim positione curvas sive similes sive non similes in dato angulo sive invariabili sive data lege variabili secantem.

Von der Mitte des Jahres 1697 ab nimmt die Correspondenz zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli auf längere Zeit einen durchaus veränderten Charakter an; es ist von solchen grossen Problemen, wie bisher, nicht mehr die Rede, dafür werden die neuesten Vorgänge auf dem Gebiet der mathematischen Literatur besprochen. Auf der einen Seite war Joh. Bernoulli, der zur Discussion jener grossen Probleme seither unablässig die Anregung gegeben hatte, durch die Streitigkeiten mit seinem Bruder über die richtige Lösung des isoperimetrischen Problems in Anspruch genommen; hierzu kam,

dass er von den Curatoren der Universität Gröningen verpflichtet wurde, mit Beginn des Jahres 1698 Vorträge über Experimentalphysik zu halten, die ihn von mathematischen Speculationen abzogen. Auf der andern Seite befasste sich Leibniz, wie noch nie, mit den verschiedenartigsten Gegenständen, so dass ihm keine Zeit und Neigung blieb, auf mathematische Problemeernstlich seine Aufmerksamkeit zu richten. Es ist ferner zu erwähnen, dass Leibniz im Jahre 1698 eine neue Correspondenz mit dem Philosophen und Mathematiker de Volder anknüpfte, auf die er in den folgenden Jahren besondern Fleiss verwandte, da es ihm darauf ankam, de Volder, der hinsichtlich des Princips der Dynamik zu den Ansichten der Cartesianer sich bekannte, in diesem Punkte zu bekehren und für seine Ansicht zu gewinnen. Diese Correspondenz zwischen Leibniz und de Volder war durch Joh. Bernoulli, der bei einem Besuch in Leyden die Bekanntschaft des letzteren gemacht hatte, veranlasst worden; da sie nun auch fortwährend durch seine Hände ging und da in derselben sehr bald metaphysische Erörterungen über die Natur des Unendlichen, über die Monaden, über die Natur der Körper, über die Freiheit und Weisheit Gottes, über die Verbindung zwischen Körper und Geist u. s. w. eine Hauptrolle spielten, so interessirte sich Joh. Bernoulli lebhaft dafür, zumal weil ihm jene metaphysischen Erörterungen in dem Streite, in dem er damals mit holländischen Theologen verwickelt war (siehe das Schreiben Joh. Bernoulli's vom 5. Juli 1698) zu Statten kamen. Daher kommt es denn auch, dass die Correspondenz zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli in den Jahren 1698 bis 1700 vorzugsweise über dergleichen metaphysische Begriffsbestimmungen sich bewegt. Zwar bringt Joh. Bernoulli auch noch in den folgenden Jahren fast nur physikalische Fragen zur Erörterung, namentlich über die Verdichtung und Elasticität der Luft und über den von ihm entdeckten Posphorus mercurialis (d. i. das Leuchten des Quecksilbers an den Wänden eines luftleeren Glasgefässes); indess gaben die Angriffe, die von dieser Zeit an auf Leibniz als Entdecker der Differentialrechnung von England und Frankreich aus begannen, wiederum einige Veranlassung zur Discussion von Fragen aus dem Bereich der mathematischen Wissenschaften, indem Leibniz stets zur Abwehr derselben die Hülfe und den Rath Joh. Bernoulli's in Anspruch nahm. Der erste Angriff erfolgte bekanntlich bereits im Jahre 1699 von England aus durch Fatio de Duillier, der in seiner kleinen Schrift: Lineae brevissimi descensus

investigatio geometrica duplex, cui addita est investigatio geometrica Solidi rotundi, in quod minima fiat resistentia. Londin. 1699, die Behauptung aufstellte, dass Newton entschieden der erste Entdecker, hingegen Leibniz nicht allein als zweiter betrachtet werden müsse, sondern vielleicht sogar ein Plagiarius sein könnte.*) Den gereizten

*) Nicolaus Fatio de Duillier, geb. 1664 zu Basel (so R. Wolf in den „Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Bern aus dem Jahre 1846, S. 135;" sonst wird gewöhnlich Genf als Geburtsort desselben angegeben), besass nach dem Urtheil Joh. Bernoulli's glänzendere Fähigkeiten, als sein älterer Bruder Johann Christoph, der von letzterem während seines Aufenthaltes zu Genf in die höhere Analysis eingeweiht wurde. Mag nun Nicolaus Fatio mit Hülfe seines Bruders, oder selbstständig in die Principien der höhern Analysis eingedrungen sein, mit denen er sogar früher vertraut gewesen zu sein behauptete, bevor er von der Entdeckung Leibnizens etwas gewusst hätte — kurz Nicolaus Fatio stellte sich sehr bald den Mathematikern ersten Ranges der damaligen Zeit zur Seite; Hugens schätzte ihn hoch und arbeitete mit ihm, und Jacob Bernoulli schlug ihn zugleich mit Newton und dem Marquis de l'Hospital als Schiedsrichter in dem Streite mit seinem Bruder Johann vor. Gegen Ende des Jahres 1691 ging Fatio nach England; er erhielt Zutritt zu Newton, der ihn mit grosser Zuvorkommenheit aufnahm und ihm sogar Einsicht in seine Papiere gestattete. Von England aus schrieb Fatio in den Jahren 1691 und 1692 mehrere Briefe an Hugens, die von Uylenbroeck (Ch. Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae, Hagae Comit. 1833 Fasc. II. p. 98 sqq.) veröffentlicht worden sind; in diesen behauptete er, dass nach seiner Ueberzeugung Newton unbestritten der erste Erfinder der höheren Analysis sei, dass durch Newton's Briefe aus den Jahren 1675 und 1676 Leibniz auf die Differentialrechnung geführt worden und dass Leibnizens Differentialrechnung zu den Fluxionen Newton's sich verhielte, wie ein Original zu einer verstümmelten, sehr unvollkommenen Copie, wodurch der Vorwurf des Plagiats schon hinreichend angedeutet ist. Hieraus erhellt, dass von den Freunden Newton's ein Jahrzehnt hindurch die Angriffe gegen Leibniz im Stillen genährt wurden, bevor der Kampf offen begann. Endlich bot sich dazu eine Gelegenheit. Leibniz hatte nämlich in den einleitenden Worten, mit welchen er die eingegangenen Auflösungen des Problems der Brachystochrone in der Act. Erudit. bekannt machte, gesagt, dass nur diejenigen das Problem zu lösen vermocht, von denen er es im voraus angenommen hätte (Et sane notatu non indignum est, eos solos solvisse hoc Problema, quos solvere posse conjeceram). Fatio, dessen übergrosse Empfindlichkeit schon dadurch gereizt worden, dass er nicht beson-

Ausfällen Fatio's gegenüber war die Antwort Leibnizens mit grosser Ruhe und Mässigung abgefasst. Sie wurde ihm Veranlassung, ein Ergebniss seiner früheren weitläufigen Untersuchungen über die allgemeine Auflösung der Gleichungen mitzutheilen; er giebt nämlich am Schluss derselben ein Verfahren, die Wurzel einer Gleichung durch eine unendliche Reihe auszudrücken. Er gebraucht dabei eine von ihm eingeführte eigenthümliche Bezeichnung der Coefficienten, wovon er sich nicht nur für die Behandlung der Gleichungen viel versprach, dessen er sich auch in allen seinen spätern Untersuchungen über Integrationen irrationaler Ausdrücke bediente. — Bald darauf folgte Rolle's Angriff im Schoosse der französischen Akademie auf die Zuverlässigkeit der Differentialrechnung. Der Hauptrepräsentant der neuen Analysis in Frankreich, der Marquis de l'Hospital, war bereits durch anhaltende Kränklichkeit, eine Folge seiner frühern äusserst angestrengten mathematischen Studien, genöthigt, auf eine fernere lebhafte Betheiligung an mathematischen Discussionen zu verzichten und war auch in der Sitzung nicht gegenwärtig, in

---

ders, wie die übrigen namhaften Mathematiker, zur Lösung des Problema eingeladen worden war, fühlte sich auf das schwerste getroffen, dass ihm nun auch die Fähigkeit zur Behandlung desselben abgesprochen würde. Er veröffentlichte deshalb die oben erwähnte kleine Schrift, in der er, voll Neid über das Ansehen Leibnizens und seiner Freunde auf dem Gebiet der mathematischen Wissenschaften, die lange zurückgehaltenen Behauptungen über den wahren Entdecker der höheren Analysis unverhohlen ausspricht. Quaeret forsan — so lauten seine Worte — Cl. Leibnitius, unde mihi cognitus sit iste Calculus, quo utor? Ejus equidem Fundamenta universa ac plerasque Regulas, proprio Marte, Anno 1687, circa mensem Aprilem et sequentes, aliisque deinceps Annis, inveni; quo tempore neminem eo Calculi genere, praeter me ipsum, uti putabam. Nec mihi minus cognitus foret, si nondum natus esset Leibnitius. Aliis itaque glorietur Discipulis, me certe non potest. Quod plus satis patebit, si olim Litterae, quae inter Cl. Hugenium meque intercesserunt, publici juris fiant. Newtonum tamen primum ac pluribus Annis vetustissimum hujus Calculi inventorem, ipsa rerum evidentia coactus, agnosco: a quo utrum quicquam mutuatus sit Leibnitius, secundus ejus Inventor, malo eorum, quam meum, sit judicium, quibus visae fuerint Newtoni Litterae, aliique ejusdem Manuscripti Codices. Neque modestioris Newtoni silentium, aut prona Leibnitii sedulitas, inventionem hujus Calculi sibi passim tribuentis, ullis imponet, qui ea pertractarint, quae ipse evolvi, instrumenta.

der der erwähnte Angriff geschah; deshalb musste der zweite Schüler Joh. Bernoulli's in Frankreich, Varignon, die Abwehr desselben übernehmen. Dieser Angriff Rolle's war so ungeschickt und zeugte von so grosser Unkenntniss des Wesens der Differentialrechnung, dass es Varignon nicht schwer fiel, die Vertheidigung zu führen; er wollte indess nicht ohne Zustimmung Joh. Bernoulli's und Leibnizens in dieser Sache handeln, deshalb theilte er seine Erwiderung Joh. Bernoulli mit, durch den Leibniz davon Kenntniss erhielt. Dieser wurde dadurch zu einigen weiteren Bemerkungen veranlasst, über welche er nach seiner Gewohnheit das Urtheil Joh. Bernoulli's einholte. Da unter andern Rolle behauptet hatte, dass die Differentialrechnung mit der Methode Hudde's hinsichtlich der Bestimmung der Maxima in Widerspruch stände, so ist namentlich das Wesen der letzteren längere Zeit der Gegenstand der Correspondenz zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli.*) Obwohl die Haltlosigkeit dieser Angriffe Rolle's auf die Zuverlässigkeit der Differentialrechnung zu offenbar war, als dass Leibniz grosses Gewicht hätte darauf legen können, so empfand er doch in Folge der wiederholten Anfechtungen recht lebhaft, wie nöthig es sei, der Differentialrechnung eine feste Begründung zu geben. Unter dem 31. Dec. 1700 schreibt er an Joh. Bernoulli: Hujusmodi adversarii, quales Nieuwentiit et Rollius et Cluverius (alias ceteris longe praeferendus) nostra non evertent, sed magis novis palmis decorabunt: interim perutile est os illi occludi per reductionem ad Demonstrationes Veterum more formatas, et egregiam ea in re operam navaturum puto Dn. Varignonium. —

Leibniz war zugleich mit Newton und Joh. Bernoulli im Jahre 1699 Mitglied der französischen Akademie der Wissenschaften geworden; um dieselbe Zeit ging mit dem Beginn des neuen Jahrhunderts einer seiner Lieblingswünsche durch die Municifenz des ersten Königs von Preussen in Erfüllung, die Errichtung eines ähnlichen Instituts in der preussischen Hauptstadt, des ersten in Deutschland, und er selbst wurde mit der weiteren Einrichtung und mit der Führung des Präsidiums beauftragt. Er begriff, wie es scheint, dass er

*) Eine ausführliche Darstellung dieser Angriffe Rolle's und des dadurch entstandenen Streites zwischen den Anhängern der neuen Analysis und ihren Gegnern in der französischen Akademie findet sich im Montucla hist. des mathémat. Tom. III. p. 110 ff.

als Mitglied dieser gelehrten Vereine auf dem Gebiete der exacten Wissenschaften sich bethätigen müsse; deshalb beschloss er, frühere Untersuchungen wieder vorzunehmen und sie so weit zu führen, dass sie veröffentlicht werden konnten. Er fiel zuerst auf die Dyadik, über die er das Urtheil Joh. Bernoulli's zu vernehmen wünschte; dieser fand jedoch keinen besondern Geschmack daran. Zugleich beklagt sich Leibniz bitter, dass Joh. Bernoulli ihm seine neuen Arbeiten auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften beharrlich vorenthält und keine Mittheilung macht; er schreibt (20. Apr. 1702): Pene est, cur idem faciam quod Varignonius, id est querar, quod tamdiu me Tuas praeclaras cogitationes (quarum multas domi Tuae nasci in dies non dubito) vis ignorare, ita ut plerumque quae facis, demum ex Diariis vel aliunde discam. Um zu beweisen, dass er fortan der Mathematik eine grössere Aufmerksamkeit wiederum zuzuwenden sich entschlossen habe, versucht Leibniz sogleich die Probleme, die Joh. Bernoulli ursprünglich Varignon zur Lösung vorgelegt hatte. In dem Schreiben, das vom 24. Jun. 1702 aus dem Schlosse zu Lützelburg datirt ist, versichert er die Lösung der drei ersten zu haben; besonders aber nimmt er von dem sechsten Problem, in dem es sich um die Integration von Quotienten mit rationalen Ausdrücken in Zähler und Nenner handelt, Veranlassung, auf seine früheren Untersuchungen, die er für sein beabsichtigtes Werk: Scientia infiniti, bestimmt hatte, zurückzukommen. Er giebt hier nur in allgemeinen Umrissen den Gang seiner Untersuchungen an, denn er hatte sie, was die Integration von rationalen gebrochenen Functionen anlangt, bereits vollständig in einer Abhandlung zusammengestellt, die unter dem Titel: Specimen novum Analyseos pro Scientia Infiniti circa Summas et Quadraturas, in den Act. Erudit. des Jahres 1702 erschien; eine Fortsetzung davon folgte in derselben Zeitschrift im nächsten Jahre 1703. Im gegenwärtigen Briefe entwickelt Leibniz zugleich auch den Weg, den er zur Integration irrationaler Ausdrücke eingeschlagen, und die Ergebnisse, die er bereits gewonnen. Wie aus seinen hinterlasseuen Manuscripten hervorgeht, beschäftigte dieser Theil der Integralrechnung ihn um diese Zeit vorzugsweise; unfähig gegenwärtig, weitläufige Rechnungen auszuführen, giebt er Joh. Bernoulli Weisungen, wie hier weiter zu verfahren sei, und empfiehlt ihm die Fortsetzung seiner Untersuchungen.

Im Anfange des Jahres 1703 war Joh. Bernoulli von einem in der Nähe von Gröningen wohnenden Mathematiker folgendes Problem

vorgelegt worden: Une courbe algebraique (vulgairement appellée geometrique) étant donnée, la transformer en une infinité d'autres aussy geometriques, mais d'especes differentes, lesquelles soient chacune de même longueur que la proposée. Joh. Bernoulli theilte es Leibniz mit und dieser erdachte sogleich ein Verfahren zur Lösung desselben. Er betrachtete nämlich die gegebene Curve als Evolute, die gesuchte als die evolvirende Curve und vermittelte die Herleitung der einen aus der andern durch eine dritte algebraische Curve, die er als einen Hohlspiegel annimmt, von dem die von der gegebenen Curve ausgehenden Tangenten zurückgeworfen, die gesuchte Curve bilden. Indem er für die als Spiegel wirkende Curve ein brechendes Mittel setzte, erweiterte er das Problem und löste es noch für den Fall, dass die gesuchte Curve in irgend welchem Verhältniss zu der gegebenen steht. Chasles (Geschichte der Geometrie, in's Deutsche übersetzt von Sohncke S. 101 f.) vindicirt Hugens das Princip dieses Verfahrens, der es zuerst in seinem berühmten Werke über das Licht zur Anwendung brachte. Der berühmte Geschichtschreiber der Geometrie bemerkt bei dieser Gelegenheit, dass diese Theorie Hugens', nachdem sie über ein Jahrhundert in unerklärliche Vergessenheit gerathen, durch Fresnel's Arbeiten über die Polarisation des Lichtes aus ihrer Verborgenheit wieder hervorgezogen worden sei, ohne Leibnizens zu gedenken, der, wie es scheint, unbekannt mit der Theorie von Hugens, bei der Lösung des obigen Problems sie von neuem erdachte. Joh. Bernoulli, der wider Erwarten von Leibniz mit der Nachricht von der Lösung des Problems überrascht wurde, gestand offen seine Bewunderung der Neuheit des Verfahrens; er konnte jedoch seinem selbstsüchtigen Naturell gemäss eine Kritik nicht zurückhalten: er tadelte, dass die Lösung Leibnizens das zweite Differential bedürfe, anstatt die seine sich nur auf die ersten stütze. Er zögerte indess mit der Mittheilung seines Verfahrens, und da er zu Anfang des Jahres 1704 in eine schwere Krankheit verfiel und zugleich mit der Rückkehr in sein Vaterland umging, so geschah es, dass erst, nachdem er die durch den Tod seines Bruders erledigte Professur der Mathematik an der Universität zu Basel angetreten hatte, seine Methode zur Lösnng des in Rede stehenden Problems in der Act. Erudit. des Jahres 1705 erschien in der Abhandlung: Motus reptorius ejusque insignis usus pro lineis curvis in unam omnibus aequalem colligendis etc. In derselben erwähnte Joh. Bernoulli, dass auch von Leibniz ein Verfahren zur

Lösung des Problems gefunden wäre, indess dürfte dasselbe bei Anwendung auf specielle Fälle zu einer sehr verwickelten Rechnung führen. Da diese Veröffentlichung ohne Leibnizens Wissen geschah und zugleich auch nicht eben zu seinen Gunsten ausfiel, so äusserte er mit Recht seinen Unwillen über eine solche Kritik, unterliess jedoch eine Bekanntmachung seiner Methode, wie er es anfangs beschlossen hatte. Er drängt jedoch Joh. Bernoulli seine Kritik zu begründen und so zeigt denn derselbe, dass auch die Kreislinie als spiegelnde Curve genommen werden kann, die Leibniz ausgeschlossen hatte, und dass die Lösung Leibnizens insofern nicht allgemein sei, als sie an die Bedingung geknüpft sei, dass die spiegelnde Curve von hinreichender Grösse und dass die Entfernung von der gegebenen Curve bis zur spiegelnden überall grösser sein müsse, als $\frac{1}{4}$ des Durchmessers des Kreises, falls ein solcher als zurückwerfende Curve angenommen würde. Leibniz hatte, um den Tadel Joh. Bernoulli's zurückzuweisen, sein Verfahren für den besondern Fall, dass eine Ellipse als spiegelnde Curve angenommen wird, erläutert; von ihm genöthigt giebt denn auch Joh. Bernoulli zu Anfang des Jahres 1707 nach seiner Methode eine Construction der transformirten Curve, wobei er zugleich noch zeigt, dass sich Kreise angeben lassen, zwischen denen als Gränzen die transformirte Curve liegt.

Durch die Abhandlung Joh. Bernoulli's über den Motus reptorius war Leibniz bewogen worden, Ideen über die Erzeugung der Curven mittelst Bewegung, die vielleicht schon seit langer Zeit in seinen Manuscripten niedergelegt waren, zusammenzustellen; er veröffentlichte den betreffenden Aufsatz in den Act. Erudit. 1706 unter dem Titel: De lineae super linea incessu ejusque tribus speciebus, motu radente, motu provolutionis et composito ex ambobus. In der Aufregung über das taktlose Benehmen Joh. Bernoulli's hatte er bei der Abfassung desselben nicht mit gewohnter Ruhe und Ueberlegung gearbeitet, und so kam es, dass er selbst bald nach der Absendung Fehler darin bemerkte, die denn auch von Joh. Bernoulli in seinen Briefen gerügt werden. — Ausserdem werden fortwährend in dieser Correspondenz zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli alle damaligen Erscheinungen in der mathematischen Literatur besprochen, worüber Leibniz in der Regel das Urtheil des letzteren einholt. Mihi, schreibt er den 27. Jun. 1708, ut facile judicas, talibus hodie vacare non licet.

Obwohl Leibniz in seinen letzten Lebensjahren immer mehr

und mehr dem Geist seiner Zeit huldigte und dadurch, dass er alle Gebiete des Wissens umfassen wollte, seine Thätigkeit zersplitterte, so blieb doch die Mathematik seine Lieblingswissenschaft, deren Wachsthum und Blüthe ihm sehr am Herzen lag. Besonders verfolgte er die immer weitere Ausbreitung der höheren Analysis, so wie er sie geschaffen hatte, mit höchstem Interesse. Gegen Joh. Bernoulli war er fortwährend anregend und ermunterte ihn unablässig für die Wissenschaft thätig zu sein. Indess wird der Mangel eines Gegenstandes, der ein lebhaftes beiderseitiges Interesse für sich in Anspruch genommen hätte und an dem, wie an einem fortlaufenden Faden, die Correspondenz sich hätte fortspinnen können, immer fühlbarer; deshalb ist nicht zu verwundern, dass sie im Jahre 1710 beinahe zu erlöschen drohte. Leibniz war mit der Vollendung seines grossen historischen Werkes beschäftigt; dazu kamen diplomatische Geschäfte und zeitraubende Zerstreuungen an den Höfen von Berlin und Wolfenbüttel. Erst im Jahre 1712 findet sich ein Thema, durch dessen Erörterung wieder eine grössere Lebendigkeit in die Correspondenz kommt. Varignon hatte nämlich eine Recension von Guido Grandi's Schrift: De infinitis infinitorum et infinite parvorum ordinibus, Pisis 1710, an Joh. Bernoulli geschickt, der sie zur Aufnahme in die Acta Eruditorum an Leibniz sandte. Selbige gab Leibniz Veranlassung zu einer kurzen Abhandlung, die zugleich mit jener Recension in den Act. Erudit. 1712 erschien unter dem Titel: Observatio quod rationes sive proportiones non habeant locum circa quantitates nihilo minores etc. Er behauptet darin, dass die Proportion $1 : -1 = -1 : 1$ nicht richtig sei, obwohl die Produkte der Mittel- une Aussenglieder gleich wären; er begründet seine Behauptung mit Hülfe der Logarithmen, wobei er von dem Satz ausgeht: ratio, cui nullus datur respondens Logarithmus, ratio vera non est, und läugnet zugleich die Möglichkeit von Logarithmen negativer Zahlen. Dagegen meinte Joh. Bernoulli, dass man sich die logarithmische Linie, ähnlich wie die Hyperbel, aus zwei Zweigen auf beiden Seiten der Axe vorstellen könneund dass alsdann zu jeder Abscisse sowohl eine positive als negative Ordinate gehörte. Der Streit blieb unentschieden, ebenso wie später, als die Frage über die Existenz der Logarithmen negativer Zahlen zwischen Euler und d'Alembert von neuem zur Erörterung kam (siehe Klügel's mathematisches Wörterbuch Theil III. S. 571 ff.).

In demselben Jahre 1712 erschien das Commercium epistoli-

cum Joannis Collinsii aliorumque de Analysi promota, das unter den Auspicien der Königlichen Societät zu London herausgegeben die Documente enthalten sollte, um die Frage über den eigentlichen Entdecker der höhern Analysis endgültig zu entscheiden, nachdem die Plänkeleien Fatio's und die Angriffe Keill's zu keinem Resultate geführt hatten. Die erste Kunde davon erhielt Leibniz durch Joh. Bernoulli, dem die Nachricht brieflich von einem befreundeten Schottländer Burnet zugekommen war, und der bald darauf durch ein Schreiben seines auf einer Reise durch England begriffenen Neffen, Nicolaus Bernoulli, über die Stimmung der Engländer in Betreff Leibnizens genauer unterrichtet wurde. Dieser verweilte in den Jahren 1713 und 1714 längere Zeit in Wien und bekam erst nach seiner Rückkehr nach Hannover ein Exemplar des Commercium epistolicum zur Einsicht. Indessen musste er sich auf die Mittheilungen Joh. Bernoulli's verlassen, der aus Rücksicht gegen Newton bei der Streitfrage sich nicht öffentlich betheiligen wollte, obwohl er bereits vor dem Erscheinen des letzt genannten Werkes, vielleicht aus Eifersucht über den wachsenden Ruhm Newton's, eine Kritik der Principia in ihrer ersten Ausgabe begonnen hatte. Um aber nicht ganz stillzuschweigen, erliess Leibniz noch von Wien aus anonym ein fliegendes Blatt vom 29. Jul. 1713 datirt, in welchem er besonders die Ansichten Joh. Bernoulli's über die Streitfrage aus den Briefen desselben anführte. Gegen Ende des Jahres 1714 kehrte Leibniz nach Hannover zurück; er beschloss anfangs zur Vertheidigung seiner Rechte ein anderes vollständigeres Commercium epistolicum dem englischen entgegenzusetzen und zugleich durch Probleme, zu deren Behandlung er und Joh. Bernoulli allein die Methoden besassen, Newton und seine Anhänger auf die Probe zu stellen, in wie weit sie ihre Fluxionentheorie zur Lösung derselben zu gebrauchen verständen.*) Das erste Vorhaben gelangte jedoch nicht zur Ausführung; seine Manuscripte und Briefschaften befanden sich nicht in der besten Ordnung und es fehlte ihm die Geduld, aus dem Chaos das erforderliche Material hervorzusuchen; dagegen zog er mit Unterstützung Joh. Bernoulli's gegen

*) Dabo etiam operam, ut quaedam edam, in quibus Newtono aquam haerere scio, schreibt Leibniz unter dem 30. November 1714 an Joh. Bernoulli.

die Engländer mit dem Problem der rechtwinkligen Trajectorien *) zu Felde, zu dessen Behandlung beide die noch nicht öffentlich bekannt gemachte Methode der differentiatio de curva in curvam besassen. Die Aufgabe wurde von Nicolaus Bernoulli, dem Sohne Johann's, für den Fall, dass die durchschnittenen Curven Hyperbeln von einerlei Mittelpunkt und einerlei Scheitel sind, gelöst; desgleichen wurde die Aufgabe von Nicolaus Bernoulli, dem Neffen Johann's, und von Hermann allgemeiner behandelt. Kurz vor Leibnizens Tode erschien Newton's Auflösung; er übersandte sie an Joh. Bernoulli, um sein Urtheil darüber zu hören. Ehe jedoch dessen Antwort eintraf, hatte Leibniz bereits der Tod überrascht. Nach seinem Tode wurde der Kampf von Seiten Joh. Bernoulli's offen aufgenommen und siegreich mit grosser Demüthigung der Engländer weiter geführt (siehe Bossut Geschichte der Mathematik, deutsch von Reimer, Theil 2 S. 226 ff.).

Von der Correspondenz zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli erschien ein Abdruck noch bei Lebzeiten des letzteren im Jahre 1745 unter dem Titel: Virorum celebri. Leibnitii et Joh. Bernoullii commercium philosophicum et mathematicum, II Tom. 4. Man weiss nicht, wer die Herausgabe besorgt hat. Sie ist sehr lückenhaft und unvollständig; nur die wenigsten Briefe sind ohne Auslassungen abgedruckt, besonders aber fehlen viele Briefe Joh. Bernoulli's vom Jahre 1699 an. Die Lücken in den Briefen Joh. Bernoulli's sind grösstentheils dadurch entstanden, dass der unbekannte Herausgeber die harten und nicht eben auf feine Weise ausgedrückten Urtheile desselben über seine Zeitgenossen unterdrücken zu müssen glaubte. In dem vorliegenden Abdruck sind sie sämmtlich ausgefüllt; sie liefern ein treffliches Material, um ein deutliches Bild von dem Charakter Joh. Bernoulli's zu gewinnen. Desgleichen sind die fehlenden Briefe Joh. Bernoulli's, bis auf einen, nach den Originalen auf der Königl. Bibliothek zu Hannover ergänzt. Leider sind daselbst die Briefe Leibnizens, besonders aus den letzten Jahren, sehr unvollständig vorhanden, so dass dieselben grösstentheils so wiedergegeben werden mussten, wie sie in dem oben genannten Werke sich finden.

*) Invenire lineam, quae ad angulos rectos secet omnes curvas determinati ordinis ejusdem generis, exempli causa omnes hyperbolas ejusdem verticis et ejusdem centri idque via generali.

I.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Nisi insignis Tua humanitas jam multis nominibus mihi esset comperta, merito haesitarem an gravissima negotia, quibus Te distractissimum esse non ignoro, praesentibus hisce interpellare liceret: Quicquid tamen temeritatis hac in parte commissum fuerit, pro more singularis Tuae erga me benevolentiae, quam saepius jam persentiscere mihi contigit, haud difficulter condonabis. Nihil unquam magis mihi cordi fuit, quam divinae Matheseos studium, quippe quod Medicinae, cui et ego aliqualiter addictus, plurimum lucis confert clavemque praebet ad reseranda abditissima Naturae claustra. Huic scientiae, praesertim penitiori ejus parti, a juventute sedulo incumbens tantos in illa ope divinae gratiae feci progressus, ut, si dicere fas est, jamjam mihi comparaverim praecipuorum Mathematicorum applausum, cumprimis Academiae Scientiarum Parisiensis, aliorumque quorum necessitudinem in Gallia nactus sum; et Tibi ipsimet, Vir Celeberrime, libuit tenuia mea inventa pluris quam par est aestimare, deque iis benigniorem sententiam passim in Actis Lipsiensibus proferre, quam sperare ullatenus ausus fuerim. Qualiacunque autem illa sint, profiteor et usque profitebor, ortus illorum unice deberi subtilissimis Tuis lucubrationibus quas cum Orbe literato subinde communicare non dedignatus fuisti, quae et satis ostendunt nihil prorsus in universa Mathesi tam absconditum esse, quod stupendam aciem ingenii Tui acutioris subterfugiat: Hoc ipsum in causa est, ut semper in votis abuerim et eo collimarim, quo Amplitudini Tuae aliquandiu pro-

pior esse possem, si modo exoptata occasio sese offerret, ut tanquam ex scaturigine ipsa haurirem, quae hucusque non nisi ex rivulis remotissimis haurire licuit, et, si magnis addere licet parva, arduum studium mathematicum ad majorem perfectionis gradum promovendum adjuvarem. Cum vero non sine summo delectamento intellexerim, quod utut saevientis Martis fax ubique fere locorum sit accensa, nihilominus bonae artes et literae Vestris in regionibus non parum vigeant et floreant, et cum fama ad aures nostras pervenerit quod Celsissimus et Serenissimus Dux Antonius Ulricus juxta gravissima regiminis negotia eorumque prudentissimam administrationem, etiam plurimam voluptatem capiat arcanis naturae et artis, eorum indagationem benignissime promoveat, omniumque scientiarum praecipue Mathematicarum Cultores clementissimo nutu foveat et protegat; quam sane Regiam Suae Celsitudinis generositatem totus Eruditus Orbis nunquam satis laudabit, ego autem humillimo juxta ac profundissimo pectore perpetim recordabor: Hoc, inquam, cum intellexerim, enixe Te rogatum cupio, ut authoritate qua polles ob incomparabilem Tuam Eruditionem, causam meam ita agas apud Celsitudinem Suam, ut ad scopum optatum pertingere possim, quod utique Tibi difficile non erit, velim credas mihi opus fere longe gratissimum, quodque aeternum obstringet etc.

Dabam Basileae d. 20 Decemb. 1693.

Salutem officiosissimam Amp. Tuae dicit Frater meus.*)

---

*) Um das nachfolgende Schreiben Leibnizens besser zu verstehen, wird der Brief Joh. Bernoulli's an Mencken hier eingeschaltet.

Joh. Bernoulli an Mencken.

Ex nuperrimis Tuis ad fratrem datis pergratum fuit intelligere, Celeberrimum Dom. Leibnitium animum non mutasse mihi in vicina sua stationem quandam conciliandi, quod utique veritus fueram ob dissidium inter Serenissimum suum Principem Daniaeque Regem subito obortum, in his enim casibus ut fieri solet studiorum parva cura habetur: bello autem hoc feliciter in partu extincto, eo libentius et quidem summa gratitudine oblatam Dom. Leibnitii conditionem amplector; quod si hac in re Tuam operam, ut hactenus fecisti, ita porro contribuere velis, me qui Tuus jam sum totum mancipatum habebis. Haud igitur gravatim Dom. Leibnitio constans meum propositum significabis, ejusque responsionem per brevissimam viam huc perscribes; quam si rescivero, sine mora iter aggrediar atque me quantocyus ad locum qui assignabitur conferam.

In ultimo ad nos delato Actorum mense Septem. videre licuit

II.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Percommode accidit, quod ante monstratas Serenissimo Duci literas Tuas, mutata consilia et patriam urbem Tibi manum injecisse intellexi. Habet illa jus retractus, quanto magis jus retentionis? Atque illi quidem recte consuluisti; precor etiam ut Tibi, cui omnia fausta opto. Cum suis esse, etiam minore emolumento, dulce est, praesertim indubia spe majorum. Praeterea meo judicio ac sensu vel sola Fratris Tui, insignis Viri, consuetudo poterat Te illic tenere devinctum, dum Vobis mutuo et auxilio estis et incitamento. Mihi certe, si quis Vestri similis adesset, multum ea voluptas aliis plerisque potior foret. Ceterum non humanitati tan-

---

Celeb. Leibnitii generalem tetragonismorum effectionem per motum, quam sane peringeniosam deprehendo; jam ab aliquo tempore similes fere habebam cogitationes ex occasione eorum quae Nob. Hugenius in Hist. Erudit. publicavit, intentio autem mea erat excogitare modum generalem, quo omnes curvae tam Geometricae quam mechanicae ex tangentium proprietate per motum describi possent; modus quippe Leibnitii quo mechanicae describuntur, supponit Geometricas jam descriptas, quarum autem pleraeque non nisi per inventionem infinitorum punctorum (id quod summe operosum) construi possunt. Interim multa et miranda praestitit Magnes noster Leibnitius eo quod generaliter spatiorum quadraturas et curvarum rectificationes primus per motum quasi Geometrice determinavit; hoc unicum incommodum reperio, quod ob compositum machinae apparatum in praxi vix adhiberi possit, nisi in quibusdam casibus ubi simplicior evadit; caeterum mihi videor jam habere modum, quo machinatio aliquantulum compendiosior reddi possit, si quidem totum negotium in unico plano absolvi posse deprehendo.

Solutio mea problematis in Diario Parisiensi publicati, cujus Te in postremis meis participem feceram, in eodem Diario jam apparuit; contra quam Auctor problematis movit quasdam objectiones sed brevis momenti, ad quas responsionem ante paucos dies Parisios transmisi; Auctor autem, ut Gallorum laudabilis mos est qui promissis stare ac praemium extraneis adjudicare in honestum ducunt, hic procul dubio non acquiescet, utpote qui captionibus Gallicis nunquam carebit.

Frater Tibi Tuoque Amplissimo et Honoratissimo Affini suam salutem dicit, cui et meam adjungam officiosissimum etc.

Dabam Basileae d. 18. Febr. 1693.

tum, sed et benevolentiae imputo verba Epistolae Tuae in me effusiora, quibus non inferiores etiam res expecto. Itaque, si scripseris in posterum crebrius, et meditationum vestrarum egregiarum subinde me participem feceris, hoc ego maxima affectus argumenta putabo, praesertim cum ego nunc multo plura a Te sperem, quam a me possint reddi. Itaque favore erga me supplere Vos opus est, quod utilitati Vestrae decedet. Tuum ingenium, natura vividum, florens aetate, exercitationibus mathematicis excolitur: mihi si qua naturae vis fuit, tempore plurimum imminuta est, et quod restat, fere alio verti debet. Si quid tamen, uti memoras, pristina mea studia Vobis profuere, ego vicissim quasi jure quodam postulo, ut Vestris praeclaris inventis frui detur, etsi praeter sinceri animi laetos plausus praestare vix quicquam ipse possim.

Cogitavi aliquando me utcunque absolvere his studiis conscripto libello, quem Scientiam Infiniti, non incommode inscribi posse putem, in quo superioris Matheseos principia traderentur: haec enim ubique infiniti considerationem involvunt, quemadmodum Geometria quae Algebrae innititur, Mathesim habet generalem quantitatum nonnisi finitarum. Putem autem non moli tantum, sed et multo magis pretio Operis plurimum accessurum, si vestra egregia reperta adjicerentur; vestra enim non minus haec methodus, quam mea est. Itaque et Tuam et Fratris Tui, Viri eximii, sententiam expecto. In candore certe meo faxo, ne quid desideretis.

Gaudeo meum Tetragonismum geneneralem per motum*) Tibi (quemadmodum intellexi) non mediocriter probari: minus est impeditus, quam prima specie videtur, et vix Algebraicae Geometriae constructionibus per regulas mobiles facilitate cedit. Usus sum curva rigida praedescripta, ut generalem methodum traderem, nam alioqui curvarum descriptrices rectae rigidae vicariam pro curva operam praestare possunt. In eodem omnia plano fieri posse, jam annotaveram et ipse in posteriore scheda Actis inserta: sed vel hinc agnosco rem a Te accurate consideratam, qui idem monuisti. Praeclarum erit, si aliis Tangentium Conversis aptae constructiones accommodentur, quod nemo Te melius posset. — Multa multis

*) G. G. L. Supplementum Geometriae dimensoriae seu generalissima omnium Tetragonismorum effectio per motum, similiterque multiplex constructio lineae ex data tangentium conditione. Act. Erudit. an. 1693.

modis fieri possunt, sed semper prae caeteris aptam rationem et velut in hoc destinatam, habet rerum natura. In Quadraturis ipsis duo adhuc potissimum desidero; uuum pro Constructione, alterum pro Analysi. Nam etsi constructionem illam praedictam habeam, desiderarem tamen alias adhuc ad scientiae augmentum: et inter alia praestat reducere Quadraturas ad Rectificationes Curvarum, quam contra, ut vulgo fieri solet; eaque de re dudum cum successu cogitavi: nam simplicior utique est dimensio lineae, quam dimensio superficiei. Pro Analysi autem desidero reductionem Quadraturarum omnium ad certa quaedam genera, quae inter se invicem sint irreducibilia, aptasque in eam rem valorum expressiones velim.

Cum illustri Viro Dom. Marchione Hospitalio quae Tibi fuit liticula, compositam puto. Quanto pauciores sunt solidae scientiae cultores, eo magis eos inter se amicos esse convenit. Sunt tot alii, quos appello mercenarios in literis, qui nihil agerent, nisi vel necessitate, vel pravis cupiditatibus impellerentur. Hos inter se conflictari sinamus.

Vale et Dom. Fratrem Tuum, mihi aestimatissimum, a me officiose saluta.

Dabam Hanoverae 21. Martii 1694.

III.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Si Patria mihi abiturienti manum injecit, hoc tanto indignius fero, quanto majori spe, quam de laribus vestris mihi jamjam invisendis conceperam alebar: Repeto et denuo repetam, nec aliter potero quam deplorare sinistram meam sortem, quae me ab Ampl. Tuae praesentia separatum tenet. Utinam consilium et medium superstes esset, quod me in viciniam vestram vocaret. Sane Patria neque retentionis, neque retractus jus in me haberet: nec ejus dulcedo, vel etiam ipsa Fratris consuetudo me teneret devinctum; sed Fata regunt omnia. Caeterum tot tantisque Tui erga me affectus testimoniis abundat nupera Ampl. Tuae epistola, ut tantum non pudibundus obmutescam. Quae mihi attribuis, Tibi debentur;

laudes in quas excurris non promerui; meditationum mearum leviuscularum vis particeps reddi, sed quasi vero Sol a Planetis lumen mutuetur et scaturigo aquam ex rivulis petat. Mihi insuper concedis potestatem Tibi crebrius scribendi, non igitur indignaberis, si praesentes molestiam creaverint.

Primum intellexi ex literis Menkenianis Ampl. Tuam ad prelum parare opusculum complectens Scientiam infiniti, et pridie ante acceptam epistolam Tuam Dno. Menkenio rescripsi, simulque unum et alterum Tibi significandum commisi. Nobis interim et toti Orbi Literario multum gratulamur de futuro isto opere, et jam in antecessum singulare quid nobis promittimus, non dubitantes quin ut caeterae Tui ingenii proles, ita et hoc sui aestimatores ubique nacturum sit, praesertim eos qui, quod subtile est, a communi norunt discernere. Non autem e re fore puto, Vir Celeb. exigua nostra inventa Tuis adjungere: dolerem si foetus hic qui dubio procul jam omni possibili perfectione gaudet, a nobis dedecoratus in lumen ederetur. Si tamen verum, quod ajunt, Opposita juxta se posita magis elucescunt, eo lubentius Amp. Tuam petiti compotem facere poterimus, quod evidentius Tua a nostris dignoscentur. Id saltem velimus, ut mentem Tuam apertius explices, qua ratione hoc factum a nobis velis: num scilicet ut notabiliora nostra inventa Tibi ocyus transmittamus; num vero, ut Msto. Tuo ad nostras prius delato manus, quaedam adjiciamus in modum adnotationum.

Gaudeo Te agnoscere Tuum Tetragonismum generalem per motum a me accurate fuisse consideratum: illum cum Fratri meo, qui de ejus obscuritate querebatur, forsan ob non adhibitam perlectionem satis attentam, explicuissem, idem mecum de eo sensit et hanc Tuam methodum non mediocriter probavit. Non spero methodum tangentium inversam generalem unquam detectum iri: mihi tamen sunt diversae regulae, per quas peculiaria exempla quamplurima resolvo: in aliis autem pro rerum natura et constitutione diversas tento vias et plerumque non infeliciter. Hoc enim unicum inteudo, ut in aequationibus differentialibus indeterminatae x cum suis differentialibus dx separentur ab indeterminatis y et dy, quod palmarium est in hoc scrutinio, secus enim ad constructionem aequationis differentialis non pervenitur. Ad hoc autem praestandum multas habeo vias speciales. Ex. gr. si in aequatione differentiali nullae occurrunt quantitates constantes, quae dimensio-

num numerum adimplent, poterit illa, quantumvis perplexa, converti in aliam, ubi indeterminatae cum suis differentialibus unius nominis separantur ab indeterminatis alterius nominis, ponendo nempe $x = \frac{zy}{a}$, vel si mavis, $y = \frac{zx}{a}$. Si vero in aequatione differentiali sint etiam quantitates constantes, sed indeterminatae nonnisi ad unicam dimensionem ascendunt, res etiam facile mihi expedietur. Si aequatio differentialis eo reduci potest, quod plerumque fit, ut x sit = y multiplicato vel diviso per quantitatem aliquam, rationalem sive irrationalem, quomodocunque compositam ex differentialibus dx et dy, plus constante multiplicata vel divisa per quantitatem, si vis, aliter compositam ex differentialibus dx et dy, poterit illa aequatio semper construi; sed curva proveniens evadit interdum mechanica secundi generis, id est, quae requirit quadraturam mechanicae simplicis inquadrabilis: Contra vero interdum aequatio differentialis, licet secundi gradus, per mechanicam simplicem construitur, qualis illa $addx = dy^2$, cujus constructionem exhibui in schediasmate Fratris Actorum anni elapsi p. 254, quam etiam pridem, una cum Analysi, Dno. Marchioni Hospitalio communicaveram. Hac occasione oportune mentionem injiciam novae mihi repertae speciei curvarum percurrentium, quae quasi medium tenent inter geometricas Cartesii et inter mechanicas. Curvae geometricae vulgo dicuntur illae, quarum natura exprimitur per aequationem certi et determinati gradus: mechanicae, quarum aequatio constat ex differentialibus. Medias autem vel percurrentes appello, quarum aequatio est indeterminati gradus, id est, in qua literae indeterminatae et constantes ascendunt ad dimensionem indeterminatam, et proinde omnes possibiles dimensiones percurrunt. Hae aequationes a Tuis transcendertibus in eo differunt, quod numerus dimensionum in illis sit vagus et indeterminatus, in his vero determinatus sed incognitus. Cum autem hujusmodi curvae percurrentes peculiare requirant systema ad puncta in curvis, ad tangentes, ad quadraturas etc. definiendas, jam ab aliquo tempore mihi ideam formavi novi Calculi percurrentis, ubi modum trado sumendi differentialia aequationum percurrentium, et construendi omnes curvas percurrentes ope Logarithmicae vulgaris, quae, ut deprehendo, ipsa etiam est curva percurrens; ejus enim aequatio, positis abscissa x, applicata y et subtangente a, est haec $a^x = y$, adhibita nempe unitate, per quam dimensio x subintelli-

gitur divisa, ita ut hic non lineam indeterminatam, sed numerum indeterminatum denotet. Levissimum hic exemplum adducam. Sit (fig. 19) curva quaedam FGH percurrens, cujus aequatio est haec $x^x = y$ (positis CI, x, et IH, y) quaeritur ejus çonstructio, subtangens, et quadratura. Constructa ad axem productum FCM Logarithmica vulgari ABN, cujus prima applicata CA sit = unitati assumtae, ducatur BIH parallela ipsi DC, et BD parallela ipsi CA, fiatque $CM = \frac{CI \times CD}{CA}$, et ductae applicatae MN sumatur aequalis IH, erit punctum H in curva quaesita. Fiat denique ut IB + subtang. Logarit. ad eandem subtangentem, ita AC ad IL, erit IL subtangens ad punctum H. Spatium curvilineum FGHIC exprimitur per infinitas series simul sumtas, excepto unico casu, cum I cadit in A, tunc enim spatium FCAG exprimitur per unicam seriem: est enim (posita CA = 1) $FCAG = 1 - \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{3 \times 3 \times 3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5}$ etc. Tuam nunc expecto sententiam, Vir Ampl. num hujus Calculi percurrentis principia paulo fusius explicata mereantur publicari.

Recte, ut opinor, mones quod praestat reducere Quadraturas ad Rectificationes curvarum, quam contra; et hoc est quod etiam olim a me observatum fuit in constructione mea Catenariae, beneficio curvae parabolicae: mihi quoque plures sunt viae, quibus hoc in aliquibus casibus praestari potest: inter plures una prae aliis placet, per quam omnes illae Quadraturae curvarum, quarum applicatae in quantitatibus vel rationalibus vel saltem latus quadratum non excedentibus exprimuntur, ad Rectificationes aliarum reduci possunt. Quod reductionem quadraturarum ad certa genera spectat, de eadem re jam dudum quoque cogitavi, et quidem cum successu, quoad quadraturas circuli et hyperbolae, arbitror enim me omnes posse determinare quadraturas, quae ad praedictas reduci possunt; id quod jam Parisiis Dno. Hospitalio in meis, ipsius in gratiam compositis, lectionibus patefeci. Sic constructionem catenariae, quae prima fronte dependere videtur a quadratura curvae quatuor dimensionum, ad quadraturam hyperbolae reducere mihi facile fuit, quod tamen Nob. Hugenio satis arduum videbatur, ut conjicio ex iis quae dedit in Historia Operum Erudit. anno 1693, mense Febr.

A Fratre plurimum salutatus vale et fave etc.

Dabam Basileae d. 9. Maj. st. v. 1694.

IV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gratissimae mihi fuere Tuae literae, vel ideo quod amissam Tui videndi spem utcunque solantur. Gaudeo de illo, quem observo, animorum ac methodorum consensu: video enim multa Tibi animadversa, in quae et ego incideram.

Superiore anno*) ad Dominum March. Hospitalium scribere memini, esse mihi rationem omnes aequationes differentiales primi gradus (seu carentes differentio-differentialibus) in quibus adest constans implens leges homogeneorum, reducendi ad quadraturas. Id nunc Tibi quoque innotuisse animadverto; quemadmodum et methodum meam quaerendi naturam et tangentes curvarum exponentialiter transcendentium; ubi scilicet in aequatione curvae ipsa indeterminata ingreditur exponentem, qua ego jam a multo tempore sum usus, et specimina etiam Hugenio miseram,**) cui insolens id calculandi genus videbatur. Ego sic procedo: Sit verbi gratia (1) $x^x = y$. Ergo (2) $x \log. x = \log. y$ seu (3) $x\int \overline{dx : x} = \int \overline{dy : y}$. Datur ergo log. y ex data x ejusque Logarithmo, adeoque datur et y. Porro differentiando ex aeq. 3 fit (4) $dx + dx\int \overline{dx : x} = dy : y$, seu $dy : dx = y, \overline{1 + \int dx : x}$. Ergo habetur et ductus tangentium ex positis Logarithmis. De Quadratura Figurae res est altioris indaginis.

Ex transcendentibus aequationibus ego has ipsas semper judicavi simplicissimas. Nam tales aequationes finitae sunt, nec nisi ordinarias quantitates habent ingredientes; immiscet se tamen, profundiore quadam ratione, transcendentalitas seu infinitum. Aliquoties in Actis de illis mentionem injeci, sed Methodum calculo tractandi Operi meo reservaveram; tametsi res facilis sit animadvertenti connexionem cum Logarithmis.

Elegantissima videtur series illa tua $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4}$ etc. quae aream quandam dictae figurae exhibet. Quomodo inde oriatur, non video.

---

*) Siehe Band II. S. 218 ff.

**) Siehe Band II. S. 53. 56.

Si potes determinare omnes quadraturas, quae reducuntur ad quadraturam Circuli vel Hyperbolae, rem praestas egregiam, gratumque erit videre quid Dno. Marchioni Hospitalio communicaveris. Mihi ipsi nondum vacavit calculos instituere necessarios ad dijudicandum, annon curva Ellipseos vel Hyperbolae reduci possit ad Hyperbolae et Circuli quadraturas.

Curvas ex Tangentium proprietate invenio, peculiari calculi differentialis usu; ut si (fig. 20) data sit relatio inter Ap et pC normalem ad curvam; item si detur relatio inter Ap et $A\pi$, vel inter $A\Theta$ et AT. Eaque Methodus ad plura adhuc porrigi potest. Fundamentum est in iis, quae non ita pridem in Actis dedi April. 1692, nempe quod sic curva quaesita formatur linearum infinitarum positione datarum intersectione. Sic si pC detur ex Ap, formatur linea AC intersectione circulorum positione datorum, centris p, radiis pC descriptorum. Si detur relatio inter Ap et $A\pi$, dantur positione ipsae $p\pi$, quarum concursu formabitur linea, cujus evolutione habebitur linea AC. Si detur relatio inter AT et $A\Theta$, dabuntur positione ipsae $T\Theta$, quarum concursu formabitur linea AC etc.

Illud adjiciam pro Quadratura figurae $x^x = y$ per seriem, non opus esse recurrere ad numerum infinitum Serierum infinitarum. Nam aequatio liberata a vinculis summatoriis, erit (⊙) $yy\,d\overline{x^2} + x\,d\overline{y^2} = yx\,ddy$, posito dx esse constantem; unde faciendo $y = b + cx + ex^2 + fx^3 + gx^4$ etc. habebitur etiam yy, et dy et $d\overline{y^2}$ et ddy, quibus valoribus substitutis in aequatione ⊙, prodibit aequatio identica, seu cujus omnes termini erunt tollendi, et ita ad obtinendam destructionem invenientur ipsae b, c, e, f etc. quibus habitis, habetur et $\int y\,dx = bx + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{3}cx^3 + \frac{1}{4}fx^4$ etc. Ita quaevis hujusmodi facile ad commodam seriem revoco. Eamque methodum eo majoris faciendam puto, quod est generalissima praxique aptissima, et ad omnes differentialitatis gradus porrigitur, quemadmodum id explicavi in Actis.*) Pergratum quoque erit discere specialem tuam Methodum, qua construis curvam, cum datur $x = y$ (multi-

---

*) G. G. L. Supplementum Geometricae practicae sese ad problemata transcendentia extendens, ope Methodi novae generalissimae per series infinitas. Acta Erudit. 1693 April. p. 178.

plicatae per quantitatem formatam ex dy, dx) + a (multiplicatae per aliam formatam ex dy, dx).

Quae ab amicis Operi meo adjicienda suppeditabuntur, separari a meis aequissimum est, ut sua cuique merita in rem literariam constent. Non omnia unus possum agere, nec si possim, velim, satis per alia distractus.

Primae a me gratiae Bernoulliis debentur, vos enim primi effecistis, ut qualiacunque tentamina mea in usus publicos transferrentur. Et Tua opera Dominus Marchio Hospitalius nobis accessit. Hujus admonitu et Hugenius, quamvis ipse per se maximus Geometra, delectari nostris coepit. Nam etsi antea mecum commutaret literas, nondum tamen hoc Calculi genere capiebatur, quod vim ejus nondum propriis meditationibus comperisset. Quae cum ita sint, quod molior ego Opus, non magis meum quam vestrum erit; idque Titulus ipse ita profitebitur, uti vos probabitis. Meditata ergo Vestra speciminave parate, ut lubet, et prout videbitur indicate vel summittite. Prorsus utar conditione Vestra ex praescripto, aut certe nihil nisi Vobis consciis consentientibusque mutabo. Vale et clarissimum virum Fratrem Tuum a me saluta, qui sum etc.

Hanoverae 7. Jun. 1694.

P. S. Duos olim Helvetios novi in studiis quoque Mathematicis et Physicis egregios, Ottium et Scretam. Quid illi nunc agant scire pervelim, nam vivere et valere spero.

V.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Cum ante octiduum a rure (ubi per aliquot menses commoratus aquarum Fabariensium gratia mihi potandarum) in urbem reverterer, postremae Tuae gratissimae mihi demum tradebantur; quod causae est, ut ob ingruentes nundinas Lipsienses, ad quas Nostrates jamjam abituriunt, Te tui petiti omnino compotem reddere nequeam. Breviter tamen quantum per temporis augustiam licet, ad Tuas respondebo.

Gaudeo Tibi quoque esse consideratas curvas illas quas vocas exponentialiter transcendentes, ego autem percurrentes; quid peculiare in illis observarim, paucis exponam: Aequatio percurreus constat quantitatibus percurrentibus, quae sunt vel primi, secundi, tertii vel ulterioris generis; quantitas percurrens primi generis est, cum ejus exponens est numerus vel quantitas simpliciter indeterminata ut y^m; secundi vero generis, cum ejus exponens est quantitas percurrens primi generis ut y^{m^n}; et ita de aliis. Siquidem autem exponentes dimensionum sunt numeri, hic vero per literas indeterminatas quae lineas denotant exprimuntur, assumitur quaedam linea constans b pro unitate, per quam si lineae indeterminatae dividuntur proveniunt numeri, sic itaque $y^m = y^{\frac{m}{b}}$, pariter si aequationis percurrentis membra non ubique aequalem numerum dimensionum habeant, multiplicata intellignntur per b ad sufficientem dimensionem elevatam ita ut numerus dimensionum compleatur, sic si proponatur aequatio $x^x = y$, intelligitur y multiplicata per b^{x-1}, et sic aequatio $x^x = b^{x-1}y$, utrobique aequales dimensiones habebit. His praeliminatis sit ABb (fig. 21) curva logarithmica in qua applicata $AC = b = 1$, subtangens a, et BD ordinata varians vel indeterminata $= x$, appello CD, lx id est logarithmum ipsius x : Si $BD = y$, m, n etc. erit pariter $CD = ly$, lm, ln etc.: Sit bd elementaliter distans, erit BD existente x, y; m, n etc. $bg = dx$, dy, dm, dn etc. $Dd = dlx$, dly, dlm, dln etc. id est = differentiali ipsius lx, ly, lm, ln etc. Quoniam autem ex natura logarithmicae $BD \times Dd = a \times bg$, erit xdlx, ydly, mdlm, ndln etc. = adx, ady, adm, adn etc. ideoque dlx, dly, dlm, dln etc. $= \frac{adx}{x}$, $\frac{ady}{y}$, $\frac{adm}{m}$, $\frac{adn}{n}$ etc. Constat etiam quod logarithmus quantitatis ex multiplicatione progenitae sit = summae logarithmorum partium multiplicantium, ut $lxyz = lx + ly + lz$, et contra logarithmus quantitatis divisae = differentiae logarithmorum dividendae et dividentis, ut $l\frac{x}{y} = lx - ly$, $l\frac{xy}{z} = lx + ly - lz$, $l\frac{x}{zy} = lx - lz - ly$, item logarithmus quantitatis percurrentis = exponenti ducto in logarithmum radicis: sic $lx^m = mlx$, $ly^{m^n} = m^n ly$, $lx^m y^n = mlx + nly$, $l\frac{x^m}{y^n} = mlx - nly$.

Ostendendum nunc quo pacto quantitatum percurrentium differentialia sumenda sint: Sit quantitas percurrens primi generis m^n, quae ponatur $= s$; ergo $n l m = l s$, sumtisque per modum vulgarem differentialibus $n d l m + l m d n = d l s$; per ea autem quae supra diximus $d l m = \frac{a d m}{m}$, et $d l s = \frac{a d s}{s}$, ideoque $\frac{a n d m}{m} + l m d n = \frac{a d s}{s} =$ (ob $m^n = s$) $\frac{a d s}{m^n}$: invenitur itaque $d s$, id est diff. $m^n = n m^{n-1} d m + \frac{m^n l m d n}{a}$ Q. E. I. Esto nunc quantitas percurrens secundi generis m^{n^p}; cujus differentiale invenitur sic: Sit ut ante $m^{n^p} = s$, ergo $n^p l m = l s$, sumtis modo communi differentialibus $n^p d l m + l m d n^p = d l s$, quoniam autem ut modo invenimus $d n^p = p n^{p-1} d n + \frac{n^p l n d p}{a}$, et $d l m = \frac{a d m}{m}$, $d l s = \frac{a d s}{s} = \frac{a d s}{m^{n^p}}$, habebitur $d s$, hoc est $d m^{n^p} = n^p m^{n^p - 1} d m + \frac{p n^{p-1} m^{n^p} l m d n}{a} + \frac{n^p m^{n^p} l n l m d p}{a a}$. Eodem modo inveniuntur differentialia quantitatum percurrentium tertii, quarti etc. generis. Non majori difficultate reperiuntur differentialia quantitatum quomodocunque compositarum ex percurrentibus ejusdem vel diversorum generum, nam $d m^n p^q = p^q d m^n + m^n d p^q$, et $d \frac{m^n}{p^q} = \frac{p^q d m^n - m^n d p^q}{p^{2q}}$ etc. in quibus si substituatur valor ipsorum $d p^q$, $d m^n$ modo supra inventus, habebuntur differentialia quaesita.

Ut horum quae hucusque explicui, usus videatur, unum vel alterum problema resolvam circa curvas percurrentes. 1. Quaeritur longitudo subtangentis curvae percurrentis $x^x = y$. Sol. Sumtis per methodum exhibitam utrobique differentialibus erit $x^x d x + \frac{x^x l x d x}{a} = d y$, vel (substituto y loco x^x) $y d x + \frac{y l x d x}{a} = d y$ $=$ (ut dimensionis numerus compleatur) $b d y$, et ordinata aequatione $a y d x + y l x d x = a b d y$, ideoque $a y + y l x . a b :: d y . d x :: y$. subtang. quae proinde erit $= \frac{a b}{a + l x}$, et quia ob $l x$ geometrice determinari non potest, ope logarithmicae facile sic construitur: Sit enim curva proposita (fig. 22) $F G H$, $C I = x$, $I H = y$, determinanda est tangens in puncto H. Fiat logarithmica $A B$, cujus subtangens

$= a$, et sumta in illa applicata $CA = b = 1$, producatur HI donec occurrat logarithmicae in B, erit $DB = x$, proinde CD vel $IB = lx$; si itaque fiat ut IB + subtang. logarith. ad eandem subtang. ita AC ad IL, erit IL subtangens quaesita curvae. Coroll. Ex hac constructione patet subtangentem, quae respondet puncto G, esse ipsam AC. Curva autem ipsa FGH sic construitur: $x^x = y$ et proinde $x lx = ly = b ly$, erit $ly = \frac{x lx}{b} = \frac{CI \times CD}{CA}$; sumta ergo CM aequali $\frac{CI \times CD}{CA}$, erit $CM = ly$, et ideo $MN = y = IH$. Exinde sequitur $AG = AC$. Quadratura spatii CFHI peculiari artificio per seriem ita exhibetur: Quia $HI = x^x$, erit integr. $x^x dx =$ spatio quaesito; hoc autem integrale ita invenitur: $HI = MN$, $CA = b$, subtang. logarit. $= a$, CM (per constr.) $= \frac{CI \times CD}{CA} = \frac{x lx}{b}$, ex datis autem CA, CM et subtangente per modum aliunde cognitum invenitur applicata MN seu HI seu $x^x = b + \frac{x lx^1}{1.a} + \frac{xx lx^2}{1.2aab}$ $+ \frac{x^3 lx^3}{1.2.3a^3bb} + \frac{x^4 lx^4}{1.2.3.4.a^4b^3}$ etc. ideoque $x^x dx$ seu elem. sp. $CFHI = b dx + \frac{x lx^1 dx}{1.a} + \frac{xx lx^2 dx}{1.2aab} + \frac{x^3 lx^3 dx}{1.2.3a^3bb} + \frac{x^4 lx^4 dx}{1.2.3.4a^4b^3}$ etc. Hujus seriei terminorum singulorum integralia sumi poterunt, postquam ostenderim, quo pacto quilibet terminus in alios plures convertendus, quorum integralia haberi possunt, ut sequens laterculus ostendit qui supponit $dlx = \frac{adx}{x}$.

$$dx = dx$$

$$xlxdx = xlxdx + \tfrac{1}{2} xxdlx \,|\, - \tfrac{1}{2} axdx$$

$$xxlx^2dx = xxlx^2dx + \tfrac{2}{3} x^3lxdlx \,\Big|\, - \tfrac{2}{3} axxlxdx - \frac{2}{3.3} ax^3dlx \,\Big|\, + \frac{2}{3.3} aaxxdx$$

$$x^3lx^3dx = x^3lx^3dx + \tfrac{3}{4} x^4lx^2dlx \,\Big|\, - \tfrac{3}{4} ax^3lx^2dx - \frac{3.2}{4.4} ax^4lxdlx \,\Big|\, + \frac{3.2}{4.4} aax^3lxdx$$
$$+ \frac{3.2}{4.4.4} aax^4dlx \,\Big|\, - \frac{3.2}{4.4.4} a^3x^3dx$$

$$x^4lx^4dx = x^4lx^4dx + \frac{4}{5} x^5lx^3dlx \,\Big|\, - \tfrac{4}{5} ax^4lx^3dx - \frac{4.3}{5.5} ax^5lx^2dlx \,\Big|$$
$$+ \frac{4.3}{5.5} aax^4lx^2dx + \frac{4.3.2}{5.5.5} aax^5lxdlx \,\Big|\, - \frac{4.3.2}{5.5.5} a^3x^4lxdx$$
$$- \frac{4.3.2}{5.5.5.5} a^3x^5dlx \,\Big|\, + \frac{4.3.2}{5.5.5.5} a^4x^4dx$$

Sumtis itaque integralibus per partes duabus lineolis interclusas provenit

$$\text{int. } dx = x$$

$$\text{int. } xlxdx = \tfrac{1}{2} xxlx - \frac{1}{2.2} axx$$

$$\text{int. } xxlx^2dx = \tfrac{1}{3} x^3lx^2 - \frac{2}{3.3} ax^3lx + \frac{2}{3.3.3} aax^3$$

$$\text{int. } x^3lx^3dx = \tfrac{1}{4} x^4lx^3 - \frac{3}{4.4} ax^4lx^2 + \frac{3.2}{4.4.4} aax^4lx - \frac{3.2}{4.4.4.4} a^3x^4$$

$$\text{int. } x^4lx^4dx = \tfrac{1}{5} x^5lx^4 - \frac{4}{5.5} ax^5lx^3 + \frac{4.3}{5.5.5} aax^5lx^2 - \frac{4.3.2}{5.5.5.5} a^3x^5lx + \frac{4.3.2}{5.5.5.5.5} a^4x^5$$

Multiplicatis his integralibus per correspondentes terminos hujus seriei

$b, \frac{1}{1.a}, \frac{1}{1.2aab}, \frac{1}{1.2.3.a^3bb}, \frac{1}{1.2.3.4a^4b^3}$ etc. et positis seriebus quae sunt verticales horizontalibus proveniet int. $x^x dx$ seu spatium CFHI =

$$+ bx + \frac{xxlx}{1.2a} + \frac{x^3lx^2}{1.2.3aab} + \frac{x^4lx^3}{1.2.3.4a^3bb} + \frac{x^5lx^4}{1.2.3.4.5a^4b^3} \text{ etc.}$$

$$- \frac{xx}{2.2} - \frac{x^3lx}{1.3.3ab} - \frac{x^4lx^2}{1.2.4.4aabb} - \frac{x^5lx^3}{1.2.3.5.5a^3b^3} \text{ etc.}$$

$$+ \frac{x^3}{3.3.3b} + \frac{x^4lx}{1.4.4.4abb} + \frac{x^5lx^2}{1.2.5.5.5aab^3} \text{ etc.}$$

$$- \frac{x^4}{4.4.4.4bb} - \frac{x^5lx}{1.5.5.5.5ab^3} \text{ etc.}$$

$$+ \frac{x^5}{5.5.5.5.5b^3} \text{ etc.}$$

Hinc si $x = b = 1$, erit $lx = 0$, proinde quoque lx^2, lx^3, lx^4 etc. $= 0$, spatium autem CFHI degenerabit in CFGA, quod itaque evanescentibus singulis serierum terminis exceptis primis erit $= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5}$ etc.

Modus hic quadraturas determinandi per series infinitas non solum succedit in curvis percurrentibus, sed nonnunquam aliis quoque adhiberi potest.

II. Quaeritur subtangens curvae $c^x = y$. Sol. $x l c = l y$, $l c\, d x = d l y = \frac{a\, d y}{y}$, $y l c\, d x = a\, d y$, ergo $y l c . a :: d y . d x :: y . s$ ideoque $s = \frac{a}{l c} =$ constant; quod indicat ipsam curvam quaesitam esse Logarithmicam, et vice versa Logarithmicam esse curvam percurrentem.

III. Determinanda est subtangens curvae $x^x = c^y$. Sol. Sumatur utriusque differentiale et habebitur $x^x d x + \frac{x^x l x\, d x}{a} = \frac{c^y l c\, d y}{a}$, vel (ob $c^y = x^x$) $d x + \frac{l x\, d x}{a} = \frac{l c\, d y}{a}$, aut $a d x + l x\, d x = l c\, d y$; ideoque $a + l x . l c :: d y . d x :: y . s$, ergo $s = \frac{y l c}{a + l x}$. Quadratura facile ita invenitur: quoniam $y l c = x l x$, erit $y = \frac{x l x}{l c}$, et $y d x = \frac{x l x\, d x}{l c} = \frac{x l x\, d x}{l c} + \frac{\frac{1}{2} x x\, d l x}{l c} \Big| - \frac{\frac{1}{2} a x\, d x}{l c}$, ideoque integr. $y d x = \frac{\frac{1}{2} x x l x}{l c} - \frac{\frac{1}{4} a x x}{l c}$.

Methodus haec applicari etiam potest ad curvas percurrentes, quarum aequationes pluribus quam duobus terminis constant, qualis est haec $x^x + x^c = x^y + y$: sumtis enim separatim differentialibus cujusque termini per modum generalem exhibitum, prodibit aequatio differentialis, in qua si fiat ut summa terminorum cum $d x$ ad summam terminorum cum $d y$ multiplicatorum ita y ad s, habebitur valor subtangentis quaesitae: Diff. $x^x = x^x d x + \frac{x^x l x\, d x}{a}$, diff. $x^c = c x^{c-1} d x$, diff. $x^y = y x^{y-1} d x + \frac{x^y l x\, d y}{a}$, diff. $y = d y$, ergo in aequationem redactis habebitur $x^x d x + \frac{x^x l x\, d x}{a} + c x^{c-1} d x - y x^{y-1} d x = \frac{x^y l x\, d y}{a} + d y$, ideoque $s = \frac{y x^y l x + a y}{a x^x + x^x l x + a c x^{c-1} - a y x^{y-1}}$ quae quantumvis composita ope logarithmicae construi potest, quia quaevis quantitas percurrens separatim sumta per illam construi potest.

Eadem haec methodus etiam locum habet in curvis percurrentibus altioris generis, omniaque quae dicta sunt de aequationibus

percurrentibus primi generis applicari possunt ad cujuscunque generis percurrentes.

Diutius quam par est, Vir Celeberrime, his immoror, quae forsitan jam me melius nosti; interim meas super hac materia meditationes tecum communicare volui, ut quousque cum Tuis conspirent videas; id unicum adhuc addere liceat, quod caetera quae circa hujusmodi curvas invenienda restant, ut earum applicatae maximae et minimae, puncta flexus, causticae et evolutae aliaque ope calculi percurrentis etiam facile expediantur.

Egregium est (ut ad alia pergam) quod annotasti, curvas interdum ex tangentium proprietate describi posse per intersectiones infinitarum curvarum; ratio modi quem tradis, cuivis attendenti manifesta fit; interim observo istiusmodi curvas plerumque esse algebraicas vel saltem ex algebraicarum evolutione generari, quorum proinde puncta etiam algebraice determinari possunt. Sic si (fig. 23) PC normalis ad curvam detur ex AP, i. e. si PC sit aequalis applicatae PR curvae datae AR, determinabitur punctum C, abscindendo subtensam PC aequalem PR ex circulo PCΘ descripto subtangente PΘ tanquam diametro; hinc et ipsa ducta ΘC erit tangens curvae AC. Si detur relatio inter (fig. 24) AT et AΘ, i. e. si AT sit = applicatae ΘR curvae AR datae, habebitur punctum C, sumendo ΘC quartam proportionalem ad AP, PΘ, et ΘT.

Circa quadraturas quae reduci possunt ad quadraturas circuli vel hyperbolae, hoc habeo: Omne spatium cujus elementum exprimitur per quantitatem differentialem, quae per aliam factam positionem literarum reducitur ad $dx \times x^p\sqrt{aa \mp xx}$ vel $\frac{dx \times x^p}{\sqrt{aa \mp xx}}$, erit aut quadrabile aut dependet a quadratura circuli aut hyperbolae, quod demonstrare possum; sed vice versa si aliquod spatium est quadrabile vel si dependet ab alterutra istarum quadraturarum, ejus elementum necessario quidem mutari posse debet in aliud, quod exprimatur per alterutram expressionem differentialem ope novae cujusdam suppositionis literarum; regulam autem generalem pro hac suppositione generaliter instituenda adhucdum desidero, nec unquam inventum iri spero; saltem non magis quam illam, per quam cognosci posset, num aequatio algebraica quantivis gradus et quantumvis composita deprimibilis esset nec ne. Si quis enim quantitatis alicujus irrationalis vel valde compositae sumeret differentiale (quod facile fit) illudque mihi integrandum proponeret, nescio sane

an non diu ipsi inhaererem et tandem non nisi casu et palpando vel etiam nunquam eo pervenirem. Id saltem asserere ausim, rectificationem ellipsis et hyperbolae ad earundem quadraturas reduci non posse, harum quippe curvarum elementa ad neutram dictarum formularum redigi possunt, facile enim omnes possibiles et necessariae suppositiones instituuntur.

Quod concernit reductionem quadraturarum ad rectificationes curvarum, aliqualis modus prodibit in Actis, ubi curvam aequabilis accessus et recessus a puncto dato, ut et elasticam construo per rectificationem curvae algebraicae, quod frater meus non nisi per quadraturam spatii et rectificationem mechanicae construxit. Simulque generalem adnecto ideam constructionis cujusvis datae aequationis differentialis primi gradus nulla adhibita separatione indeterminatarum.

Mirifice placet methodus Tua in Actis jam explicata, per quam quamvis quadraturam ad seriem revocas, generalissima enim est et in praxi facilis, id tamen incommode habet, quod si in aequatione differentiali reperiatur y et dy vel x et dx duarum pluriumve dimensionum, series inde orta nullam manifestam legem progressionis observet, uti accidit in quadratura figurae $x^{x} = y$: meae autem series licet numero infinitae, si modo inceptae fuerint, quantumvis continuari possunt quia evidente lege progrediuntur: adde et hoc, quod per aggregationem terminorum homogeneorum in unicam seriem converti possent.

Commode hic mentionem injiciam seriei universalissimae non ita pridem mihi repertae, quae omnes quadraturas et rectificationes generaliter exprimit, quaeque methodo tangentium inversae aptissima est: Proposita enim quacunque differentiali integranda ndz (per n intelligo quantitatem quomodocunque formatam ex indeterminatis et constantibus) erit posita dz constante, ejus integrale aequale huic seriei $nz - \frac{1}{1.2} zz \frac{dn}{dz} + \frac{1}{1.2.3} z^3 \frac{ddn}{dz^2} - \frac{1}{1.2.3.4} z^4 \frac{dddn}{dz^3}$ etc. quae si applicetur in proposito quodam exemplo, destruentur dn, ddn, dddn etc. per dz, dz^2, dz^3 etc. totaque series consistet terminis pure algebraicis. Universalis hujus seriei ope facile invenio sinum rectum ex dato arcu et radio, caeteraque problemata solvo, quae solvisti per Tuam methodum in Actis mens. April. 1693 explicatam. Modus quo ad hanc seriem perveni, apparebit in Actis, cujus usum fusius ibi explicatum videbis.

Haec quidem sunt, Vir Celeberrime, quae raptim conscribere potui, brevitas temporis plura inpraesentiarum non permisit: pleraque eaque nobiliora quae feci inventa mihi non sunt in scripto, sed in aliorum manibus versantur, in quorum gratiam ea scriptis mandaveram, quae si de novo concinnanda essent, non parvum laboris mihi facesserent, qui nunc alia prorsus ago, ea nimirum, ad quae Magistratus noster me destinavit. Breves omnino horulae meditationibus mathematicis impendendae supersunt mihi, quod mecum multoties reputans non possum non optare quandam occasionem etiamsi extraneam, ubi me totum studio mathematico applicare possem: Ea enim capacitate qua Tu polles pluribus totoque coelo differentibus incumbendi inque iis simul excellendi, ego non soleo, sed cui me addico, id me totum requirit.

Tuum opus de Scientia infiniti impatientes expectamus, faxis rogamus ut propediem lucem videat; Tu Tibi ipsimet satis suppeditatis materiae, et si quaedam adjicies de nostris, urbanitati Tuae, non necessitati tribuimus. Vale et Fave etc.

Basileae d. 2 Septbr. 1694.

P. S. Eodem hoc momento quo praesentes hasce obsignaturus sum, adfertur mihi Actorum mensis Julius, in quo Novam Tuam calculi differentialis applicationem et usum video. Quantum fugitiva adhuc perlustratione cernere licet est, quod eas curvas quarum in postremis Tuis ad me datis mentionem fecisti et quarum unius vel alterius constructionem supra dedi, artificiose describere earumque calculum ad certas regulas revocare doceas; ex quo sane non parum delectamenti capio, et omnia studiose perlegam. Memini me olim Genevae similes fere speculationes habuisse, ex occasione insignis problematis quod mihi Dr. Fatio de Duillier, frater Nicolai, proposuerat, de invenienda curva, quae singulas parabolas a globis ex singulis elevationibus mortarii ejectis descriptas tangit, quam deprehendi et ipsam esse parabolam: simulque modum inveni, per quem hujusmodi problemata per vulgarem Geometriam Cartesianam solvi possunt, quorum exemplum de determinandis Causticis in Actis Jan. 1692 exhibui. Aliud nunc jam pridem etiam mihi consideratum problema non minus utile quam elegans ob summam affinitatem, quam cum hisce habet, proponam: Datis infinitis curvis positione invenire curvam quae omnes ad angulos rectos secat; vel ut Ampl. Tuae verbis utar Lineis propositam normaliter secantibus, posi-

tione ordinatim datis, invenire propositam. Si positione ordinatim datae sint parabolae eundem axem et eundem verticem, sed parametros variabiles habentes, curva optata erit Ellipsis. Si positione ordinatim datae sint parabolae eaedem eundem axem, sed variabiles vertices habentes, curva quaesita erit logarithmica vulgaris. Sic in quovis exemplo peculiari rem facile expedire possum, Tibi autem difficile non erit generales pro hoc excogitare regulas. Caeterum hoc problema insignem usum praestat in determinanda curvatura radiorum lucis per medium inaequaliter densum transeuntium juxta hypotheses Dn. Hugenii, siquidem radius nihil aliud est, quam linea undulationes ad angulos rectos secans (voyez Son traité de la lumiere pag. 44) ubi quidem radium AHEB undulationes BC normaliter secantem incurvari ostendit, sed qualem proprie curvaturam induat non invenit.

Posset praesens problema adhuc latius extendi, nempe sic Lineis propositam ad angulum datum secantibus, positione ordinatim datis, invenire propositam. Si lineae datae sunt rectae in puncto coëuntes, curva quaesita erit (ceu manifestum est) loxodromica plana. Sed Lator harum in puncto discessurus me abrumpere facit.

VI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Triduum est quod Tuae mihi ab itinere aliquo reverso sunt redditae, quod amicus qui Lipsia attulit, non recta huc venisset et me deinde non invenisset. Gratias ago, quod de Calculo mearum Exponentialium vel Tuarum percurrentium aliisque id genus rebus egregiis ad me scribis. Tametsi enim ex prioribus meis facile judicaveris, Principia illa Exponentialium et mihi familiaria esse a multo tempore, Calculum tamen circa altiores earum species non ita longe produxi; et saepe ita distrahor, ut propemodum his studiis valedicere cogerer, nisi mihi plus ab amicis in posterum quam a meis meditationibus pollicerer. Unde illud quod de infiniti scientia cogito Opusculum, si Vestris (ut Tuae innuere videntur) auxiliis destitueretur, vereor ut mature prodeat in lucem, aut

omnino ut prodeat. Quanquam etiam id parum vestra referre judicem, qui ope amplius mea adeo non indigebitis, ut mihi potius opus sit vestra.

Quadraturam figurae cujus ordinata sit x^x, vellem citra Seriem posse dari, in quo esset aliquod scientiae incrementum. Certe ad quaedam vicina gradum dudum promovere memini, sed non vacat inter chaos schedarum inordinatarum inquirere aut actum agere. Non improbo, quod ipso lx in serie uteris valorem ipsius $x^x = y$ exprimente. Et elegans est, quae inde ducitur specialis series $\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3}$ etc. Si tamem abstineas ab lx solaque x vel ejus potentiis utaris, prodibit opinor series generalis non minus simplex, aut certa lege procedens, quam est generalis tua. Nam ob aequationem $-dy + ydx + \overline{ylx.dx} : a = 0$ sic explicatam, ut faciamus $x = 1 + z$ et $a = 1$ et $y = 1 + cz + dz^2 + ez^3 + fz^4$ etc. cum lx sit $\frac{1}{1}z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4$ etc. fiet aequatio, in qua, ut identica sit, omnes terminos destruendo prodeunt aequationes destructitiae satis ordinatae, nempe $c = 1$, $d = \frac{\frac{1}{1} + c}{2}$,
$e = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{1}c + d}{3}$, $f = \frac{+\frac{1}{3} - \frac{1}{2}c + \frac{1}{1}d + e}{4}$, $g = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}c - \frac{1}{2}d + \frac{1}{1}e + f}{5}$
etc. quae eo ipso regularem atque universalem exhibent constructionem numerorum c, d, e, f etc. idemque est in caeteris seriebus quas mea methodo invenio; nec potentiae altiores ipsius y vel dy etc. regulares progressus impediunt, etsi magis compositos reddere soleant.

Sed si adhibere velimus ipsam quantitatem Logarithmicam, res simplicissima ratione hoc loco fiet, quaerendo non y sed ly. Sic quoties variant morbi, variabimus artes. Quaerendo igitur non ordinatam, sed ejus Logarithmum, sic procedo: quia posui $x = 1 + z$, ut fiat $lx = \frac{1}{1}z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3$ etc. et $xlx = lx + zlx$; et, ob aequationem $y = x^x$, est $ly = xlx$, seu (⊙) $-ly + lx + zlx = 0$, faciamus $ly = nz + pz^2 + qz^3 + rz^4$ etc. et explicatione aequationis (⊙) prodibit.

$$0 = \left\{ \begin{array}{llllll} -ly = & -nz & -pz^2 & -qz^3 & -rz^4 & \text{etc.} \\ +lx = & \frac{1}{1} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \text{etc.} \\ +zlx & & +\frac{1}{1} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & \text{etc.} \end{array} \right\} = 0$$

Ergo $n = r$, $p = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, $s = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

et ita porro. Adeoque fiet $ly = z + \frac{1}{1.2}z^2 - \frac{1}{2.3}z^3 + \frac{1}{3.4}z^4 - \frac{1}{4.5}z^5$ etc. quemadmodum et sine hoc calculo, primo obtutu haberi poterat; sed malui formam generalem inquirendi servare. Atque haec est ordinata artificialis (ut Angli solent loqui) magna simplicitate expressa. Unde ex Tabulis Logarithmorum habetur facile ordinata naturalis. Idque sufficit in praxi, cum de area figurae similibusque non quaeritur. Sed si quaeratur ipsa y per seriem, licebit uti serie a me adhibita pro inveniendo numero ex dato Logarithmo. Sit log. l, erit numerus $1 + \frac{1}{1}l + \frac{1}{1.2}l^2 + \frac{1}{1.2.3}l^3 + \frac{1}{1.2.3.4}l^4$ etc. Hinc quia ly (seu l) hoc loco est xlx, fiet $y = 1 + \frac{1}{1}xlx + \frac{1}{1.2}x^2\overline{lx}^2 + \frac{1}{1.2.3}x^3\overline{lx}^3$ etc. Dum haec scribo, ad Tuam Seriem respiciens video plane hanc ipsissimam esse, nam ante, quod impeditior calculus videretur, fugiente tantum oculo lustraveram. Ubi illud praeclarissime a Te animadversum video, quod termini $\overline{xlx}^e$ possunt summari, quod per se egregium est, etsi ad inveniendum $\int y\,dx$ non serviret. Sane tales Quadraturas et mihi dudum fuisse cognitas dicere ausim, Te non invito, sed tamen et hoc ausim addere, facile obvias non esse.

Originem Quadraturarum hujusmodi adscribam, saltem ut videas, an Tuae conspiret. Nempe differentiando $x^h\overline{lx}^r$ prodit (1) $h.x^{h\ 1}\overline{lx}^r dx + r.x^{h-1}\overline{lx}^{r-1}dx$. Hinc si $r = 1$, fiet (2) $h\int\overline{x^{h-1}lx\,dx} = x^hlx - \frac{1}{h}x^h$. Ergo si $h - 1 = m$, patet utique summari posse omnes $x^m lx\,dx$, seu dari $\int\overline{x^m lx\,dx}$. Sed hinc rursus, ope aequationis (1) inveniri potest etiam $\int\overline{x^m\overline{lx}^2dx}$. Nam si in aequatione (1) ponas $r = 2$, fiet (3) $d\overline{x^h\overline{lx}^2} = h.x^{h-1}\overline{lx}^2dx + 2x^{h-1}lx\,dx$. Unde (4) $h\int\overline{x^{h-1}\overline{lx}^2dx} = x^h\overline{lx}^2 - 2\int\overline{x^{h-1}lx\,dx}$. Sed datur $\int\overline{x^{h-1}lx\,dx}$ per aequationem (2). Ergo datur et $\int\overline{x^{h-1}\overline{lx}^2dx}$ seu

datur (5) $\int \overline{x^m l\bar{x}^2 dx}$. Hinc vero jam iterum ope aequationis (1) inveniri potest etiam $\int \overline{x^m l\bar{x}^3 dx}$. Nam si in aequatione (1) ponas $r = 3$; fiet rursus (6) $d\overline{x^h l\bar{x}^3} = h x^{h-1} l\bar{x}^3 dx + 3x^{h-1} l\bar{x}^2 dx$. Unde (7) $h \int \overline{x^{h-1} l\bar{x}^3 dx} = x^h l\bar{x}^3 - 3 \int \overline{x^{h-1} l\bar{x}^2 dx}$. Unde cum detur $\int \overline{x^{h-1} l\bar{x}^2 dx}$ per conclusionem (5), dabitur et $\int \overline{x^{h-1} l\bar{x}^3 dx}$ per (7), adeoque dabitur (8) $\int \overline{x^m l\bar{x}^3 dx}$. Et ita porro pergendo dabitur generaliter $\int \overline{x^m l\bar{x}^e dx}$, et quidem per seriem finitam, si e sit numerus integer. In nostro autem casu m et e sunt aequales et quidem integri.

Sic etiam cum varia olim circa variorum graduum differentias tentarim, in seriem alterius Tuae ex illis ductae similem incidere memini. Imo fuere hae cogitationes inter meas primas Parisienses, cum summas tantum Dettonvillaei vel Pascalii meditarer. Sit

series decrescens	a	b	c	d	etc.
ejus differentiae primae	e	f	g	h	etc.
secundae	l	m	n	o	etc.
tertiae	p	q	r	s	etc.
quartae	t	u	v	x	etc.
quintae	β	γ	δ	ϑ	etc.

$a = e + f + g + h$ etc. $= 1l + 2m + 3n + 4o$ etc. $= 1p + 3q + 6r + 10s$ etc. $= 1t + 4v + 10w + 20x$ etc., et ita porro. Rursus $e = e$, $f = 1e - 1l$, $g = 1e - 2l + 1p$, $h = 1e - 3l + 3p - 1t$; et ita porro. Et semper ordine prodeunt numeri, qui figurati dicuntur vel combinatorii. Hos valores ipsarum e, f, g etc. substituendo in aequatione $a = e + f + g + h$ etc.

fit $a = 1e$

$1e - 1l$

$1e - 2l + 1p$

$1e - 3l + 3p - 1t$

$1e - 4l + 6p - 4t + 1\beta$

etc. etc. etc. etc.

Atque haec quidem procedunt tam in ordinariis seriebus, quarum termini sunt quantitates ordinariae, quam in iis, ubi sunt infinite parvae.

Jam rem ad Calculum differentialem, in infinite parvis nobis usitatum, accommodando, pro a ponatur y, et pro e, l, p, t, β, etc. poni poterit respective dy, ddy, d^3y, d^4y, d^5y etc. Ipsa autem quantitas constans pro unitate sumpta sit dx infinite parva. Et $1+1+1+1$ etc. in infinitum, erit x, et ideo $1+2+3+4$ etc. erit $\int x$, et $1+3+6+10$ etc. est $\iint x$, et $1+4+10+20$ etc. est $\iiint x$ etc. Ergo fit a seu $y = dy.x - ddy\int x + d^3y\iint x - d^4y\int^3 x + d^5y\int^4 x$ etc. Sed $\int x = \frac{1}{1.2}xx$ et $\iint x = \frac{1}{1.2.3}x^3$ et $\int^3 x = \frac{1}{1.2.3.4}x^4$ etc. Ergo (et quidem supplendo legem homogeneorum per dx unitatem) fit tandem $y = \frac{1}{1}x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{1.2}xx\frac{ddy}{\overline{dx^2}} + \frac{1}{1.2.3}x^3\frac{d^3y}{\overline{dx^3}} - \frac{1}{1.2.3.4}x^4\frac{d^4y}{\overline{dx^4}}$ etc. sive ut ad rem (opinor) tegendam ponere maluisti, promovendo y, dy, ddy etc. in $\int y$, y, dy etc. respective, quod hic eodem redit, fiet $\int\overline{y\,dx} = \frac{1}{1}xy - \frac{1}{2}xx\frac{dy}{dx} + \frac{1}{1.2.3}x^3\frac{ddy}{\overline{dx^2}}$ etc. Series autem Harmonica id habet peculiare, ut termini a, b, c, d etc. coincidant ipsis a, e, l, p etc. De Reductione Quadraturarum ad Quadraturam Circuli vel Hyperbolae adhuc amplius inquirendum censuerim. Quomodo ego Curvam Isochronam Paracentricam per rectificationem construxerim, in Actis videritis.

Doleo temporis non satis Tibi suppetere ad praeclaras meditationes mathematicas prosequendas pro voto tuo, quibus prae aliis plerisque Te parem esse constat. Itaque non sine multo scientiae detrimento alia subinde a Te agi debere video. Ego ipse pro affectu, quo praeclaros viros complector, obviam ire cogitaveram, sed consilium Tuum ornandae patriae non potui non lau-

dare. Interea junior Sturmius locum obtinuit, qui Tibi paratus erat, et lauta satis conditio est. Nicolaus Fatius Duillerius in Anglia, ut accepi, non incommodam stationem invenit. Ejus Fratrem fratrissare ex litteris tuis intelligo, Tuo opinor exemplo.

Pene exciderat Problema inveniendi curvam, quae ordinatim positione datis occurrat ad angulos rectos. Cujus Methodus meo judicio consistit in duabus aequationibus, una continente relationem inter x, y et constantem quamdam in curva positione data, sed pro diversis talibus ordinatim datis variabilem b; altera continente valorem ipsius $dy:dx$ in curva quaesita, expressam ex proprietate perpendicularium in curva positione data, cujus aequationis ope datur ipsius b valor per $dy:dx$, y, x pro re nata, quarum duarum aequationum ope tollendo b, habetur aequatio differentialis primi gradus pro relatione inter x et y. Sic si positione ordinatim datae sint Parabolae verticis communis, quarum semiparametri b, fiet aequatio $2bx = yy$. Jam ex conditione problematis, seu perpendicularitate ad parabolam fit $b = -ydx:dy$. Unde tollendo b fit $-2xydx = ydy$, seu summando $aa - xx = \frac{1}{2}yy$, quae utique est ad Ellipsin, et satisfaciunt Ellipses infinitae. Et has ordinatim positione datas manifestum est vicissim a Parabolarum unaquaque normaliter secari. Caeterum praeclare a Te notatum est, hoc Problema usum habere in Dioptricis, pro curvatura radii in medio continue variante. Nihil potuit dici aptius.

Postremo Fratrem Tuum Celeberrimum Virum rogo ut a me officiosissime salutes. Boisotius Abbas ex Comitatu Burgundiae, vir egregius, spem mihi fecit monumentorum quorumdam Historicorum: rogavi, ut Basileam ad Dominum Fratrem Tuum (a cujus benevolentia id humanitatis spero et mereri conabor) mitteret, quoniam locorum situs ita ferre videtur. Inde Lipsiam, occasione nundinarum deferri poterunt ad communem amicum Dnum. Menckenium. Vale.

Dabam Hanoverae $\frac{6}{16}$ Decembris 1694.

P. S. Duos noveram olim Eruditos Schafhusinos, Ottium et Scretam. Audio Scretam obiisse diem suum. Quid Ottio factum sit, scire gratum foret.

VII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Quoties literas Tuas adspicio, toties amissa Tui videndi spes reacerbat dolorem; sistunt enim profundissimi ingenii amplam imaginem, sed tanto pejus quod ipsius Archetypi fruitione destituor. Invitus et invidus intelligo juniorem Sturmium obtinere locum qui mihi paratus erat. Si qua alia commoda occasio pace aliquando Europae reconcessa sese offerret, eam avide acciperem, si modo Tibi me propiorem redderet: hic enim quia alia omnino agere debeo, vereor quod et ipse vereris, ne tandem studiis mathematicis valedicere cogar.

Non video, qua ratione quadratura figurae cujus ordinata est x^x possit citra seriem dari. Si vero in serie abstinendum ab lx, per Tuam methodum inveniuntur quidem aequationes destructitiae, satis ordinatae, ipsa autem quae inde emergit series non ita evidenter procedit, ut sepositis aequationibus destructitiis, a quovis alio continuari posset. Recte mones, quod si adhibere velimus ipsam quantitatem logarithmicam h. e. ordinatam artificialem, res simplicissima ratione fieri possit: interim etiam observo, quod, sine calculo et formatione aequationum destructitiarum, primo intuitu habeatur: etenim $ly = x\,lx$ et $x = 1 + z$, $lx = \frac{1}{1}z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3$ etc. ergo multiplicando x per lx, habetur

$$\begin{array}{l} ly = \frac{1}{1}z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 \text{ etc.} \\ \qquad\qquad\quad + \frac{1}{1} \quad - \frac{1}{2} \quad + \frac{1}{3} \text{ etc.} \end{array} =$$

$z + \frac{1}{1.2}z^2 - \frac{1}{2.3}z^3 + \frac{1}{3.4}z^4$ etc. quae eadem est quae Tua.

Integrale termini $x^m\,lx^e\,dx$ unica operatione invenio per additionem et subtractionem terminorum aequalium, nempe sic:

$$x^m\,l\overline{x}^e\,dx = x^m\,l\overline{x}^e\,dx + \frac{1}{m+1}x^{m+1}\,dl\overline{x}^e - \frac{e}{m+1}x^m\,l\overline{x}^{e-1}\,dx$$

$$- \frac{e}{\overline{m+1}^2}x^{m+1}\,dl\overline{x}^{e-1} + \frac{e.\overline{e-1}}{\overline{m+1}^2}x^m\,l\overline{x}^{e-2}\,dx + \frac{e.\overline{e-1}}{\overline{m+1}^3}x^{m+1}\,dl\overline{x}^{e-2}$$

$$- \frac{e.\overline{e-1}.\overline{e-2}}{\overline{m+1}^3}x^m\,l\overline{x}^{e-3}\,dx - \frac{e.\overline{e-1}.\overline{e-2}}{\overline{m+1}^4}x^{m+1}\,dl\overline{x}^{e-3} \text{ etc.}$$

Nam termini 2^{dus} et 3^{ius}, 4^{tus} et 5^{tus}, 6^{tus} et 7^{mus} etc. se destruunt ob $dl\overline{x} = \frac{dx}{x}$: verum 1^{mus} et 2^{dus}, 3^{ius} et 4^{tus}, 5^{tus} et 6^{tus} etc.,

simul sumti per constructionem summari possunt, fiet itaque $\int x^m \overline{lx}^e dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \overline{lx}^e - \frac{e}{\overline{m+1}^2} x^{m+1} \overline{lx}^{e-1} + \frac{\overline{e.e-1}}{\overline{m+1}^3} x^{m+1} \overline{lx}^{e-2}$
$- \frac{\overline{e.e-1.e-2}}{\overline{m+1}^4} x^{m+1} \overline{lx}^{e-3} = x^{m+1} . \frac{1}{m+1} \overline{lx}^e - \frac{e}{\overline{m+1}^2} \overline{lx}^{e-1}$
$+ \frac{\overline{e.e-1}}{\overline{m+1}^3} \overline{lx}^{e-2} - \frac{\overline{e.e-1.e-2}}{\overline{m+1}^4} \overline{lx}^{e-3}$ etc. ubi statim patet, quod si e sit numerus integer et positivus, series futura sit finita et quidem tot terminorum, uno subducto, quot in e continentur unitates.

Integrale ejusdem quantitatis $x^m \overline{lx}^e dx$ aliter insuper inveniri potest, sed per seriem infinitam in quocunque casu; ponatur enim $\overline{m+1}\, lx = s$, erit $x^{m+1} = ns$ (per ns intelligo numerum ipsius s) et $\overline{lx}^e = \frac{s^e}{\overline{m+1}^e}$: est autem $ns = 1 + \frac{1}{1} s + \frac{1}{1.2} s^2 + \frac{1}{1.2.3} s^3$ $+ \frac{1}{1.2.3.4} s^4$ etc. et differentiando hanc seriem habebitur $d\overline{ns}$ seu $\overline{m+1}\, x^m dx = ds \times \overline{1 + \frac{1}{1} s + \frac{1}{1.2} s^2 + \frac{1}{1.2.3} s^3 + \text{etc.}}$, ideoque multiplicando illud per $\frac{\overline{lx}^e}{m+1}$, et hoc per aequale $\frac{s^e}{\overline{m+1}^{e+1}}$ erit $x^m \overline{lx}^e dx = \frac{ds}{\overline{m+1}^{e+1}} \times \overline{s^e + \frac{1}{1} s^{e+1} + \frac{1}{1.2} s^{e+2} + \frac{1}{1.2.3} s^{e+3}}$ $\overline{+ \frac{1}{1.2.3.4} s^{e+4}}$ etc. ergo sumendo integralia terminorum singulorum proveniet $\int x^m \overline{lx}^e dx = \frac{1}{\overline{m+1}^{e+1}} \times \overline{\frac{s^{e+1}}{e+1} + \frac{s^{e+2}}{1.e+2} + \frac{s^{e+3}}{1.2.e+3}}$ $\overline{+ \frac{s^{e+4}}{1.2.3.e+4}}$ etc. $=$ (substituto loco s ejus valore $\overline{m+1}\, lx$) $\frac{\overline{lx}^{e+1}}{e+1} + \frac{\overline{m+1}\,.\,\overline{lx}^{e+2}}{1.e+2} + \frac{\overline{m+1}^2\, \overline{lx}^{e+3}}{1.2.e+3} + \frac{\overline{m+1}^3\, \overline{lx}^{e+4}}{1.2.3.e+4}$ etc. Haec itaque series erit etiam aequalis illi supra inventae $x^{m+1} \times \overline{\frac{1}{m+1} \overline{lx}^e}$ $\overline{- \frac{e}{\overline{m+2}^2} \overline{lx}^{e-1} + \frac{\overline{e.e-1}}{\overline{m+1}^3} \overline{lx}^{e-2} - \frac{\overline{e.e-1.e-2}}{\overline{m+1}^4} \overline{lx}^{e-3}}$ etc. quod hic obiter tanquam consectarium dictum velim. Caeterum specula-

tiones istae adhuc ulterius extendi possunt, si nempe quantitates logarithmicae lx, $l\overline{x}^2$, $l\overline{x}^3$ etc. cum numeris x vel xx, x^3 etc. vel constantibus, quodmodocunque componantur et compositae sint comprehensae sub signis radicalibus; possunt enim plerumque summari vel per vel citra series, vel etiam per extensiones curvarum, ex. gr. $\int dx \sqrt{xx + l\overline{x}^2}$ est = curvae extensae cujus coordinatae sunt $\frac{1}{2} xx$ et $x l x - x$. Plura alia, eaque non contemnenda circa hanc materiam animadvertere possem, quae vero brevitatis erga omitto, Tuae relinquens industriae, cui nihil effugere potest: nondum satis tentavi extensionem ipsam curvae $x^x = y$, num commode per seriem vel etiam sine serie exhiberi posset; vellem ipse disquireres, meretur enim Tuam applicationem.

Quod concernit alteram meam seriem et quidem universalissimam pro omnibus quadraturis et integralibus $\int y\,dx = \frac{1}{1} xy - \frac{1}{2} x^2 \frac{dy}{dx} + \frac{1}{1.2.3} x^3 \frac{ddy}{dx^2}$ etc. jam forsan in Actis *) videbis, me ejus originem non ita longe accersere, cum in eum finem nihilo alio opus sit, quam continua additione et subtractione terminorum aequalium, ceu supra feci: praeclarissime tamen eandem deducis ex serie Tua decrescente ejusque differentiis primis, secundis, tertiis etc. quo non parum gaudeo; multas enim proprietates de quibus antea non constabat circa numeros figuratos exinde detexi. Observo etiam quod si series decrescens sit harmonica, non solum coincidunt termini a, b, c, d etc. ipsis a, e, l, p etc. sed etiam e, f, g, h etc. ipsis b, f, m, q etc. et l, m, n, o etc. ipsis c, g, n, r etc. et ita consequenter. Item, si progressio harmonica $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ etc. continuetur, ut numerus terminorum sit x, erit summa progressionis $= x - \frac{x.x-1}{1.2.2} + \frac{x.x-1.x-2}{1.2.3.3} - \frac{x.x-1.x-2.x-3}{1.2.3.4.4}$ etc. Hinc tamen nondum perspicio, quomodo summa progressionis harmonicae finitae expedite per compendium exhiberi possit, uti exhibentur summae progressionum figuratarum, vel etiam arithmeticae et geometricae: si quem noveris modum pro hoc, mecum haud gravatim communicabis.

---

*) Act. Erudit. 1694 p. 437.

Dum haec scribo, recipio literas a Dno. Marchione Hospitalio, in quibus mittit novam solutionem cujusdam problematis, quod mihi jam ante bimestre communicavit, una cum sua tum inventa solutione *), quam ut quantocyus Lipsiam mitterem rogavit, quod etiam feci sine mora, adnectens schediasmati Hospitaliano animadversionem meam, ubi exhibui aliam solutionem ejusdem problematis, sed generalem, quam per communem Geometriam et simplicissime inveni, cum tamen Hospitaliana, quae specialis est, multo differentialium calculo opus habeat. Quod cum Dn. Hospitalio indicassem, problemati se de novo applicuit, invenitque etiam generalem solutionem, quam nunc mittit **), quamque a mea parum differre reperio; optaret ut prior sua, ut et mea supprimerentur et nova sua substitueretur, sed cum hanc Lipsiae non satis mature appulsuram putem, rogo Dnum. Menckenium per literas quibus praesentes hae inclusae, ut hanc novam solutionem Hospitalii priori subnectere vel saltem subsequenti Actorum mensi inserere velit; qua ratione ipsi quodammodo satisfieri spero. Problema autem est tale: S i t (fig. 25) p o n s s u b l i c i u s A B c o n v e r t i b i l i s c i r c a A x e m A, s i t q u e t r o c h l e a e C c i r c u m d u c t u s f u n i s B C M, c u j u s u n a e x t r e m i t a s s u s t i n e t p o n t e m, a l t e r a p o n d u s v e l s a c o m a M: q u a e r i t u r q u a l i s d e b e a t e s s e c u r v a C M N, s i c u t u b i c u n q u e e x i s t e n s p o n d u s M i n c u r v a, s e m p e r a e q u i l i b r i u m f a c i a t c u m p o n t e A B. Hoc Problema ita generaliter propono: D a t a (fig. 26) i n p l a n o v e r t i c a l i c u r v a q u a v i s A B, q u a e r i t u r i n e o d e m p l a n o a l t e r a c u r v a L M, i t a u t d u o p o n d e r a d a t a B, M, c o m m u n i f u n i c u l o B C M t r o c h l e a m p o s i t i o n e d a t a m C a m b i e n t i a l l i g a t a, e t c u r v i s u b i c u n q u e i m p o s i t a s e m p e r s i b i m u t u o a e q u i l i b r e n t u r, v e l q u o d t a n t u n d e m e s t, u t m i n i m a v i m o v e r i p o s s i n t. Prius comprehendi sub hoc posteriori evidens est, gravitas enim dimidia pontis sublicii concentrari intelligitur in extremitate B, et sic curva data A B in hoc casu est peripheria circuli. Ubi hoc animadversione dignissimum reperio, quod in speciali casu curva C M N sit cyclois ex rotatione circuli

*) Ill. Marchionis Hospitalii Solutio Problematis Phisico-Mathematici, ab Erudito quodam Geometra propositi. Acta Erudit. 1695 p. 56. 59.

**) Act. Erudit. Suppl. Tom. II. Sect. VI. p. 289.

super circulo aequali descripta. Caeterum ex occasione hujus aliud mihi venit in mentem problema, quod etiam ad calcem novae solutionis Hospitalii Geometris solvendum propono; vellem horulam otiosam ipsi impenderes, ut viderem an solutio Tua meae corresponderet: Quaero (fig. 27) in plano verticali curvam ABC, secundum quam pondus B libere descendendo semper aequali vi tendat filum annexum BE, quod ex evolutione curvae DE describit quaesitam ABC; vel, si mavis curvam ABC concipere rigidam, ut pondus B non annexum filo et propria gravitate descendens illam quovis momento premat aequali vi centrifuga. Reperio curvam ABC posse esse transcendentem et algebraicam trium dimensionum, et etiam rectam.

Nicolaum Fatium Duillerium in Anglia stationem invenisse lubenter audio; lubentius tamen ipsi aliquam in Patria sua optarem, ubi mihi vicinior foret: sed vel hinc intelligo, in Anglia alibique Mathemata pluris aestimari quam hic loci, quod ille apud exteros commorari malit, quam in patria, in qua omnibus bonis abundat. Fratrem ejus Johannem Christophorum, qui natu major est, familiariter novi Genevae: tanto autem judicii acumine non gaudet ac Nicolaus; hinc practicis magis delectatur quam theoreticis: nihilominus fundamenta penitioris Geometriae a me Genevae edoctus, nunc paulo diligentius nostra colit: hunc in finem, quas ipsi feceram Lectiones sedulo conscripsit, ut volumen satis amplum efformarent. Cum Parisiis agerem, inter alios Mathematicos intimum mihi reddidi Dnum. Varignonium, cui auctor extiti, ut ineffabilem voluptatem caperet ex Tuo differentialium calculo, testibus literis nuper ad me datis, in quibus ita erumpit: „Je ne sçaurais du tout perdre de vûe le charmant et merveilleux calcul differentiel de M. Leibnis, de sorte qu'il se passe peu de jours que je n'en fasse quelque chose: devinez si avec cet invincible penchant, j'ay pû lire sans transport les Actes de Leipsic de l'année passée qu'on m'a prété il y a quelques jours" etc. Alii insuper quam plures Galliae Mathematici imbiberunt principia hujus calculi, qui cum ante meam peregrinationem Gallicam neutiquam innotuisset, nunc (absit jactantia dictis) ibi passim inclarescit. Hinc vides, Vir Celeberrime, mihi semper summae curae fuisse, ut inventa Tua, tam utilia, propalarem novisque propagarem, non melius talentum meum collocasse credens, quam si aliis prodesse potuissem; non enim

nobis, sed aliis sumus nati, quod saepissime ex ore R. P. Malebranchii audivi. Hac autem in parte frater meus omnino est contrariae naturae, quippe qui omnia summo studio celare et logogriphis suis involvere conatur, ex quo nescio quam vanam gloriolam et sui admirationem captat, meque propterea (quod pudet dicere) clandestino odio fervide prosequitur, nec nisi torvis oculis aspicit favorem, quo ob ingenuitatem istam meam Illustris Hospitalius me amplectitur. Et si quem affectum Mathematici erga me testantur vel per literas vel publice, id invida mente patitur. Hac de causa famam meam quantulacunque sit arrodere non veretur, ut jam satis patet ex ultimo Actorum Junio, ubi quam contemtim de me meisque inventis, de suis vero quam superciliose loquatur ipse videas, et quidem in rebus levissimis, quales sunt theoremata sua nova aurea sibi dicta de inveniendis radiis circulorum osculantium, de quibus mihi non constare dicit, cum tamen facillime inveniantur et jam ante sesquiannum a Dn. Hospitalio inventa fuerint, de quibus in literis suis jam tum datis tanquam de re levi mentionem fecerat, etiamque illa in Memorabilibus Academiae Parisinae publicarat. Sed quo magis in me saevit frater, eo minori jure id facit, nam licet Explicatorem sex priorum Elementorum Euclideorum jam ante decennium habuerim fratrem vel potius Instigatorem, audacter tamen asseverare possum, illum forsan absque meo adminiculo communis Geometriae pomoeria nunquam praetergressum fuisse: primus enim cogitavi de inverso Tui calculi differentialium (quem etiam integralium nomine quamvis minus congrue insignivi, quia de Tuis summatricibus nihil adhucdum nobis constabat) super quo ipsi fideliter aperui cogitata mea, cujusque primum exhibui specimen per solutionem problematis catenarii, quod ille diu ante frustra tentaverat. Haec Tibi dico saltem ut videas, illum nullam me persequendi rationem habere; quod quidem publice ostendere deberem, sed fraternitatis leges melius observo et primogeniturae aliquid defero.

Quid D. de Tschirnhaus agat, scire percuperem; miror nunquam amplius in Actis apparere. Injurius es tam in Te ipsum quam in totum Orbem literatum, quod opus Tuum de Scientia infiniti, quod sub manibus habes, eidem diutius invideas; si quando publicatum fuerit, possem aliquas notulas in modum commentarii adnectere, si Tibi ita visum fuerit, ipsum enim opus jam per se satis completum erit. Scretam audio mortuum. Ottius qui de

Vitiis oculorum scripsit, fuit Senator Schafusinus, sed perjurii illicitarumque machinationum reus et convictus, jam ab aliquo tempore sua dignitate motus fuit; nunc autem extra urbem in suo praedio particulariter vivit. Vale et fave etc.

Basileae d. $\frac{2}{12}$ Febr. 1695.

VIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Utinam quam gratae sunt mihi Tuae, imo proficuae, possem ego vicissim referre par pari: sed tot laboribus distrahor, et valetudine sum tam dubia, ut cogar attentiores meditationes praesertim abstractas fugitare, quantum possum. In aestate 1693 febri tentatus fueram: superiori aestate, pro febri, cujus jam initia aderant, venere mirabiles quaedam phlogoses, ut nulla statuta hora, jam a multo tempore, plerisque diebus sentiam extraordinarium quemdam dolorem, blandum quidem et nulla ratione molestum, timendum tamen in futurum; praesertim cum illis, qui me aliquandiu non videre, visus sim macilentior factus, ipse jam sum satis natura macilentus. Porro calor ille inprimis acriore meditatione manifestissime excitatur; quae res facit, ut aegre ad problemata solvenda accedam, optemque saltem perficere atque in ordinem redigere posse dudum a me effecta; quid de tali effectu sentias, nosse velim . . . .

Pulcherrima mihi profecto Tua seriei obtinendae ratio visa est, quam in Actis *) explicuisti, et inexpectata.

Fateor et ego, nec mihi occurrere rationem x^x summandi, nisi per seriem; et summationem terminorum numero finitorum progressionis harmonicae (nam si infinitus sit numerus, et summa infinita est) non possum exhibere, nisi forte per approximationes.

Elegantissimum est Problema Hospitalianum cum augmento tuo. Utinam me quoque in talibus exercere liceret. Nunc quidvis potius cogitare cogor. Nolim tamen hoc interpreteris, quasi ego

---

*) Act. Erudit. 1694 p. 437.

jactem, me statim ista solvere posse, si attingerem. Nam eo sum ingenio, ut gaudeam me a vobis superari, cum scientiae profectu. Idem dico de Tuo Problemate circa vim centrifugam. Et gratissimum erit Vestro beneficio intelligere tales solutiones.

Ingratus sim, si non agnoscam quantum Tibi debeam, quod plurimum ad meditationes meas qualescunque, apud egregios Viros, Parisiis et alibi commendandas, suffragio et exemplo Tuo consuluisti; aut ut verius dicam, quod illis ex ingenio Tuo, usuque felicissimo pretium addidisti. Dnum. Varignonium quoque nostrorum gustum habere, hactenus ignorabam. Nosse velim quinam sint alii, et an inter alios sit Dnus. Ozanam, qui non admodum bene se erga me gessit, ut fortasse noveris.

Caeterum plane probo optimi Malebranchii nostri, quam memoras sententiam; omnino occasione similia inculco, ut quisque intelligat, se (quod jam et Cicero dixit) sibi natum non esse. Imo hoc meum dogma est, quanto quisque ardentius sinceriusque quaerat commune bonum, eo magis felicitati suae consulturum: quod sane invictis argumentis ostendi potest. Itaque laudo admodum, quod ad alios juvandos, augendasque generis humani opes propensum Te ostendis; praesertim cum prae aliis plurimis facere operae pretium possis.

Fratrem tuum egregiae sane doctrinae Virum semper conatus sum habere amicum et faventem; nec puto quicquam a me profectum, de quo queri possit. Nescio quomodo tamen ille visus est se subinde ostendere, si non aversum, certe nonnihil alienum. Neque vero illa designo, quae aliquando objecit in Actis; id enim summo jure potest: sed illud potius non potui non mirari quod ad literas quasdam meas, olim satis prolixe scriptas, quibus quaesitis ejus utcunque satisfaciebam, non respondit. Fateor ultra annum responsionem meam haesisse; sed hoc contigerat ob absentiam: nam cum ejus literae huc venissent, ego in Italiam iveram, easque demum reversus inveneram, et tunc quidem nullam feceram respondendo moram. Quae ad schediasma *) ejus Junio ultimo insertum responderim, videris nunc haud dubie, gratumque mihi erit intelligere judicium Tuum.

De radiis osculorum observabis, quomodo ex meo calculo differentiali reciproco (ubi x et y considerantur ut indifferentiabiles)

*) J. B. Curvatura Laminae Elasticae etc. Act. Erudit. 1694 p. 262.

talia multo generalius et tribus verbis deriventur. Dedi etiam constructionem Isochronae per rectificationem curvae ordinariae, sed Vestra constructio postea data est simplicior. Notavi etiam per quodvis datum punctum duci posse talem Isochronam, non, ut illi visum, unicam esse, eadem scilicet altitudine lapsus primi. Denique ea occasione addidi aliquid de controversia inter illum et me, circa numerum radicum in casu osculi; quin et explicui modum generalem per polygona, seu appropinquationem, construendi curvam ex data tangentium proprietate, seu aequatione differentiali, diversissimum ab eo quem postea vidi a Te datum*). Tuum notavi derivari ex ea consideratione, quod, data tangentium curvae quaesitae proprietate, ordinatim positione dantur infinitae numero curvae ipsi quaesitae occurrentes in punctis, ubi curvae, seu tangentis ejus inclinationes, sive anguli ad axem dantur. Hanc rem saepe consideravi, ut viderem an aliquid inde possem ducere, et videtur adhuc nonnihil subesse nondum satis exploratum.

Aemulationem Fraternam notatam in Actis putabam nihil prorsus affectui mutuo officere. Sed homines sumus, difficileque est aequo animo ferre, ut alii nos praecurrant vel saltem aequent, qui longissime antea post nos fuerunt. Quod ego aequius animatus sum, causa fortasse est diversitas materiarum, in quibus habeo campum exercendi me consolandique. Sunt enim in quibus sperem praestare aliqua, Calculo differentiali non inferiora, si vel sanitatem, vel auxilia amicorum mihi spondere possem . . . .

Quod scopum nos videndi proprius consecuti non sumus, forte ambo nonnihil in causa sumus, dum non satis omnia prolixe utrinque exposuimus. Quid! si alia sese aliquando offerat non inferior occasio. Nosse velim, an, quam in Tuis memoras, pacem Europae sis necessario expectaturus. Hoc anno vix audebo manum admovere meae Scientiae infiniti; nam alii a me labores exiguntur Superiore jussu. Ubi habebo delineatam, Tuis animadversionibus libentissim submittam. Vale et fave etc.

Hanoverae 28. Febr. 1695.

P. S. Tametsi plane constituissem temperare mihi nonnihil valetudinis causa ab analyticis meditationibus, non potui tamen im-

*) Modus generalis construendi omnes aequationes differentiales primi gradus, auctore Joh. Bernoulli. Act. Erudit. 1694 p. 435.

petrare a me, quin pulcherrimam illam rationem, qua seriem generalem indagasti, considerarem attentius. Quo facto vidi, altero termino destructo, simili methodo talem seriem haberi:

Posito $ddz = 0$. Nota $d^2 n$ est ddn, $d^3 n$ est $dddn$,

$$\int n = \int (dzn) \text{ et } \int\int n = \int (dz(dzn)), \text{ posito } dz = 1$$

$$\int (z^e d^m n) + e \int (z^{e-1} d^{m-1} n dz) = z^e d^m n$$
$$- edz \int (z^{e-1} d^{m-1} n) - eedz \int (z^{e-2} d^{m-2} n dz)$$
$$= -ez^{e-1} d^{m-1} n dz$$
$$+ eedz \int (z^{e-2} d^{m-2} n) + e^2 dz^2 \int (z^{e-3} d^{m-3} n dz)$$
$$= + e^2 z^{e-2} d^{m-2} n dz^2,$$

ergo

$$(1) \int (z^e d^m n) = z^e d^m n - e z^{e-1} d^{m-1} n dz + e^2 z^{e-2} d^{m-2} n dz^2$$
$$- e^3 z^{e-3} d^{m-3} n dz^3 \text{ etc.}$$

ubi notandum, posse quidem e esse numerum non integrum, sed m semper integrum esse; nisi quis ad instar metaphysicarum potentiarum (seu Logarithmorum) etiam metaphysicas nescio quas differentias (vel summas) fingere vellet.

Etsi autem sic exhauriri m videatur, posito esse integrum affirmativum, non tamen hoc fit, nam $d^0 n = \int^0 n = n$ et $d^{-1} n = \int^1 n$ et d^{-2} est $\int\int$ seu $\int^2$.

Hinc, posito exempli gratia $m = 1$, et posito esse $dz = 1$, ex aequatione (1), fit (2) $\int z^e dn = z^e dn - e z^{e-1} n + e^2 z^{e-2} \int n - e^3 z^{e-3} \int\int n + e^4 z^{e-4} \int^3 n$ etc. et (3) $\int z^e ddn = z^e ddn - e z^{e-1} dn + e^2 z^{e-2} n - e^3 z^{e-3} \int n + e^4 z^{e-4} \int^2 n$ etc.: ex

quibus etiam intelligitur, quam apte ponatur summa differentiis reciproca, adeoque summa summarum reciproca differentiis differentiarum. Idem ex seriebus patet in infinitum decrescentibus

Termini a, b, c, d, e etc. summae

Differentiae l, m, n, p, q etc. Termini

nempe l diff. inter a et b; m diff. inter b et c, et ita porro. Sed a summa $l+m+n$ etc. et b summ. $m+n+p$ etc. et ita porro.

Unde Tibi deliberandum relinquo, annon, pro Integralibus vestris, praestet in posterum uniformitatis et harmoniae gratia non inter nos tantum, sed in ipsa doctrina adhiberi Summatorias expressiones, ita ut, exempli gratia, $\int y\,dx$ significet summam omnium y in dx respondentes ductorum, seu summam omnium hujusmodi rectangulorum: praesertim cum tali ratione summationes geometricae seu quadraturae optime cum arithmeticis seu serierum summis conferantur. Nolim tamen vobis praescribere quicquam; sed tantum ejus, quod maxime rationi consentaneum videbitur, putem rationem maxime habendam. Ego certe in totam hanc methodum me fateor, ex hac consideratione reciprocationis inter summas differentiasque, incidisse, et a Seriebus numerorum ad linearum seu ordinatarum considerationes processisse.

Unum addam, quod etiam hanc reciprocationem confirmet. Si ponamus in aequatione (1) m esse numerum negativum seu $m = -r$, fore $d \,. = \int^r$, unde ex aequatione (1) fiet (posita $dz = 1$)

$$(4) \int (z^e \int^r n) = z^e \int^r n - e\,.\,z^{e-1} \int^{r+1} n + e\,.\,e\,.\,z^{e-2} \int^{r+2} n - e^3\,.\,z^{e-3} \int^{r-3} n \text{ etc.}$$

Semper tamen Series tales infinitas ita decrescere intelligendum est, ut termini continuando fiant quibusvis datis minores.

Venere etiam nonnulla adhuc in mentem, quae Te rogarem. In celsissimi Principis Abbatis St. Galli Bibliotheca extare Chronicon Alberici Monachi Trium fontium, in literas relatum est. Ita enim Vossius narrat in libro de Historicis latinis. Habemus idem in his regionibus ab anno 960 inclusive, usque ad finem seu annum 1241; sed desunt praecedentia ab initio mundi usque ad annum 960; mi-

nus quidem necessaria, quia antiqua melius in aliis habentur, sed quae tamen suppleri desideramus. Similiter habemus Historiam Johannis Vitodurani, quae itidem in Monasterio S. Galli extare dicitur. In nostro codice habentur quidem omnia ab initio, sed desunt postrema ab anno 1277 ad annum 1348, in quo finire scriptor dicitur. Obstringeres me Tibi magis magisque, nec mediocriter, si e vicinia per amicum aliquem apud Celsissimum et Reverentissimum Principem, vel saltem Monasterii illius principalis Bibliothecarium, descriptionem nostris sumptibus impetrares.

Cui si simile beneficium addi potest, per aliquem amicum cui occasio esset, sollicitandi pro me Dnum. Abbatem Boisot, qui abbatiae S. Vincentii prope Vesontionem praeest, ut mitteret, quorum spem fecit; cumulus accederet his desideratis meis. Iterum vale.

IX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Tarde quidem advenerunt postremae Tuae, quod forsan moram fecerint Lipsiae; mature tamen significatrices fuere vacillantis Tuae valetudinis, de qua non sum parum anxius. Optimus Deus avertat mali incrementum faxitque, ut hae praesentes pristinae exoptataeque sanitati Te restitutum offendant. Non est insolens, quod qui febre laborarunt, si non radicitus curetur, singulis annis novos et inordinatos paroxysmos sentiant: eandem forte ob rationem, ob quam vina quandoque, praesertim tempore vindemiarum, de novo ebullire et fermentari deprehenduntur. Sic nullus dubito, reliquias febriles in corpore tuo adhucdum hospitari, quae cum manifestum paroxysmum producere non valeant, excitant saltem phlogoses illas mirabiles. Illis itaque tempestive remediis idoneis occurrendum, ne, quod multoties accidit, quartanam vel etiam hecticam post se trahant. Interim a vigiliis et occupationibus nocturnis omnino abstinendum, et recte facis quod attentiores meditationes fugitas; nihil enim est, quod humores pravos, tartareos et viscidos, alimentum nempe febrium intermittentium magis foveat et cumulet, cruditates pariat et coctionem impediat: dissipant enim

laudabiles, tenuiores et spirituosas humorum partes, crassiora vero sedimenta relinquunt. Hic autem medicum agere nolim; habetis enim, haud dubie, expertos practicos, quos consulere poteris. Memini, cum Parisiis agerem, P. Malebranchium, qui etiam natura est valde macilentus sed procerus, simili fere affectu aliquandiu laborasse; is sibi ipsi est medicus et mirabilem medendi methodum habet: quemadmodum enim unicam causam primariam omnium morborum, depravationem nempe massae sanguineae, statuit, sic unicum remedium, idque simplicissimum agnoscit. Quotiescunque aegrotat, singulis mane jejunus ingurgitat magnam quantitatem aquae fontanae purissimae, incipiendo primis vicibus a minori, et postmodum augendo numerum haustuum ad-instar acidularum, ad duas vel tres usque mensuras Parisienses: aqua autem non debet esse calida, ne nauseam moveat, nisi forsan ventriculum data opera per vomitum purgare velit, nec etiam debet esse frigida, ne fibrarum stomachalium et intestinalium tono noceat; sed eam nonnihil tepidam assumit. Principium, quo nititur, non adeo absurdum est; cum enim aqua omni sapore careat, debitamque habeat consistentiam, nec nimis crassam nec nimis fluidam, ideoneam esse dicit ad omnia sanguinis vitia corrigenda, dum ejus particulas acriores infringit, nimis crassas et viscidas diluit; nimis tenues et volatiles coercet, tandemque omnem materiam morbificam abstergit, et per urinam educit. Et revera per iteratam istam potationem aquae omnino se liberaverat a molestissimo affectu, a quo detentus fuerat, mihique affirmavit se nullo alio remedio per totam vitam usum fuisse. Postea ab Ill. Hospitalio intellexi, conjugem suam eodem hoc remedio ab angina et inflammatione faucium curatam fuisse. Quantum ad me, nemini id consulerem, nisi prius complexionem suam probe exploratam haberet, et securus esset vires suas tot aquis perferendis pares esse, alioquin natura succumbere et quasi suffocari posset, praesertim si non eadem quantitate statim per urinam redderentur.

Cum Tua mihi sit carior sanitas quam mea, ei hac vice rebus mathematicis non ero molestus: id saltem monebo, quod in Tuis ultimis annotavi. Egregia sunt quae ex ratione mea seriem generalem indagandi deduxisti; mihi sufficit, si inventa mea, utut tenuia, magnis viris occasionem dederint ad majora. Interim in calculo Tuo lapsum reperio, quem haud dubie praecipitanter commiseris, quique facit ut series pro $\int\overline{z^e d^m n}$ sit longe alia et notabilior,

quam ipse putaveris. Ut discrimen videas, calculum Tuum hic repeto. Posito $ddz = 0$

$$\int\overline{z^e d^m n} + e\int\overline{z^{e-1} d^{m-1} n dz} = z^e d^m n$$
$$- edz\int\overline{z^{e-1} d^{m-1} n} - eedz\int\overline{z^{e-2} d^{m-2} n dz}$$
$$= - e . z^{e-1} d^{m-1} n dz$$
$$+ eedz^2\int\overline{z^{e-2} d^{m-2} n} + e^3 dz^2\int\overline{z^{e-3} d^{m-3} n dz}$$
$$= + ee . z^{e-2} d^{m-2} n dz^2$$

ergo

$$\int\overline{z^e d^m n} = z^e d^m n - e . z^{e-1} d^{m-1} n . dz + ee . z^{e-2} d^{m-2} n . dz^2$$
$$- e^3 . z^{e-3} d^{m-3} n . dz^3 \text{ etc.}$$

Haec, meo judicio, ita corrigi debent. Posito $ddz = 0$, erit

$$\int\overline{z^e d^m n} + e . \int\overline{z^{e-1} d^{m-1} n . dz} = z^e d^{m-1} n$$
$$- edz\int\overline{z^{e-1} d^{m-1} n} - e . e - 1 . dz . \int\overline{z^{e-2} d^{m-2} n dz}$$
$$= - e . z^{e-1} d^{m-1} n . dz$$
$$+ e . e - 1 . \overline{dz^2}\int\overline{z^{e-2} d^{m-2} n} + ee - 1 . e - 2\overline{dz}^2\int\overline{z^{e-3} d^{m-3} n . dz}$$
$$= + e . e - 1 . z^{e-2} d^{m-2} n d\overline{z^2},$$

ergo vera Series

$$\int\overline{z^e d^m n} = z . {}^e d^{m-1} n - ez^{e-1} d^{m-2} n dz + e . e - 1 . z^{e-2} d^{m-3} \overline{d} z^2$$
$$- e . e - 1 . e - 2 . z^{e-3} d^{m-4} n d\overline{z}^3 \text{ etc.}$$

Unde liquet, si e sit numerus integer et affirmativus, quantitatem $z^e d^m n$ (quod memorabile prosus est) esse summabilem: eo enim in casu e exhauritur, proindeque series abrumpitur, et fit finita; id quod per Tuam non fieret: oportet autem ut m sit major quam e: secus enim unus vel plures seriei termini involverent summas ipsarum n, quia tunc d^{-1}, d^{-2}, d^{-3} etc. degenerant in $\int$, $\int\int$, $\int^3$ etc. ceu Tu ipse annotasti. Hinc posito, ex. gr. $e = 1$, $m = 2$, et $dz = 1$, erit $\int\overline{zddn} = zdn - n$, et posito $e = 1$, $m = 3$, erit $\int\overline{zdddn} = zddn - dn$, et posito $e = 2$, $m = 3$, erit $\int\overline{zzdddn} = zzddn - 2z|dn + 2n$, quod etiam olim Parisiis, sed alia via inveneram, et Dno. Hospitalio tanquam singulare quid communicaveram. Hinc etiam insignes proprietates circa quadraturas spatiorum eliciuntur. Data ex. gr. (fig. 28) curva quacunque AB, sive Algebraica sive transcendente sive etiam libera manu ducta, si ad illius axem AC construatur alia curva AD, cujus ordinatae DC sint in

ratione composita ex abscissis AC ad potestatem quamcunque elevatis, et ex differentiis cujuscunque gradus (ad minimum unitate excedentis numerum potestatis) applicatarum BC: dico spatium curvilineum ADC semper esse quadrabile. Caeterum, quod nomenclationem differentialium summae attinet, lubentissime pro integralibus nostris Tuas in posterum adhibeo summatorias expressiones; quod diu ante fecissem, si nomen integralium non adeo invaluisset apud quosdam Geometras, qui me hujus nominis authorem agnoscunt, ut satis obscurus visus fuissem, unam eandemque rem, nunc hoc, nunc alio nomine designans. Fateor enim nomenclationem istam (quae, considerando differentialem tanquam partem infinitesimam totius vel integri, mihi non ulterius cogitanti, venit in mentem) rei ipsi non apte convenire.

Non memini me unquam vidisse Dn. Ozannam, nisi forsan in conferentiis apud P. Malebranchium hebdomadatim haberi solitis: eo enim tempore quo Parisiis agebam, versabatur totus in practicis, quibus non admodum delectabar. Quid Tibi rei cum illo fuerit, plane ignoro et nosse percuperem. Hoc scio, quod in compendio suo Geometriae practicae methodum tradit quadrandi circulum per seriem, quae methodus, ni fallor, Tua est; ejus vero inventionem sibi arrogavit. Alii, quos noveram, Mathematici, qui nostris delectabantur, non sunt celebres per literas, adeoque nescio an Tibi sint noti: inter alios fuerat P. Bysance, ordinis qui vocatur Oratorii, cujus etiam est Malebranchius: is in juventute a Mahometano Christianus factus est, huncque ordinem adoptavit. Cum apud Dn. Marchionem Hospitalium in Arce sua prope Blesium sita commorarer, visum nos venerat. P. Reyneau ejusdem ordinis, Professor Mathematum Angerensis et Presteti successor, qui mirum quantum delectamenti capiebat ex paucis, quae ipsi ostenderam de differentialibus: hoc calculandi genus ipsi omnino insolitum et divini quid in se continens videbatur. Dn. Abbas Catelanus talia scire etiam valde gestiit, quem autem frequentare non audebam, quia tum temporis in dissidio fuerat cum Dn. Hospitalio, ob tractatum quemdam, quem ille composuerat, hic autem refutarat ob plurimos quibus scatebat paralogismos et errores, quorum amplius non memini. Nunc, ut audio, reconciliati sunt.

Inter scribendum afferuntur mihi literae omnino ignotae; quibus resignatis, video nomen Dn. Chirac, Professoris Regii Anatomiae Monspeliensis, nunquam mihi antebac noti; is Dissertationem meam

de Motu musculorum legisse quidem, sed ob inusitatum calculandi modum maximam et praecipuam partem non intellexisse queritur, meque propterea humanissimis verbis et multis in Calculum differentialem elogiis rogat, ut ex quibus Auctoribus principia hujus calculi haurire possit, viamque qua ego ad illius cognitionem pervenerim significem. En propria verba: „Il faut s'il est possible que j'entre dans cette Analyse, mais comme je suis en pays, où malaisément on trouve des Algebristes, voudriez-vous bien ajouter à la grace que je vous ay demandée celle de m'apprendre les routes que vous avez tenues pour arriver à la connaissance de cette excellente methode. Que faire pour abreger le tems? Quels autheurs seront les plus propres? etc." Quid illi hac super re consuleres, nosse vellem. Nulli, ut credo, libri reperiuntur, qui de nostro supputandi genere ex professo agant. Integram autem methodum ex Actis ediscere velle difficile erit, dum pleraque absque demonstrationibus ibi proponantur.

Literas Tuas Fratri meo legendas exhibui, ut culpam suam ipse videret; est sane non leve morositatis signum, quod Tibi non respondit: aegrotavit quidem aliquandiu, quo se quadantenus excusabit. Certus nunc sum ipsum propediem ad Te literas daturum esse, sed non adeo honorifice, ut metuo, mei mentionem faciet; omnia autem aequitati Tuae relinquo, eique vero condono. Vestra disceptatio de natura osculi, me judice, mera est logomachia, praesertim cum in indagatione longitudinis radii circuli osculantis uterque conveniatis. Quid itaque de verbis disputandum, quando constat de re? Verum est ex Tuo calculo differentiali reciproco huuc radium paucis verbis derivari, non minus tamen expedite invenitur differentiando ipsas differentiales, hoc enim modo unica proportione eo pervenitur.

Optime notasti, et ipso Hugenio teste, per quodvis punctum datum infinitas duci posse isochronas, eadem scilicet altitudine lapsus primi, quod etiam affirmavi nupero Actorum Februario; ubi haud dubie jam videris meam solutionem problematis Hospitaliani et fraternam; vellem examinares utra sit succinctior et naturalior, et etiam generalior. Judicium quoque Tuum optarem de Craigii tractatu novo, annon legitime objecerim ea quae ibidem in Actis annotavi. Non laudo, qxod ita graviter invehatur in Dn. Tschirnhaus; minus autem, quod hic illi ansam dedit; injuriosa enim litigatio viros bonae educationis minime decet. Utique in

modo construendi generaliter aequationes differentiales per appropinquationem seu polygona, adhuc nonnihil desidero, quod nondum satis est exploratum, et hoc est, quod publicationem ejus adhuc retardavit: diu enim ante in hanc speculationem incideram: interim methodus quam inde deduxi determinandi curvam transeuntem per puncta flexuum omnium curvarum eidem aequationi differentiali satisfacientium, non adeo invenusta est, quam curvam ostendi perpetuo esse algebraicam.

Quod mihi in commissis dedisti, ad amussim executus sum. Ad Vesontionem scribi curavi, ut per occasionem Dn. Abbas Boisot promissorum Tuo nomine admoneretur. Et per amicum, cui cum Bibliothecario Monasterii S. Gallensis, nomine P. Burckardo Herr commercium literarum intercedit, eundem humaniter rogavi, ut eorum quae Tibi desunt descriptionem concedat. Non dubito, quin eam facile impetraturus sis: est enim, ut mihi depingitur, vir officiosissimus et comitatis plenus. Interim statim ac quid rescivero, Tibi notum faciam.

Dn. Marchio Hospitalius nuper de Professione Mathematica, vacante in Hollandia scripsit, quam mihi se procuraturum sperat. Ipsi respondi, ut conditiones aliasque circumstantias hujus Professionis, et in quo loco sit, mihi quantocyus rescriberet; etenim mihi deliberandum est, an conditio sufficiens sit, ut cum uxore illuc abeam. Vale et fave etc.

Basileae d. $\frac{20}{30}$ Aprilis 1695.

X.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Multum Tibi debeo, quod in mei gratiam Vesontionem et ad Sangallensis Monasterii Bibliothecarium P. Herr scribi curasti. Quanquam de Vesontione vereor ne frustra mihi aliquid promiserim, quoniam Dn. Abbatem Boisotium obiisse ex Gallia nuper intellexi.

Gratias etiam ago, quod valetudinis meae curam Tibi esse testaris, perscriptis ad me monitis minime vulgaribus neque spernendis, de quibus cogitabo diligentius. Omnino enim tempus esse video, ut majus aliquod malum praeveniam.

Recte correxisti calculum meum. Nam dum festinabundus in chartam conjicio, quod literas scribenti calculus suggerit, errorem admisi seriemque male expressi. Multa adhuc in istis summarum et differentiarum progressionibus latent, quae paulatim prodibunt. Ita notabilis est consensus inter numeros potestatum a binomio, et differentiarum rectanguli; et puto nescio quid arcani subesse. Exempli gratia

$\boxed{1}\,\overline{x+y} = 1x + 1y$, vel $1x^1y^0 + 1x^0y^1$, $\quad d^1, xy = 1ydx + 1xdy$, vel $1d^1xd^0y + 1d^0xd^1y$

$\boxed{2}\,\overline{x+y} = 1x^2 + 2xy + 1y^2 \quad d^2, xy = 1yddx + 2dydx + 1xddy$

$\boxed{3}\,\overline{x+y} = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1x^3 \quad d^3, xy = 1yd^3x + 3dyd^2x + 3d^2ydx + 1xd^3y$

$\boxed{4}\,\overline{x+y} = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4 \quad d^4, xy = 1yd^4x + 4dyd^3x + 6d^2yd^2x + 4d^3ydx + 1xd^4y$

et ita porro, ubi perfectissimus est consensus. Nempe ubi ab una parte ponitur $x^m y^n$, ab altera ponitur $d^m x d^n y$. Ita respondent sibi x^2 et $yddx$; nam x^2 est x^2y^0 et $yddx$ est d^0yd^2x. Nam $d^0y = y$. Atque ita realis quidam consensus inter potentiarum indices seu logarithmos et nostros differentialium quasi-logarithmos reperitur, qui etiam ad polynomia et multirectangula seu rectangula solida et supersolida extenditur, ut si conferamus $\boxed{m}\,\overline{x+y+z}$ et $d^m xyz$. Quod si occurrat potentia ipsius x, ut $d^m x^2 y$, considerari debet ut rectangulum solidum xzy, consentientibus eo casu x et z, unde operae pretium erit prosequi comparationem inter $\boxed{m}\,\overline{2x+y}$ ex. gr. (seu $\boxed{m}\,\overline{x+x+y}$) et inter $d^m xxy$. Nam, ubi succedit extractio, succedet et snmmatio. Quin et $\boxed{m}\,\overline{x-y}$ et $d^m \frac{x}{y}$ seu $d^m xy^{-1}$ poterunt comparari. Imo videndum, annon in summationibus concipere aliquid liceat respondens radicibus irrationalibus, imo affectis. Excogitavi autem olim mirabilem regulam pro numeris coefficientibus potestatum, non tantum a binomio $x+y$, sed et à trinomio $x+y+z$, imo a polynomio quocunque, ut data potentia gradus cujuscunque v. gr. decimi, et potentia in ejus valore comprehensa, ut $x^5y^3z^1$, possim statim assignare numerum coefficientem, quem habere debet, sine ulla Tabula jam calculata; quam considerationem puto huic quoque meditationi profuturam, est enim genesis potestatum generalis.

Video et novam meditationem superesse circa Maxima et Minima, materiam nondum exhaustam. Neque enim semper facile est

problema reducere ad tangentium inversam seu differentiales. Exempli causa, in inquisitione Catenariae, si non per theoremata mechanica aliunde novissemus proprietatem tangentium ejus dari respectu centri gravitatis, difficile fuisset obtinere lineae constructionem. Nempe datis punctis A et C, et longitudine catenae vel funiculi AC, quaeritur natura curvae talis, ut AF sit omnium possibilium minima. Hoc profecto problema deberet analytice solvi posse, recta via; etiamsi ignoretur Tangentes AT et ET concurrere in T sub G centro arcus AC vel aliquid simile. Quam ergo quaeso methodum adhibendam putas, si ipsum problema in terminis propositis consideremus?

Inter alias cogitationes haec mihi in mentem venit, per quam problema saltem videtur posse reduci ad seriem infinitam: AB sit x, et arcus AC sit z et fiat (1)$z = ax + bxx + cx^3$ etc. et AF erit (2)$\int \overline{xdz:z}$ = minimo possibili. Et quia z longitudo curvae est constans in omnibus diversis curvaturis, ex quibus ea eligitur, per quam maximus centri gravitatis descensus obtinetur; ideo etiam (3)$\int \overline{xdz}$ = minimo, seu erit (4)$\int \overline{xdz} = \frac{1}{2}axx + \frac{2}{3}bx^3 + \frac{3}{4}cx^4$ etc. $= m$(5) posito m significare minimum valorem. Sed quaeruntur coefficientes a, b, c etc. Harum inventionem puto tentari posse per unicam literam quaerendam e, unamque datam r, faciendo (6) $a = 10e + 11a$, (7) $b = 20ee + 21ea + 22aa$, (8) $c = 30e^3 + 31e^2a + 32ea^2 + 33a^3$, et ita porro, ubi numeros 10, 11, 20 etc. adhibeo loco literarum; praeterea explicabo x, faciendo (10) $x = y + r$, cujus rationem postea dicam. Explicando jam aeq. (5) per (6), (7), (8) etc. et per aeq. (10) et ordinando secundum y, habebo aeq. (11) cujus forma est $\ldots y^0 + \ldots\ldots y^1 + \ldots y^2$ etc. $= m$. Hanc jam oportet differentiari, sed ita ut sola litera e in ipsa consideretur ut differentiabilis; ita habetur aequatio nova duodecima, in qua sublata est m. Sed oportet etiam in ea tolli y, quod fit divellendo ipsam in tot aequationes destructitias, quot sunt termini, quae omnes, cum sint secundum unam incognitam e, debent coincidere inter se, id est arbitrariae 10, 11, 20 etc. ita explicandae sunt, ut quaevis harum aequationum dividi possit per eandem aequationem finitam valorem ipsius e exhibentem; quo invento, ad seriem infinitam pro curva quaesita perventum erit, sed praestaret si semper talia problemata possent reduci ad aequationes differentiales. Caeterum nisi explicuissem x per $y + r$, vel

simile, non potuissem instituere divulsionem, quia numeri ipsius aequationis (5) non fuissent ingressi calculum. Et in universum artis foret, mihi nondum satis cognitae, posse seriem infinitam revocare ad aequationem finitam differentialem, cujuscunque ea demum sit gradus, quoties nempe res fieri potest. Nam dubito an semper sit possibilis.

Talia adhuc plura habeo desiderata, ex quibus apparet quantum Analysi adhuc desit, cujus defectus supplere, ingenio Tuo inprimis dignum videtur; quemadmodum illud quoque cujus mentionem in Actis injeci *), cum de Isochrona Paracentrica nuper agerem, ut prosequamur illas curvas transcendentes, quarum puncta quotvis per communis Geometriae constructiones inveniri possunt ad imitationem sectionum anguli et rationis. Integralium appellatio mihi non displicet, et a me quoque interdum Tui imitatione adhibita est; plerumque tamen summationis vocabulo uti malo, quia magis luciferum est, et originem ipsam meditationis ostendit.

Gaudeo intelligere, quae Dn. Chirac Tibi scripserit, et quae de R. P. Reyneau refers. Domino Chirac nemo, credo, Te melius consuluerit. Dnus. Catelanus minus sincere egit, quemadmodum et Dnus. Ozanam. Ille enim Calculum differentialem, hic meam circuli seriem, pro parte cum percepissent, laureolam in mustaceo quaesivere, cum nihil de suo addidissent. Catelanus vero, alioqui mihi contrarius, etiam mea haec qualiacunque deprimere, ut audio, conatus est. Ante paucas septimanas Lipsiam scribens adjeci schediasma, Te quasi invitante, sed brevissimum **); ibi notavi etiam sine consideratione centri gravitatis, uno velut momento, ad praedictam illam constructionem Tuam perveniri posse, ope solarum differentialium. Nam descensus vel ascensus verticales ponderis et contrapondii sunt elementa ordinatarum; ut ergo maneat aequilibrium in motu, debent assensus hi vel descensus elementares esse ponderibus reciproce proportionales. Ergo et summae eorum, id est, ipsae ordinatae, quae est ipsissima constructio Tua.

Quod Dnum. Craigium attinet, notavi ea occasione, verissimum mihi videri, quod terminus summator termini irrationalis debeat

*) Act. Erudit. 1694 p. 368.

**) G. G. L. Notiuncula ad constructiones lineae in qua sacoma, aequilibrium cum pondere moto faciens incedere debet etc. Act. Erudit. 1695 p. 184.

continere eandem irrationalitatem. Cujus rei demonstratio, quam innui, pendet ab hac consideratione generalissima, et, ni fallor, momentosa; quod terminus integralis et differentia, vel summa et terminus debent habere eundem numerum radicum seu valorum; quoniam quivis valor termini suum habebit valorem differentiae respondentem. Hinc etiam duxi considerationes, quibus multum contrahitur quadraturarum inquisitio; sed prosequi non vacavit, etsi talia dudum consideraverim. Si Tibi aliquando vacavit eo advertere animum, libenter mittam qualescunque meas in eam rem considerationes. Notavi sane ibidem osculationes revocari ad differentias differentiarum; visus tamen est usus calculi reciproce differentialis hic non contemnendus.

Non miror, si diu pressisti considerationem Tuam aequationum differentialium mechanice construendarum*); possum dicere me quoque ibi speravisse aliquid ad constructionem plusquam mechanicam. Videbam scilicet generaliter, data aequatione differentiali primi gradus, dari curvas algebraicas quaesitae occurrentes in punctis, ubi curva quaesita inclinationes habet datas, seu angulum datum facit ad horizontalem vel verticalem. Sperabam ergo motum excogitare puncti per has curvas secundum leges inclinationis trajicientis; sed nondum successit. Res huc redit: Curvis ordinatim positione datis punctum ita per eas continue trajicere, ut ubi illis occurrit, habeat angulos ordinatim datos ad horizontem. Hoc effecto, haberetur constructio omnium curvarum datarum per aequationem differentialem primi gradus.

Egregie notasti, more Tuo, posse definiri lineam ordinatarum transeuntem per omnia puncta flexus omnium curvarum differentialitate eadem datarum; quin et poterit linea definiri transiens per omnia puncta maximae earum vel minimae latitudinis; nam eo casu evanescunt differentiae, angulusque nullus est vel rectus. Eamque in rem complura notare memini, sed non tamen ideo ipsum curvae transcendentis quaesitae punctum incognitum definitur; puto tamen aliquando rem successuram, ubi constabit, lineae ex. gr. per omnia puncta maximae latitudinis transeuntis concursum cum curva quaesita, cujus est ea latitudo, non intersectionem esse simplicem, sed contactum vel osculum vel saltem esse anguli dati.

---

*) Modus generalis construendi omnes aequationes differentiales primi gradus. Auctore Joh. Bernulli. Act. Erudit. 1694 p. 455.

Quod Dominus Frater Tuus in meis notavit circa numerum radicum osculi, non displicuit; nihil enim mihi gratius quam doceri; puto tamen nos non admodum dissentire, ut Tute indicas; interim gratissimum erit judicium super ea quaestione Tuum. Officiosam ipsi a me salutem nuntiari peto.

Gaudeo Tibi aliquam conditionem offerri apud Batavos, quae non contemnenda videtur. Scito me quoque nuper Illustrissimo viro Eberhardo Dankelmanno, intimo Potentissimi Electoris Brandeburgici Ministro, per amicum Te nominari curasse ad Professionem Mathematicam novae apud Halas Saxonum Academiae, rescriptumque mihi est, dedisse illum in mandatis, ut de Te et fortasse apud Te quaereretur: quae causa quoque est, ut hoc ad Te responsum maturandum putarim. Saltem ergo electionem puto habebis. Utrovis modo viciniorem Te habere gaudeo, si modo Tibi in ea re aeque ac nobis consulatur. Vale etc.

Hanoverae $\frac{6}{16}$ May 1695.

XI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Vesentione responsi nihil adhuc accepi, sed cum ex postremis Tuis D. Abbatem Boisotium mortuum intellexerim, amplius haud sollicitabo. Quid P. Herr rescripserit, ipse videas ex adjunctis hisce ad Bibliopolam exaratis. Est ut opinor speciosus praetextus, quo petitum Tuum honeste declinet; quoniam forsan ex Bibliotheca sui Principis descriptionem concedere non audet. Doleo sane vicem meam, quod mea Tuis commodis inserviendi promtitudo non ex voto cesserit. Optime facis, si valetudini Tuae consulis: Deus det ut omnia prospere cedant.

Nihil elegantius est, quam consensus quem observasti inter numeros potestatum a binomio et differentiarum rectangulo; haud dubie aliquid arcani subest. Nondum satis vacavit examinare an quid inde pro summationibus elici possit. Videtur tamen quantitatem propositam differentialem cujusvis gradus summari posse,

eam primo differentiando, et dein sumendo tertiam proportionalem hujus novae quantitatis differentialis ad differentialem propositam, consideratis interim d, d^2, d^3, d^4 etc. tanquam quantitatibus algebraicis et non ut literis tantummodo caracteristicis. Sic, ex. gr. tertia proportionalis d^3 ad dd erit d, et d^4 ad d^3 erit dd, et ita de aliis. In hunc finem esto proposita quantitas differentialis tertii gradus haec $x d^3 y + dx ddy$, cujus summa invenienda sit; differentietur ea, et habebitur $x d^4 y + 2 dx d^3 y + ddx ddy$; posito pro x, $d^0 x$ sumatur tertia proportionalis $d^0 x d^4 y + 2 dx d^3 y + ddx ddy$ ad $d^0 x d^3 y + dx ddy$, quae erit $d^0 x ddy$ vel $x ddy$. Dico itaque $x ddy$ esse summam vel integrale quantitatis propositae $x d^3 y + dx ddy$; quod quidem ante calculum primo intuitu patebat; non tamen incongruum est ostendisse, quomodo per methodum eo perveniri possit. Nota, quod in hoc scrutinio literae ipsae, quae alias quantitatem denotant x, y, non considerandae sunt ut tales, sed dumtaxat quatenus determinant d, d^2, d^3 etc. Hoc modo quadratum ipsius $d^3 y$ non est $d^3 yy$, sed $d^6 y$; cubus ipsius $d^3 y$ non $d^3 y^3$, sed $d^9 y$: Idem puta de multiplicatione, divisione et extractione radicum $d^2 y \times d^3 y = d^5 y$, $\sqrt[3]{d^6 y} = d^2 y$; item $\frac{d^2 y}{d^2 y} = d^0 y = y$, et hac ratione $\frac{x}{x}$ non est $= 1$, sed $= \frac{d^0 x}{d^0 x} = d^0 x = x$; quoniam autem $d^{-m} = \int^{+m}$, erit ex. gr. $\frac{d^4 y}{d^5 y} = d^{-1} y = \int y$, et $\frac{d^3 y}{d^2 x} = d^3 y d^{-2} x = d^3 y \int^2 x$: idem intelligendum, si plures sint indeterminatae x, y, z etc. Accidere potest, ceu praevideo, ut summa quantitatis differentialis propositae, hoc modo inventa, exprimatur per seriem; tunc nempe quando proposita differentialis non est summabilis. Ex. gr. summanda sit $x d^3 y + 2 dx ddy$; si differentiatur, prodibit $x d^4 y + 3 dx d^3 y + 2 ddx ddy$: Ergo tertia proportionalis hujus ad illam, more nostro sumta, erit $\frac{d^0 x d^6 y + 4 dx d^5 y + 4 ddx d^4 y}{d^0 x d^4 y + 3 dx d^3 y + 2 ddx ddy}$; instituta itaque divisione continua, incipiendo a primo denominatoris membro, prodibit haec series $d^0 x ddy + dy dx - d^0 y ddx + d^{-1} y d^3 x - d^{-2} y d^4 x + d^{-3} y d^5 x$ etc.

$$= x ddy + dy dx - y ddx + \int y d^3 x - \int\int y d^4 x + \int^3 y d^5 x \text{ etc.}$$

quae proinde aequalis est $\int x\,d^3y + 2\,dx\,ddy$. Alia invenitur series incipiendo divisionem ab ultimo membro, nimirum haec $2\,d^0x\,ddy - d^{-1}x\,d^3y + d^{-2}x\,d^4y - d^{-3}x\,d^5y + d^{-4}x\,d^6y$ etc. vel $2\,x\,ddy - \int x\,d^3y + \int\int x\,d^4y - \int^3 x\,d^5y + \int^4 x\,d^6y$ etc. adeoque priori aequalis est. Video me hic inter scribendum, et quidem ex insperato, incidisse in methodum universalem summandi vel per vel citra seriem, quantitatem differentialem cujuscunque gradus; video etiam infinita alia adhucdum abscondita hic latere; ea autem eruere, et studiosius excolere nunc non vacat: ita enim distractus sum aliis his minime affinibus cogitationibus, ut mirer sufficientem pro his attentionem mihi, nescio qua inquietudine agitato, superesse.

Caeterum consensus quem observasti inter $\boxed{m}\,\overline{x+y}$ et $d^m\,\overline{xy}$ vel etiam inter $\boxed{m}\,\overline{x+y+z}$ et $d^m\,\overline{xyz}$, non succedit, uti putabas, ubi occurrit potentia ipsius x. Ratio operanti patebit; si enim comparatio fiat inter $\boxed{m}\,\overline{2x+y}$ seu $\boxed{m}\,\overline{x+x+y}$ et inter $d^m\,\overline{xxy}$, locum illa non habebit, nisi confundatur ddx cum $dx\,dx$, id est differentia secunda cum quadrato differentiae primae dx. Sumatur ex. gr. potestas secunda ipsius $2x+y$, et differentia secunda ipsius xxy, habebitur $4xx + 4xy + yy$, comparanda cum $2yx\,ddx + 2y\,dx\,dx + 4x\,dx\,dy + xx\,ddy$; quod fieri nequit, quia ibi tria tantum, hic autem quatuor diversa membra reperiantur: sin autem $4xx$ dispescatur in duas partes $2xx$ et $2xx$, poterit prior conferri cum $2yx\,ddx$, et posterior cum $2y\,dx\,dx$, quia utrobique litera d cum x affecta bis reperitur: sed, uti jam dixi, ddx et $dx\,dx$ sumendae sunt pro quantitatibus homogeneis, ceu supra feci. Idem etiam sentiendum de comparatione inter $\boxed{m}\,\overline{x-y}$ et $d^m\frac{x}{y}$ seu $d^m\,xy^{-1}$; aliter enim, quam conditione dicta non succedit.

Regula mirabilis, quam Tibi esse ais pro inveniendis numeris coëfficientibus potestatum, non tantum a binomio, sed et a trinomio, imo polynomio quocunque, fecit ut et ego aliquam tentarem; video enim summum suum usum habere posse expedite elevandi quantitatem aliquam ad certam potentiam. Et reapse, perlustratis quibusdam proprietatibus numerorum, aliqua illico mihi venit in mentem. Esto enim polynomium quodcunque $s+x+y+z$ etc. elevandum ad potentiam quamcunque r; quaeritur coefficiens termini $s^a x^b y^c z^e$ etc. Dico coefficientem illum fore

$\frac{r.r-1.r-2.r-3.r-4.....a+1}{1.2.\ \ 3....b\times 1.2.3....c\times 1.2.3..e \text{ etc.}}$ id est, productum omnium terminorum progressionis arithmeticae, a numero potestatis multinomii incipientis et unitate descrescentis, usque ad numerum unitate auctum potestatis primi nominis, productum, inquam, hoc divisum per productum omnium terminorum tot progressionum arithmeticarum unitate ascendentium usque ad numerum sui respective nominis potestatis, quot sunt reliqua, praeter primum, nomina, dabit coefficientem quaesitum. Ubi notandum quod taediosa divisio et maxima pars multiplicationis evitari potest, destruendo ante operationem partes multiplicantes numeratoris, quae sunt communicantes cum partibus multiplicantibus denominatoris. Exemplum sumamus, quod Tu ipse proponis: Quaerendus nimirum coefficiens termini $s^5x^3y^2$ comprehensi in valore trinomii $s+x+y$ ad decimam potestatem elevati: substituantur in formula generali valores, nempe pro r, 10; pro a, 5; pro b, 3; pro c, 2; habebitur pro coefficiente quaesito $\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.\times 1.2} = 10.9.4.7 = 2520$. Si quadrinomii $s+x+y+z$ ad 20 potentiam elevati quaeratur numerus coefficiens termini $s^8x^6y^4z^2$, erit $=$
$\frac{20.19.18.17.16.15.14.13.12.11.10.9}{1.2.3.4.5.6.\times 1.2.3.4.\times 1.2} = 19.17.5.7.13.12.11.10.9$
$= 1745944200$. Gratissimum esset Tuam nunc videre regulam, ut expediri liceret, an inter se consentiant. Tua fortasse simplicior erit; interim saltem, nec mea opus habet Tabula jam calculata.

Nova Meditatio, quam affers, circa maxima et minima, mihi certe non est nova; quinimo prima fuerat speculatio, per quam solutionem problematis curvae catenariae tentaveram; sed optatum successum tum non assecutus, diu post plenariam solutionem inveni, et quidem non ex proprietate tangentium ejus, respectu centri gravitatis, sed ex eo quod infimum, vel aliud quodvis punctum B catenulae, in E et F suspensae, semper eamdem vim firmitatis requirit, in quocunque demum alio puncto S suspendatur. Consule, si placet, schediasma meum Actis anni 1691, juxta Tuum et Hugenianum insertum, et videbis inter proprietates, quas ibi recensui, hanc ultimam: Si super EF infinitae intelligantur descriptae curvae ipsi funiculariae EBF aequales, illaeque in rectas extendantur, et in singulis singulae ex-

tensae punctis applicentur rectae ipsis respective distantiis a linea EF aequales, erit omnium spatiorum, quae sic efficiuntur, illud, quod a funicularia gignitur, maximum. Ex quibus luculenter apparet, me innuere voluisse, inter omnes curvas aequales super linea data EF descriptas, funiculariam habere centrum gravitatis remotissimum ab EF, et consequenter horizonti proximum. Hactenus, ut fatear, hujusmodi problemata insolubilia mihi visa fuere, et etiamnum videntur; nec mihi ratio Tua, ea ad series reducendi, plene satisfacit. Videris enim unam eandemque literam, nunc constantem, nunc differentiabilem supponere, quando dicis z longitudinem curvae esse constantem (quod volo, sed certo modo consideratam) et paulo ante ponis $z = ax + bxx + cx^3$ etc. quam seriem (ideoque ipsam z) differentiasti et multiplicasti per x, eamque iterum summasti ponendo $\int \overline{x\,dz} = \frac{1}{2} axx + \frac{2}{3} bx^3 + \frac{3}{4} cx^4$ etc. ex qua operatione simul apparet coefficientes a, b, c etc. Tibi hucusque fuisse constantes; postea vero easdem differentiabiles ponis, faciendo $a = 10e + 11a$, $b = 20e^2 + 21ea + 22aa$, $c = 30e^3 + 31e^2a + 32ea^2 + 33a^3$; ubi literam e proindeque ipsas coefficientes a, b, c etc. ut differentiabiles consideras. Plura alia sunt, quae non satis capio; videtur etiam series, quae inde nascetur, prolixissima fore, ita ut optem Methodum Tuam applicatam videre in leviori quodam exemplo, quale est hoc: *Invenire* (fig. 31) *naturam curvae ABC, datae longitudinis, super recta data AC descriptae, quae cum recta data AC includit maximum spatium possibile ABCA.* Demonstrare possum curvam ABC esse circularem; sed per quam methodum analytice eo perveniendum sit, ne minimum quidem lumen affulget. Caeterum, multa olim circa maxima et minima observabam, quae nondum animadversa reperio, quae tamen in potestate sunt; quandoque nempe infinita maxima vel minima in eodem problemate occurrunt, quorum illud quod maximum vel minimum est (hoc est maximum maximorum, vel minimum minimorum) determinandum sit: Ut si quaeratur (fig. 32) triangulum vel aliud polygonum ABC, omnium curvae cuidam ellipticae datae inscriptibilium maximum. Ad hoc solvendum video supponi debere duo puncta A et C data, ex quibus quaerendum tertium B, ita ut duae ductae BA, BC faciant cum data assumpta AC maximum triangulum saltem eorum quae super data AC describi possunt, verticem

habentia in curva elliptica: et sic triangulum ABC esset maximum simpliciter dictum vel primi gradus. Postea pono unicum punctum A datum et quaero alterum C, et ex hoc B, ita ut triangulum ABC sit omnium maximorum maximum, vel maximum secundi gradus. Denique et ipsum A quaero, et ex hoc C, et ex hoc B, et habebo triangulum ABC omnium maximorum secundi gradus maximum vel maximum tertii gradus. Sic si loco trianguli aliud quodvis polygonum, omnium in hoc ordine maximum, inscribendum esset, haberetur maximum tanti gradus, quantus foret numerus laterum polygoni: et hac ratione spatium ipsum ellipticum est maximum gradus infinitesimi. Eodem modo se res habet cum determinatione minimi polygoni curvae ellipticae inscribendi.

Habeo et aliam speciem maximorum et minimorum; nimirum quando quantitates non elementaliter, sed saltatim crescunt et decrescunt, quod contingit in seriebus, in quibus termini aliquousque crescunt, postea vero descrescunt, vel contra; oporteat analytice maximum vel minimum terminum invenire, ut in hac $\frac{a}{b} + \frac{a \,.\, a+1}{b^2} + \frac{a \,.\, a+1 \,.\, a+2}{b^3} + \frac{a \,.\, a+1 \,.\, a+2 \,.\, a+3}{b^4}$ etc. quaeritur quotus sit terminus minimus; dico, si series continuetur ut numerus terminorum sit $b - a + 1$, fore duos ultimos terminos omnium totius seriei minimos: sunt enim aequales. Data progressione arithmetica, ab unitate incipiente et eo modo disposita

A	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6
B	7 + 8 + 9 + 10 + 11
C	12 + 13 + 14 + 15
D	16 + 17 + 18
E	19 + 20
F	21

quo hic vides, determinanda est generaliter series transversalis C, cujus summa sit omnium maxima. Sit numerus terminorum primae seriei transversalis $A = a$, numerus quotus seriei quaesitae $= x$, dico x fore $= a + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{3} aa + \frac{1}{3} a + \frac{1}{4}}$. Si haec quantitas est numerus rationalis et integer, erunt duae series transversales maximae aequales, nempe illa quae inventa est, et quae immediate sequitur: sin vero quantitas inventa sit numerus irrationalis vel fractus, erit ille sumendus integer qui proxime major

est, et erit unica series maxima. Esto ex. gr. $a = 6$, erit $a + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{3}aa + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}} = 6\frac{1}{2} - \sqrt{14\frac{1}{4}}$, cujus numerus integer proxime major $= 3$: dico itaque seriem transversalem tertiam C esse omnium maximam; si $a = 30$, invenietur series maxima esse decima tertia; et sic quantuscunque sit numerus a, e vestigio quasi assignari potest, quota sit maxima transversalium series: quod certe plures alii non reperirent nisi forsan mechanice, id est, operatione taediosa, et ipsa formatione omnium numerorum.

Multa adhuc adducere possem, quae olim circa maxima et minima meditatus fueram, quaeque non contemnenda videntur. Et sane, non ita pridem hujusmodi materia commercium literarium, quod mihi cum D. Hospitalio intercedit, diu satis alebat, ubi inter alia vidimus, quod in vulgari differentialium methodo, differentiale maximi vel minimi non semper sit nihilo aequale faciendum, cum quandoque possit esse infinitum, imo in quavis ratione cum caeteris differentialibus. Ostendi enim potest curvas illas (fig. 33) ABC (quas ego Gallice courbes rebroussantes, et punctum B point de rebroussement nuncupo, in quarum censu habetur parabola cubicalis secunda) habere maximam applicatam BD, cujus elementum vel differentiale non solum est infinitum, sed simul in quavis alia ratione cum differentiali abscissae AD, quod cuipiam paradoxum videretur. Notavimus etiam, ut id obiter innuam, in puncto flexus curvarum radios circulorum osculantium non semper esse infinitos, ut hactenus creditum est, et ut Tute alicubi in Actis supponere videris; dantur enim curvae, ubi evidentissime demonstrari potest, quod radius circuli osculatoris in puncto flexus omnino evanescat. Interim et hoc verum est, quod radius ille semper sit aut infinitus aut nullus, nunquam autem finitae magnitudinis. Sed properandum ad alia.

Summo jure objecisti Fratri meo, quod putaverit unicam tantum dari transcendentem, videl. Logarithmicam, cujus puncta quotvis per communem Geometriam inveniri possint; egregie enim notasti alteram transcendentem pro sectionibus Anguli, cujus puncta etiam per communem Geometriam facillime habentur. Ergo nullus dubito, plures alias hujusmodi dari, pro quibus autem methodum excogitare nondum vacavit: saltem jam video illam in eo consistere, ut inveniatur aequatio differentialis constans duobus membris omnino inter se similibus et non integrabilibus, quae tamen aequatio sit

pro curva algebraica, qualis est haec, $\frac{dx}{\sqrt{aa+xx}} = \frac{dy}{\sqrt{aa+yy}}$, ubi duo membra $\frac{dx}{\sqrt{aa+xx}}$ et $\frac{dy}{\sqrt{aa+yy}}$ sunt similia, id est, d x cum a et x, eodem modo componitur, ac d y cum a et y; non autem sunt integrabilia, quia eorum integralia vel summae dependent a quadratura hyperbolae. Interim aequatio differentialis comprehendit (praeter rectam, quam omnes hujusmodi aequationes necessario comprehendunt, quam autem hic non puto) aliam curvam algebraicam, quam sic invenio: $\frac{dx}{\sqrt{aa+xx}} = \frac{dy}{\sqrt{aa+yy}}$, ergo $\frac{y.xdx}{\sqrt{aa+xx}} = \frac{x.ydy}{\sqrt{aa+yy}}$ eorumque summae $y\sqrt{aa+xx} - \int dy\sqrt{aa+xx}$ $= x\sqrt{aa+yy} - \int dx\sqrt{aa+yy} \pm bb$. Est autem $dy\sqrt{aa+xx}$ $= dx\sqrt{aa+yy}$ per aequationem datam: ergo etiam $\int dy\sqrt{aa+xx}$ $= \int dx\sqrt{aa+yy}$: illis itaque destructis, manebit aequatio algebraica $y\sqrt{aa+xx} = x\sqrt{aa+yy} \pm bb$, quae determinat modum spatium hyperbolicum dividendi algebraice in quotvis partes aequales; ex qua divisione ipsa Logarithmica producitur. Sic ex aequatione differentiali membrorum similium et non summabilium $\frac{dx}{\sqrt{aa-xx}} = \frac{dy}{\sqrt{aa-yy}}$ invenio curvam algebraicam $y\sqrt{aa-xx}$ $= x\sqrt{aa-yy} \pm bb$, qua ostenditur etiam circuli divisiones producere curvam transcendentem, cujus puncta quotvis algebraice possunt inveniri, quae ipsa Tua est curva sectionum anguli. Idem praestari potest, si inveniatur curva algebraica, quando alterum membrum aequationis differentialis similis per quemvis numerum multiplicatur, ut si fiat $\frac{ndx}{\sqrt{aa-xx}} = \frac{dy}{\sqrt{aa-yy}}$.

Optime notasti in Actorum Aprili, constructionem meam curvae aequilibrii immediate inveniri posse ope solarum differentialium; sed hoc ipsum est, quod mihi ansam dederat cogitandi, annon hujusmodi perbrevis constructio per vulgarem Geometriam elici posset;

quod commodissime fieri posse videbam per notissimum illud axioma mechanicum, quod jam ab ipso Archimede, ni fallor, fuit receptum; et hac ratione ostendere volui, quod mediocris etiam Geometra, differentialium calculi omnino ignarus, genuinam problematis solutionem invenire potuisset; itaque non satis possum mirari, qui acciderit, ut Frater meus ad tam prolixam, etiam pro specialissimo casu, pervenerit solutionem. Eandem difficultatem moves contra objectionem meam Craigio factam, quam jam et D. Hospitalius mihi movit; verum video, quod ambo meam mentem non recte percepistis; verissimum enim et mihi videtur, quod terminus summator termini irrationalis debeat continere eandem irrationalitatem; contra quod non fuit objectio mea, sed illud non verum mihi videtur, quod Craigius tacite supponit, terminum summatorem non solum idem signum radicale (quod verum esset) sed etiam semper eandem quantitatem sub signo radicali contentam habere, quam habet terminus summandus; posterior enim hujus propositionis pars falsa est; in quam rem D. Hospitalio dedi exemplum, et complura alia dare possem, in quibus methodus Craigii manifestissime non succedit ob solam suam falsam hypothesim. Forte occasio dabitur, de his in Actis aliquid publicandi.

Caeterum, quod dicis observationem meam, quod nempe summatio ordinatarum $\sqrt{a^4 + x^4}$ pendeat ex dimensione curvae parabolicae cubicalis primae, etiam Tibi fuisse factam a Marchione Hospitalio, scias quod illam a me primo habuerit, cujus forte alias Te non admonuisset. Interim vix credo summationem dictam connexionem habere cum dimensione curvae hyperbolicae. Considerationes Tuas, quas pro contrahenda quadraturarum inquisitione detexisti mihique communicandas promisisti, grato animo recipiam, quandocunque venerint.

Totus persuasus sum, osculum circuli cum curva esse concursum trium intersectionum in eodem puncto, nisi in vertice curvae, ubi aliquando quatuor concurrunt. Concipe enim punctum aliquod, tanquam centrum, fluere in recta indefinita perpendiculari ad curvam; nunquid circulus, centro ubivis existente descriptus, tangit curvam alibique adhuc bis secare poterit: punctum vero contactus est concursus duarum intersectionum, sed unicum est punctum, in quo centro circuli existente, tertia intersectio coincidat cum duabus permanentibus; est enim accidens, si quarta simul concurrit. Ex. gr. sectionem conicam circulus in pluribus quam

quatuor punctis secare non potest, ut demonstratur in doctrina Conicorum; evidentissimum autem est circulum radii evolutae, id est, ipsum osculatorem, praeter quam in puncto osculi, adhuc alibi secare sectionem conicam: sic itaque, si osculum esset concursus quatuor intersectionum, revera sectio conica quinquies a circulo secaretur. Hoc interim verum est, quod quaevis curva in se rediens ideoque et ipse circulus aliam curvam quamcunque in punctis imparibus secare nequit; et ob hanc rationem osculum non datur absque quarta intersectione alibi facta. Plura de hac materia addere non possum; eorum enim quae vestram disputationem concernunt, nunc non recordor, nec Acta Lipsiensia mihi sunt ad manus, ut ea relegere possem.

Jucundissimum fuit legere meditationes Tuas metaphysicas, quas sub Specimine Dynamico, in eodem Actorum Aprili, publicasti. Ejusdem Tecum sum opinionis, quod corporum natura primario non consistat in extensione; haec enim et ipsi vacuo competit, sine quo sane motum concipere nequeo. In quo autem corporea natura praecise consistat, hoc utique facile dictu non est. Tu quidem illam ponis in Vi naturae ubique ab Authore indita, quam primitivam appellas; ipsam autem extensionem in continuatione sive diffusione hujus substantiae nitentis vel vi primitiva instructae; sed videris mihi supponere id quod est in quaestione. Subjectum enim vis, in quo nempe ea inhaeret, est ipsum corpus, et sic corpus tanquam praeexistens concipi debet: nisi forte distinctionem feceris inter vim potentialem et actualem; illam, quae animabus competit corpora ad nutum voluntatis movendi, hanc, quam corpora a priori vi commota sibi invicem communicant; et sic eo redires quod, nisi vehementer fallor, a Te olim statutum alicubi me legisse memini, corpus esse mentem momentaneam. Unde conjicio Te nunc eo collimare, quando dicis Vim primitivam respondere Veterum formae substantiali.

Optime notasti contra Cartesianos, quod factum ex mole corporis in velocitatem non sit quantitas motus, sed quantitas impetus seu, ut postea appellas, motionis, ex quarum aggregato nascatur quantitas motus. Quae dein dicis de tubo circa centrum rotato, de globo in cavitate ejus existente, de nisu seu sollicitatione, de vi viva et mortua etc. verissima debent videri iis, qui ex nostra interiori Geometria norunt, qua ratione quodlibet quantum

ex infinitis differentialibus, et quodlibet differentiale ex infinitis aliis, et quodlibet horum aliorum adhuc ex aliis infinitis, et ita in infinitum, componi intelligendum sit; quibus consideratis, certe destruitur unico ictu Atomistarum opinio.

Haec et alia similia, quae in Mathesi abstracta attentius consideranti obvenerunt, olim etiam mihi ansam dederunt ad plurimas speculationes Tuis non multum absimiles, circa rerum exordia et proprietates, quarum aliquae si publicarentur, procul dubio quam plurimis pro mero lusu ingenii, ne dicam pro ridiculis, haberentur, quae tamen rationi quam optime consentaneae mihi videntur. Quod vero sub finem de virium aestimatione dicis, fateor Tuas rationes me nondum convincere, non ideo, quod opinio Tua sit prorsus nova et contra eam, quae hucusque fuit ubique recepta et nunquam in dubio posita, sed ideo quod eam ab effectu deducas, qui tamen non perpetuus et constans est. Quod enim corpora ascensus faciant quadratis celeritatum proportionales, non ideo etiam vires erunt in hac ratione, existentibus corporibus aequalibus; ascensus quippe isti, licet sint homogeneum quid, non sunt effectus, nisi ut ita dicam, accidentales, qui solummodo dependent a legibus gravitatis et motu materiae aethereae, quas utique summus rerum Arbiter si aliter constituere voluisset, etiam corpora celeritatibus suis iisdem, et proinde viribus iisdem, facerent ascensus omnino in alia ratione; unde constat hujusmodi effectus non immediate et unice provenire a viribus corporum motorum, quae procul dubio pergerent moveri in infinitum, si ab alio peregrino non impedirentur, quod itaque ad certam tantum altitudinem ascendant, potius est effectus retardationi materiae ambientis adscribendus. Sed quid multis opus; idem Tuum argumentum in Te retorqueri potest, quo ostendam vires corporum aequalium esse in ratione celeritatum ipsarum. Concipiamus enim duo corpora aequalia, A celeritate ut 2, et B celeritate ut 1, moveri, si vis horizontaliter in vacuo, et nunc in via simul offendere medium aliquod uniformiter densum et retardans, quod ingrediuntur; nunquid in medio uniformi celeritates utriusque corporis successive imminuuntur, et imminutiones sunt in ratione spatiorum percursorum. Sic itaque ambobus corporibus tandem ad quietem redactis corpus A nonnisi duplo altius in medium penetraverit, quam corpus B. Ergo, Tuo more loquendo, vis corporis A est ad vim corporis B, ut effectus illius ad effectum hujus, id est ut 2 ad 1. Eodem omnino modo ostendere possem, vires corporum

motorum esse in alia quavis ratione, si medium non uniformiter penetrabile supponatur: in quavis enim suppositione corpora vires suas convertunt in penetrationem vel potius in superationem resistentiae continuae medii. Multa alia super hac materia dicenda haberem, sed epistolae forma jam praeter spem nimis excrescit.

Ex quo ultimas meas ad Te dedi, jam ter literas (quarum postremas nudius-tertius) accepi a D. Braunio Theol. Doctore et Professore Groningensi, qui mihi dicit, me forte brevi a Proceribus Academiae suae invitatum iri ad Mathesin publice ibi docendam, sed eos velle certiores esse de adventu meo, ideoque a me quaerit, num hanc spartam acciperem cum stipendio annuo mille et ducentorum florenorum Hollandicorem praeter emolumenta academica. Et sane respondi ante acceptas Tuas ultimas verbumque dedi, ut vix retrahere possim, nisi forte novum aliquod incidens interveniat. Interim plurimum Tibi debeo pro cura quae Tibi mei est, dum laborasti ad obtinendam pro me Professionem Mathematicam novae apud Halas Saxonum Academiae. A longo jam tempore, non diffiteor, nova haec Academia mihi appetitum movit. Quid autem nunc, rebus sic stantibus, faciendum, Te ipsum consulo, qui meus es patronus, et in quem omnem fidem pono; quidnam mihi utilius, et utrum alteri praeferendam censes, indica. Vale et ama, ut soles etc.

Basileae d. $\frac{8}{18}$ Junii 1695.

P. S. Audio hac ipsa hora, ex literis D. Hospitalii, Nob. Hugenium obiisse. Heu! quantus dolor, si verum esset, me circumdaret; fuit enim, ut audivi a Marchione, promotor meus, qui primus ad professionem Groningensem me commendavit. Sola fere ejus futura conversatio me illuc trahebat, nunc eheu! omne meum solatium cecidit; forsan vivit adhuc; dic quaeso veritatem.

XII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gratias ago, quod apud Sangallenses inquisisti. Non dubito quin R. P. Herr candide scripserit quod res est. Vitodurani postrema

tantum mihi desunt, quae fortasse non difficulter ab Einsidelensibus impetrari possent. Sed nolim Tibi negotium facessere, quem distractum video, praesertim cum de familia transferenda sit cogitandum. Idem dicam de Abbate Boisotio. Obiit ille, non ideo minus tamen Dn. Praeses Boisotius, Frater ejus, talia ad me libenter mittet; praesertim cum in Elogio Abbatis, typis edito, facta sit perhonorifica mentio concilii mei, et voluntas defuncti in me juvando inter laudes ejus referatur. Ipsum elogium mihi missum est. Quanquam et translata inde in Diarium Eruditorum viderim, quae me tangebant. Sed quid commode facere possis, judicare Tuum est, meum vero de Te (si possem) ornando, potius quam onerando cogitare, quem quanti faciam, mallem rebus quam verbis ostendere.

Non sine admiratione vidi, quam facile et quam alte penetraveris in ea quae proposueram de singulari calculi genere, quo rectangulorum differentiales cum polynomiorum potentiis conferuntur, tantum pro literae x exponentibus substituendo exponentes ipsius d ipsam x afficientis. Et pulchre notasti, hoc modo ipsas d tractari quasi literas, non considerando ipsas x vel y, nisi tanquam afficientes literam d, versa rerum vice, cum alias d sit tantum nota quaedam syncategorematica, x autem et y sint quantitates. Quod seriem infinitam attinet, poterit ea interdum commode finiri, aliquam ex ipsius d quasi-potentiis ponendo nihilo aequalem, quemadmodum et per alias hypotheses variari calculus potest, quoniam alicui quasi-potentiae ipsius d valorem pro arbitrio tribuere licet. Ex his jam magis intelligi arbitror, quanto jure dudum differentias potentiis, summas radicibus comparaverim; quod nunc reali harmonia comprobatur, praesertim respectu termini ipsius seu summae primae, quae etiam quasi extractione quadam invenitur. Et omnino, quae in geometrica progressione et logarithmis operationes locum habent, eas hic imitari licet, quod sane ingeniosissime in rem contulisti. Nec dubito, quin egregium aliquid in animo habueris, cum scribis Te, inter scribendum, ex insperato incidisse in methodum universalem, vel per seriem vel citra seriem summandi quantitatem differentialem cujusque gradus, infinitaque alia adhucdum abscondita hic latere, quae nunc excolere non vacet. Quodsi mihi eam methodum et quae alia in his occurrent, communicaveris, habebis me praeclarorum inventorum Tuorum praeconem candidissimum. Succedit consensus etiam inter $\underline{|m|}\,\overline{x+x+y}$ et inter $d^m\overline{xxy}$,

modo scribas $\boxed{m}\,\overline{x+\xi+y}$ et $d^m \overline{x\,\xi\,y}$; ita enim si m sit 2, fiet $x^2 + \xi^2 + y^2 + 2x\xi + 2xy + 2\xi y$, et $d^2x + d^2\xi + d^2y + 2dx\,d\xi + 2dx\,dy + 2d\xi\,dy$. Sic enim manet comparatio, modo x et ξ non confundamus, etsi coincidant. Hic libertas variandi, quae poterit prodesse ad summandum.

Regula pro coefficientibus potestatum a polynomiis, seu generalis potestatum generatio, quae mihi aliquando naviganti in mentem venit, non abludit a Tua. Soleo tamen enuntiare, ad evitandam divisionum mentionem, per numeros combinatorios, veluti in decimaseptima potentia existens forma $a^5 b^4 c^3 d^3 e^2$ habet coefficientem, qui fit, cum in se invicem ducuntur numeri exprimentes 17 rerum quaterniones, 17 — 4 rerum terniones, 17 — 4 — 3 rerum terniones, 17 — 4 — 3 — 3 rerum biniones. Sed numeri combinatorii rursus ex productis arithmetice progredientium fiunt, ut constat; unde res in effectu cum Tua forma coincidit.

Problemata, in quibus quaeritur ex lineis omnibus una praestans aliquid in desideratis maximum, non possunt Tibi esse nova. Sed novum fortasse est, rem methodo quadam aggredi, qualis illa est, quam ad Te nuper perscripsi, in qua quae contra moves, non obsunt. Cum curvam quaesitam assumo ut datam, eique assigno certam seriem, utique quamdiu hanc unam respicio, sumo x et z pro variabilibus, et a, b, c etc. pro constantibus. Sed hoc modo semel assecutus aequationem a differentialibus liberam eamque jam ad maximam accommodans, considero plures tales series potuisse intelligi, eas autem habere x et z communes, sed a, b, c etc. sunt variantes; has ergo tunc differentiari oportet, non illas. Et omnino res se habet, ut in meo calculo differentiali reciproca, ubi aliquando non ordinatae, sed parametri differentiantur. Itaque non est quod mireris, eandem quantitatem a me, nunc ut constantem, nunc ut variabilem sumi. Etsi autem via ad seriem perveniendi prolixiuscula videatur, fortasse tamen series ipsa satis simplex fiet, cum ipsa curva quaesita est simplex. Quanquam hic id tantum quaeratur, ut certam ad haec perveniendi methodum obtineamus.

Arcum, qui maximum segmentum data longitudine includat, esse circulum, non alia methodo quaerere instituebam, cum haec meditarer. Oportet veniri ad aliquid omnibus curvis commune, ut inde fiat electio, nec aliud hactenus occurrit aptum, quam series infinita, quae verum est ad talia Analyseos supplementum. Inquisitione Maximae inter maximas (repetita etiam replicatione) interdum

et in mechanicis problematibus opus habui. Inquisitio Tua maximae inter terminos serierum, ad imitationem maximae inter ordinatas figurarum, non videtur contemnenda. Verissimum est esse in curvarum punctis quibusdam quasi-irregularitates circa maxima vel minima, flexus et tangentes; et saepe fit, ut curva in uno puncto infinitas habeat tangentes, ut si in curvis, qualis adjecta est (fig. 34), caput continue minuatur tandemque evanescat in punctum; tunc enim infinitae illae tangentes, quarum totum caput erat capax, in unum illud punctum quadrant.

Subtilissima mihi visa sunt, quae commentus es, circa usum aequationum differentialium, inter terminos similes, ad inveniendas curvas transcendentes, quarum puncta haberi possint algebraice, quae velim prosequaris. Optime feceris, si ad Acta miseris, in quibus Craigium putas errasse. Non observavi Circulum Conicam, praeter osculum, adhuc alio in puncto secare solere, et regulariter, ni fallor, in osculo concurrunt duo contactus, id est, quatuor radices. Duae normales ad curvam regulariter se secant ut (fig. 35) BA et CP in P; accedente autem C ad B, variatur ipsum P, donec ad ultimum P, nempe B deveniatur, quod est centrum osculi in B. Haec ut conciliemus cum Tuis, ad exemplum quod innuis sed non exponis, in Conica venire utile erit. Et gratum erit, si mihi Tuam sententiam uberius perscripseris, cui eo libentius deferam, quo minus mihi tribuo, quoties rem satis examinare non possum. Quod vero meum Specimen Dynamicum attinet, puto Te vicissim non satis meditatum, quae scripseram, judicasse paulo festinantius. Eandem conclusionem consecutus sum, non tantum ab affectu, sed et a priori, ut innuisse me observabis, etsi non posuerim modum, qui habet aliquid elegans et inexpectatum. Minime autem putare debes effectum, quo usus sum, relatum ad gravitatem, habendum pro accidentali. Sume quemcunque effectum vim habentem, cujus adeo productione vis consumitur, idem prodibit; gravitatem autem elegi, quia aptissima est ad aestimationem, ut explicui. Et nihil refert, quomodo fiat gravitas, cujus causam esse ab ambiente non nego. Quod de medio affers, vim in se penetrantis absorbente, non facit ad rem nostram, quia vim, quam absorpsit, non reddit, seu non est effectus vim habens. Ast ambiens, quod est causa gravitatis, vim quam absorpserat, restituere potest, et tali effectu ego utor ad aestimandum. Pro medio igitur ut in eo quoque Tibi satisfaciam, fingamus (fig. 36) seriem elastrorum

aequalium et similium et aequaliter dispositorum, quae transitu corporis sint flectenda seu deprimenda, et acceptam flexionem retineant, objecto velut pessulo, adeoque sint tensa; reperies corpus A librae unius, celeritate ut 2, et corpus B, librarum quatuor, celeritate ut 1, aequaliter in tale medium penetrare, seu vim suam consumere, aequali elastrorum numero depresso; adeoque cum vim suam consumerint, aequali vi producta (aequali scilicet tensione) etiam aequalem vim habuisse. Nam effectum integrum, vim producere aptum, causae aequipollere suppono. Ex his intelliges, me non tam perfunctiorie in statuendis hujusmodi versari, quam Tibi (quod miror) persuasisti. Hugenius quoque a mea sententia non est alienus. Nec minus miror, quod putas me supponere quod est in quaestione, dum corporis naturam in vi primitiva nitendi retinendique colloco. Esto subjectum illud, cui vis inhaeret vel cui attribuitur esse ipsum corpus, non ideo tamen sequitur corpus concipi debere ut praeexistens; pari enim jure etiam Ens esset prius essentia, quia haec ei inhaeret. Et quicquid demum pro primario praedicato afferri posset, talem objectionem pateretur. Quin potius hoc praedicatum, sumtum cum praedicato communi Entis, substantiae, vel subjecti, constituit corporis notionem. Sed etsi attulissem aliquid posterius corporis essentia, non ideo principium petiissem, si modo attulissem attributum aliquod reciprocum intelligibile, quod a me factum puto, ab aliis non item. De Commercio Animae et Corporis mirabilem habeo sententiam, per quam puto omnia intelligibiliter explicari; eam nunc Tibi perscriberem, si tempus pateretur, faciam tamen prima quaque occasione, Tibi gratulatus, quod etiam his meditationibus non indelectaris. Ita enim judico, praeclara agitantem non solis mathematicis circumscribi debere: imo hunc usum debere esse Matheseos, ut etiam ad caetera acuat mentem. Vacuo non puto esse opus, non magis quam atomis, nec arbitror Te dissensurum, ubi rationes meas intellexeris.

Perturbasti me mirifice, dum nuntiatam Tibi incomparabilis Hugenii mortem scribis. Cum nihil tale ad me pervenerit, erratum spero. In eo eram ut darem ad eum literas. Aliquoties mihi infausta obtigit literarum mearum remissio, ob extinctos, quibus destinabam, velut Ernestum, Hassiae Landgravium, Seckendorfium, alios. Pelissonius et Abbas de la Roque, Diarii Gallici pristinus autor, meas accepere pene moribundi. Si obiisset Hugenius, maximam jacturam passi fuissemus. Frustra precaremur, ne

obierit; sed si vivit, ut spero, precabimur Deum, ut diu vivat, ipsumque rogabimus ut praeclaras cogitationes edere maturet.

Groningensem Professionem non possum Tibi dissuadere, re praesertim eo usque provecta, eoque magis, quod non plane exploratum habeo, quantum Halis Saxonum detur. Quidquid statues, opto ut ex sententia procedat, quo ingenium Tuum ad ea convertere totum possis, quibus Scientias augeas, ut praeclare coepisti.

Pene oblitus eram dicere Bernardum Nieuwentiit, Mathematicum Batavum, duos libros contra nostrum Calculum scripsisse, quos et mihi misit; sed cum honorificam nostri mentionem faciat, respondebo in Actis, et par pari reddam. Putat dx esse aliquid, sed $dxdx$, item ddx esse nihil, nec iteratas differentiationes capere potest; pro dx, dy utitur literis a, e, etc. et ita nostra primi gradus, aliis tantum notis in suam rem transferre studet. Sed quantos usus habeant nostrae notae, pulchre admodum ostendunt, quae inter nos inde ab aliquot mensibus per literas sunt agitata. Putat etiam nostrum calculum non porrigi ad $z = y^x$, si x, y, z sint indeterminatae. Hunc, quem credit, defectum ut suppleat, comminiscitur aequationem mirabilem, quae meo more erit $y^{\frac{x+dx}{\cdot}} + x y^{\frac{x+dx-1}{\cdot}} dy - y^x = dz$. Sed ex tali aequatione nulla potest duci constructio, cum non servet leges homogeneorum transcendentium. In responsione mea ostendam, quod nos huic, quem sibi persuasit, defectui dudum et melius providerimus, et quod Tu etiam per Te ad idem, quod ego in eo negotio repereram, perveneris. Eo enim ingenio sum, ut libenter suum cuique tribuam. Abutitur interdum nostris ratiocinationibus, ut tales calculos non esse tutos probet; velut, cum ex eo quod ipsae dx constantes assumuntur, secundum nos sequi putat etiam ipsas dy fore constantes. Quare breviter indicabo, in quo peccaverit, etsi omnia non sim persecuturus.

Puta ad Te pervenisse secundam editionem Medicinae Mentis Domini de Tschirnhaus; miror quod ne nunc quidem recte dederit modum enumerandi lineas Algebraicas cujusque gradus, et quod nostra evitare affectet, spe (quam frustraneam puto) ex vulgaribus notis omnia non minus commode ducendi: quanquam fortasse facile ad haec perventurus, nonnisi quia nostra admonuere.

Constitui numerum curvarum cujusque gradus foret operae pretium. Ubi illud dispiciendum esset, an umbilici seu foci, et

rectarum ab iis ad curvam ductarum summa vel differentia sufficerent ad omnes curvas ènumerandas. Domino Fratri, egregio Viro, rogo ut me commendes. Ego, tametsi visus sit paulo frigidius agere, non ideo minus ingenium ejus et doctrinam maximi facio, speroque vobis convenisse. Ita autem animatus sum, ut optem omnes, quibus serio cordi est profectus solidarum Scientiarum, animis non minus quam ingeniis consentire, nihilque omittere quod alere amicitiam queat; cui consequens est, omnibus modis et captare quod conciliare, et evitare quod offendere possit, ita tamen ut veritatis jura non laedantur. Prosunt vero imprimis favere mutuis conatibus, uti mutuo inventis; tum summa in dissentiendo moderatio, candor in consentiendo, ut agnoscamus ingenue, quid cuique debeamus; postremo communicare libenter, et facere vicissim, ne alium poeniteat communicasse. Haec sunt, quibus mire augeri posse putem et perfectionem inventionum, et voluptatem invenientium. Passim autem peccatur etiam ab egregiis hominibus, dum vel gloriolam in reprehendendo captant, vel alienae laudi, etiam tacitis actibus, detrahunt. Utrumque rectis ingeniis indignum, praeclaris etiam supervacuum censeo, imo gloriae quam expetunt noxium. Nam qui aliquid egregii possunt, vereri non debent, ne materia praeripiatur, cum potius juvari eos certum sit aliorum inventis, ut tanto meliora per se possint. Tuum ego pluris feci acumen maximum, quod conjunctum esse visum est cum candore, et moderatione, quae saepe deesse solent juvenibus etiam praestantissimis, at nondum expertis, quantum sit momentum in recto vivendi instituto. Cui si insistis, de quo dubitare non possum, nihil est quod a Te non expectem ad incrementum Scientiarum. Optarim autem ut nonnihil temporis etiam Medicinae meditandae conserves, quae vel maxime indiget ingenio Tuo, et vides quo applausu Tua de musculis*) fuerint accepta. Vale etc.

Dabam Hanoverae 24 Junii 1695.

*) Joh. Bernoulli dissertatio de Motu musculorum.

XIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum amicus nuper ex Batavis veniens mihi inter alia narravit, se Groninga transeuntem intellexisse una die tres Professores vocatos, atque inter illos Te, cujus nomen enuntiabat; ego Tibi ex animo gratulor, nec dubito quin, ita ferente ipsa itineris Tui ratione, videndi Tui copiam nobis sis facturus, cujus tamen rei tempus praenosse velim, quia saepe aliorsum mihi est excurrendum, ne casu aliquo spe gratissima excidam.

Nunc illud rogo, ut ante discessum a Domino Fratre Tuo, Celeberrimo Viro, multa salute a me nuntiata succedaneam Tuae curam mihi impetres, circa ea quae rogavi, sive a Domino Praeside Boisotio aliqua adveniant, sive ex Einsidelensi Caenobio obtinere liceat Vitodurani quae mihi desunt, sive quid aliud occurrat, in quo favore ejus sit opus, quem vicissim officiis demereri velim, si qua occasio offeratur.

Johannis Vitodurani Chronicon habeo ab initio usque ad haec verba: „Innocentio V. successit Johannes XXI, natione Hispanus, qui sedit pauco tempore, nam cum Camera, quam ipse pro se in Viterbii circus Palatium construxerat solum corruit, et intra ligna et lapides collisus, die VI post casum, Sacramentis omnibus perceptis, expiravit. Sedit autem anno 1277.“ Hic finit Chronicon meum. Secundum Vossium autem (in libro de Historicis Latinis) continuari debet usque in Seculum sequens. Quod si extat illa continuatio, eam mihi communicari rogo; paucarum sane plagularum erit, cum integrum Chronicon non sit admodum prolixum.

Quod caetera attinet, me ad priores refero, Tibique iter felix et caetera quoque omnia prospera precor.

Hanoverae 5. Jul. 1695.

XIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Denuo Vesontionem scribi curavi, ad sollicitandum Dn. Praesidem Boisotium, Fratrem Abbatis defuncti, ut monumentorum,

quae hic Tibi promiserat, Te compotem reddat. Hactenus occasionem nullam nactus fui scribendi ad Einsidelenses, quam tamen jam ante acceptas postremas Tuas diligenter quaerebam. Interim spero me tandem quandam impetraturum, et quidem per amicum, qui eo literas ferri curabit. Nihil enim non tentabo, quando agitur de Tuis desideriis explendis, et libenter omnia seponam negotia, mei licet ipsius incommodo, si Tuis commodis obstetricandum sit. Apud mercatores nostros inquisivi, quanti constet vectura centenarii Lipsia Basileam mittendi, quem ad 12 florenos imperiales ascendere dicunt, praeter alios exiguos quosdam sumtus hisce temporibus bellicis faciendos. Brevissima via est, ut Libri dirigantur Ulmam vel Norimbergam ad Bibliopolam quendam amicum (quorum Dn. Menckenius plures novit, hacque in re officia sua contribuere poterit) qui eos ulterius ad aliquem Bibliopolam nostratem transferri curabit. Ut autem periculum publicationis vel, uti vocant, confiscationis evitent, eos muniri oportet literis, quas nuncupant, attestatoriis a nostro Archigrammateo petendis, Ulmamque vel Norimbergam mittendis: is autem qui hasce attestaterias petit, juramento asseverare debet, non esse Libros in Galliam vehendos; sic itaque haec via difficilis Tibi erit, quia eos revera Lugdunum curandos dicis. Tutiorem quamvis paulo prolixiorem viam ego consulerem, quae Francofurtum instituitur, inde enim merces absque hujusmodi literis secure transportantur, ceu Mercatores mihi dicunt, interim vectura paulo pretiosior erit.

Nudius tertius iterum literas accepi a D. D. Braunio, in quibus significat rem feliciter confectam, meque ab Ampliss. Curatoribus ad Professionem Mathematicam destinatum, a Celsiss. Ordinibus vero approbatum et confirmatum fuisse, ita ut forte, ante octiduum, Publicas Vocationis Literas sim accepturus; simulque de rebus meis, tanquam cito Basileam deserturum, disponere me jubet, quod jam mense Octobri Groningae desiderer. Expeditam adeo itineris aggressionem a me exigi certe non expectabam, quia ad minimum hyemen adhuc Basileae sperabam transigere. Citissimus iste discessus me non mediocriter turbat, praesertim cum hactenus de transferendo domicilio nondum cogitaverim, nec uxorem meam, cui patriam, parentes, consanguineos, imprimis filiolum nostrum nondum semestrem, qui pro itinere perferendo nimis delicatus est, deserere moles insuperabilis videtur, ad iter mecum suscipiendum proclivem reddere potuerim. Verbo, mille me curae et sollicitudines, ceu

hisce casibus fieri solet, obruunt: ignosce igitur, si ad tempus meditationibus mathematicis valedixero, dum fata quietiorem reconsesserint statum. Non possum tamen quin ad singula ultimarum Tuarum puncta breviter respondeam.

Quanquam egregium aliquid in animo habuerim, et peculiare compendium sperarim pro summationibus, et imprimis pro methodo tangentium inversa, ex iis quae in prioribus meis animadverti, circa comparationem rectangulorum differentialium cum polynomiorum potentiis, non tamen per otium hucusque licuit ea ulterius prosequi. Et sane multarum imagine rerum ita sum confusus, ut, nonnisi in ipso scribendi articulo, hisce animum adhibeam, et quidem satis oscitanter. Memineris me seriem universalem invenisse pro quadraturis et rectificationibus, per continuam additionem et subtractionem quantitatum aequalium, quae Tibi non displicuit: En nunc aliam non minus curiosam. Quaerenda esto $\int\overline{n\,dz}$; differentietur $n\,dz$, habebitur $n\,ddz + dn\,dz$; ergo, modo meo, sumenda est tertia proportionalis ipsius $d^0 n\,ddz + dn\,dz$ ad $d^0 n\,dz$, quae itaque erit $\frac{d^0 n\,ddz}{d^0 n\,ddz + dn\,dz}$ = (dividendo numeratorem et denominatorem per dz) $\frac{d^0 n\,dz}{d^0 n\,dz + dn\,d^0 z}$: facta divisione continua, inchoando a priori denominatoris membro, proveniet $\int\overline{n\,dz} = d^0 n\,d^0 z - dn\,d^{-1} z + d^2 n\,d^{-2} z - d^3 n\,d^{-3} z$ etc. $= nz - dn\int z + d^2 n\int^2 z - d^3 n\int^3 z$ etc. inchoata vero divisione a posteriori membro, erit $\int\overline{n\,dz} = d^{-1} n\,dz - d^{-2} n\,ddz + d^{-3} n\,d^3 z - d^{-4} n\,d^4 z$ etc. $= dz\int n - d^2 z\int^2 n + d^3 z\int^3 n - d^4 z\int^4 n$ etc. quoniam nunc (posita dz constante) $\int z, \int^2 z, \int^3 z, \int^4 z$ etc. aequantur ipsis $\frac{zz}{1.2.dz}$, $\frac{z^3}{1.2.3.dz^2}$, $\frac{z^4}{1.2.3.4dz^3}$, $\frac{z^5}{1.2.3.4.5dz^4}$ etc. prior series $\int\overline{n\,dz} = nz - dn\int z + d^2 n\int^2 z - d^3 n\int^3 z$ etc. convertetur in hanc $\int\overline{n\,dz} = nz - dn\,\frac{zz}{1.2dz} + d^2 n\,\frac{z^3}{1.2.3dz^2}$

$-d^3 n \frac{z^4}{1.2.3.4\,dz^3}$ etc. quae omnino eadem est, quam in Actis publicavi, quod valdopere miror; hunc enim eventum, cum haec inciperem scribere, non sperabam, putans longe aliam seriem hac methodo proventuram. Elegans iste consensus mirifice methodorum probitatem, praesertim hujus posterioris, ubi tam mirabiliter et contra omnem consuetudinem cum literis d proceditur, confirmat. Sic etiamnum sum in opinione, infinita alia et inaudita inde erui posse, dummodo aliquis attentiori scrutatione illa prosequi vellet, quod certe a me nunc exigi non potest. Ceterum si ponamus dn constantem, erunt $\int n, \int^2 n, \int^3 n, \int^4 n$ etc. $= \frac{nn}{1.2.dn}, \frac{n^3}{1.2.3.dn^2}, \frac{n^4}{1.2.3.4.dn^3}, \frac{n^5}{1.2.3.4.5.dn^4}$ etc. hocque modo altera series $\int ndz = dz\int n - d^2z\int^2 n + d^3z\int^3 n$ etc. mutabitur in hanc $\int ndz = dz\frac{nn}{1.2.dn} - d^2z\frac{n^3}{1.2.3.dn^2} + d^3z\frac{n^4}{1.2.3.4.dn^3}$ etc. ubi pariter in applicatione dz, d^2z, d^3z etc. destruuntur per dn, dn^2, dn^3 etc. ita ut proveniant quantitates pure algebraicae; quae series itidem per additionem et subtractionem reperitur.

Eodem modo, quo ego, concipis curvam retrogradam (fig. 33) quae punctum habet, in quo infinitae lineae tangunt, et proinde dx ad dy omnes habet possibiles rationes; illud enim punctum nihil est quam evanescentia capituli, quod considerari potest, vel sic (ut in fig. 34) vel sic (ut in fig. 37); id quod manifeste patet in cycloidibus et conchoidibus interioribus; cycloïs enim protensa refert speciem primi, et contracta secundi, coalitus vero protensae et contractae facit curvam retrogradam. Interim difficultas hic se prodit, quam nondum mihi eximere potui. Concipiatur enim (fig. 38.) curva ABC evolvi, et evolutione describi curva AFGH; filum utique evolvens evolutione semper crescit, ita ut curva AFGH sit una continua curva. Intelligatur nunc caput BC evanescere, proindeque BF, CG evadere aequales, quo fit ut portio curvae FG degeneret in semiperipheriam circuli, adeoque continua curva AFGH constet tribus diversis portionibus AF, FG, GH. Ex hac consideratione sequitur (siquidem ab universali ad particulare sit argumentandum) si (fig. 39.) $\alpha\beta\varepsilon$ sint ex. gr. duae semicycloides com-

munes, curvam ex evolutione genitam non esse cycloidem integram $\alpha\varphi\varepsilon$ ut hactenus creditum est, sed esse $\alpha\varphi\gamma\zeta$ compositam ex semicycloide $\alpha\varphi$, ex semicircumferentia $\varphi\gamma$, et ex portione $\gamma\zeta$. Hae cum sint diversae curvae, quomodo unicam et continuam curvam producere censendae sint, non video.

Jam satis ostendi D. Marchioni Hospitalio, ubi erraverit Craigius; verum illud publice faciendum non puto, antequam ipse Craigius ad priores meas objectiones responsionem fecerit. Praeter illas curvas transcendentes, quarum in ultimis meis mentionem feci, nimirum quarum puncta possunt algebraice haberi, video omnes esse in earum censu, quarum natura exprimitur per aequationem ad dimensionem indeterminatam ascendentem, qualis est $x^z = y$, quibus etiam accenseri possunt Quadratrix, Spiralis Archimedea, Loxodromica plana aliaeque. Possunt enim etiam in his curvis puncta quotvis geometrice determinari. Hinc Tibi deliberandum relinquo, annon jure hujusmodi curvas peculiari nomine **Percurrentium** nuncupaverim, ad distinctionem earum quae omnino sunt transcendentales, id est, quarum ne unicum quidem punctum algebraice invenitur; et annon medium tenere censendae sint inter algebraicas et transcendentes: cui et D. Tschirnhaus suffragari videtur, in nova editione Medicinae Mentis et Corporis pag. 109 et seqq. ubi etiam aliquas harum curvarum species profert, quas vero absolute inter Geometricas Cartesianas referri debere contendit.

Libenter concedo in osculo concurrere duos contactus, ea ratione qua Tu intelligis; adeoque certamen Te inter et Fratrem meum est pura puta logomachia, ut jam in praecedentibus meis innui; sed nego eapropter osculum esse concursum quatuor radicum: duo enim isti contactus non sunt unius ejusdemque circuli, sed duorum diversorum qui in unum coalescunt; sic in problemate quodam possent ex. gr. sex circuli curvam quamdam certa ratione tangere, qui tamen in certo casu omnes sex coalescerent; anne ideo contactus iste censendus esset concursus duodecim intersectionum unius circuli, vel cencursus duodecim intersectionum unius circuli, vel concursus duodecim radicum? Absonum utique hoc foret; posset enim circulus hac ratione quamlibet curvam secare in tot punctis quot liberet.

Ego osculum sic concipio: Esto (fig. 40.) curva quaedam **ABCDE**, ex cujus puncto quopiam C indefinita ducta intelligatur

perpendicularis CG; centro alicubi G sumpto, satis a C distante, describatur circulus BCD, qui utique simpliciter tangit curvam in C, et alibi adhuc bis secat curvam in B et D: intelligatur nunc centrum G paulatim moveri versus punctum C mobile, quo fiet, ut etiam duae intersectiones B, D magis accedant ad idem punctum C, donec tandem alterutrum earum B vel D (utrumque enim simul impossibile est, nisi forsan partes curvae CB, CD sint similes, id est si punctum C sit vertex summus) coincidat cum puncto contactus C; hoc casu dico GC esse radium circuli osculatoris BCD. Manifestum autem est, hocce modo osculum esse concursum trium tantum intersectionum, nimirum contactus simplex C, qui aequivalet duabus intersectionibus, coincidit cum tertia intersectione B vel D; et quia hae intersectiones omnes semper in eodem circulo considerantur, ubicunque existat centrum G, erit osculum revera concursus trium et non plurium radicum.

Nisi candorem meum et ingenuitatem, ut ipse fateris, jam satis compertam haberes, subdubitarem sane annon aegre tuleris, quod fecerim quasdam objectiunculas, vel potius difficultates contra Specimen Tuum Dynamicum. Stylus enim, quo uteris, ad sententiam Tuam defendendam solito nervosior videtur. Mihi sane nunquam persuasi Te tam perfunctorie in statuendis hujusmodi versari; sed si non satis meditatus sum quae scripseras, sique judicavi paulo festinantius, condonabis; quae enim dixi, non minus mature mihi perpensa existimaveram. Interim persuasum Te velim, nullam contradicendi libidinem, sed merum veritatis amorem me eo impulisse; et credas ejusmodi pruritum, qui omnibus Philosophastris communis est, quia quod aliud agant non habent, ab indole mea longe esse alienum. Patere ergo ut scrupulum, discendi gratia, proponam, quem in responsione Tua reperio. Dicis duo corpora A et B, quae sint mole ut 1 et 4, celeritate vero ut 2 et 1, aequaliter in medium uniformiter elasticum penetrare, seu vim suam consumere aequali elastrorum numero depresso. Supponamus autem corpora A et B aequalia, sed celeritatibus moveri ut 2 et 1: secundum opinionem Tuam, corpus A quadruplo altius penetrabit in medium quam corpus B; videor autem mihi posse demonstrare profunditates corporum aequalium in medio uniformiter elastico peractas esse in ratione subduplicata, non vero duplicata celeritatum. Sit enim (fig. 41) corpus A, quod penetret in medium AB uniformiter elasticum, id est, cujus quodlibet

punctum C aequali elastro sit praeditum, adeoque ut omnes elasticitates simul sumptae in abscissa AC designentur per applicatam CF trianguli ABG: et sit corporis A celeritas prima AD. Si itaque invenienda sit ejus celeritas CE, quam in puncto C habebit, construenda est curva DEB, cujus differentiales applicatarum CE sint ut applicatae trianguli CF, id est, ut retardationes sint elasticitatibus proportionales: demonstratur autem facile, quod curva DEB sit parabola, cujus vertex D et axis DA. Habeat nunc corpus A celeritatem aliam primam Ad; ad inveniendas celeritates ceteras Ce haud dubie construenda est altera parabola deb, verticem d et axem dA habens, quae sit eadem cum priori DEB, quia utrobique elasticitates sunt eaedem. Est autem, ob identitatem parabolarum, $AB . Ab :: \sqrt{AD} . \sqrt{Ad}$. Ergo numerus elastrorum depressorum celeritate AD, est ad numerum elastrorum depressorum celeritate Ad, in subduplicata ratione celeritatum ipsarum: ideoque juxta hanc demonstrationem corpus A requireret celeritatem quadruplam ad producendum effectum duplum, loco quod secundum Te requiritur celeritas tantum dupla pro effectu quadruplo.

Quae mihi narras de Bernhardo Nieuwentüt, omnino lepida sunt. Ecquis a risu abstinere posset, cum ille tam ridicule de nostro Calculo, velut caecus de coloribus, ratiocinatur? Quid, quaeso, sibi vult mirabilis ista aequatio, quam comminiscitur? Erunt sane irriti conatus, quos intendit contra aliquid cujus nequidem ideam habet; nec felicius ipsi cedet, quam Catelano aliisque, qui deprimere voluerunt Calculum differentialem eam ob causam tantum, quia illum assequi non poterant. Ars enim non habet osorem, nisi sui ignorantem; aggressores autem diversi sunt, alii modesti, alii vehementes, ad quos priores refero Nieuwentüt, eumque laudo, quod ita moderate procedit. Optarim interim ut mihi contingat videre ejus duos Libros.

Forte fortuna in manus meas incidit secunda Editio Medicinae Mentis D. Tschirnhausii; miror et ego, qui fieri potuerit ut insufficientem dederit enumerationem curvarum algebraicarum, siquidem statim ad oculos cuilibet patet, omnes illas omisisse, quarum aequationem ingrediuntur diversae potentiae ipsius y. Caeterum ejus librum obiter quidem perlustravi; modus tamen scribendi non ubique placet, dum suos errores olim commissos palliare, propria

inventa, [1] utut satis communia, exaggerare, aliorum vero imminuere tam scite novit. Non puto ope focorum, ut quidem jactat, omnes curvas et vel solas algebraicas construi posse.

Frater meus profectus est ad acidulas, quarum usu liberari sperat ab affectu hypochondriano, quo frequenter vexatur; vides exinde cujus sit naturae. Non possum non approbare, quae adducis monita pro incremento et promotione solidarum scientiarum. Utinam omnes qui eruditi haberi volunt, eorum meminissent! Non majus puto vitium imo peccatum, quam si quis lumen suum quod ab Altissimo mutuo quasi accepit, abscondere et aliis invidere velit; ac si de eo pro lubitu disponere possit, cum tamen nihil habeat quod proprium et cujus rationem Datori suo non redditurus olim sit. Plerique de his quidem non cogitant, sed illos si non Theologica saltem politica ratio movere deberet, si serio perpenderent, se gloriae suae, cui adeo litant, in tantum detrahere, quantum illam adaugere student; quis enim non odit parcum datorem? Qui mihi aliquid invideat, quod citra damnum suum mecum posset communicare, eum sane amare non possum, multo minus laudare. Praeter haec omnia tota quam hujusmodi docti pro se sibi acquirunt laus est, quod eorum scientia ab omnibus annihilatur, secundum Persii dictum: Scire tuum nihil est, nisi te scire hoc sciat alter. Quod ego e meliore luto ficta habeam praecordia, non levis est causa, quod in tempore cum hominibus vivere didici; id quod quam plurimis deesse video, qui non attendunt attritum illud quod homo sit animal sociabile.

Caeterum optime me mones, ut nonnihil temporis etiam Medicinae meditandae conservem; sed excusabis me, cum noveris meditationibus assiduis a tenera aetate adeo me tradidisse, ut inde mea constitutio corporis delicata admodum facta sit, quae non permittit ut actionibus, quae non quidem mentis, sed corporis applicationem postulant, diu immorer. Hinc (quod doleo) aegre feror ad diuturnam lectionem librorum, ad scribendum, ad calculandum, verbo, ad omnia quae corpus et inprimis oculos fatigant. Ob hanc rationem paucos omnino evolvi authores, imo nequidem Cartesii Geometriam attente me perlegisse asserere possum; praecipua namque quae in Mathesi facio inventa, inter nocturnas horas (quas jam lecto decumbens somno suffurari soleo, quod meditationibus commodissimae videantur) mihi sola attentio suggerit, nullo plerumque arrepto calamo ad faciendum calculum, quem licet prolixissi-

mum, sola mente, longe expeditius instituo, quam si notas in chartam conjicerem.

Cum nuper meditarer super rectificatione Curvarum, inveni modum generalem et promptum, data curva qualibet construendi curvam aliam, quae cum proposita sit aequalis arcui circulari. Unde determinare me posse puto, utrum curva aliqua sit rectificabilis vel saltem cum circulo comparabilis necne. Si mihi tempus suppetierit, aliquid de hoc ad Acta referri curabo. Ex Hollandia intelligo, Nob. Hugenium non quidem mortuum, sed per integrum quadrimestre jam graviter decumbere; ex Gallia vero mihi scribitur, illum in mentis impotentiam incidisse, quod ipsi jam olim etiam solemne fuisse Parisiis audivi. Precor Deum, ut incomparabili Viro et mentis et corporis sanitatem quamprimum restituat. Vale et ama etc.

Basileae d. 17. st. v. Julii 1695.

P. S. Hasce jamjam itineri traditurus, Tuas 5. Julii datas accipio. Gratias debitas refero pro congratulatione, qua vocationem meam comitaris; Tibi vicissim prospera quaeque precor. D. Marchioni Hospitalio dudum promisi, me, si absque uxore proficiscar, iter suscepturum Parisios. Dicas mihi, quaeso, qua ratione nunc fieri possit, ut et Tua praesentia mihi sane super omne gratissima frui detur, ita tamen ut immensas itineris ambages evitem; quae quidem me non impedirent, si modo id commode et sine periculo fieri posset. Caetera quae me jubes omnia fideliter exequar, ut jam supra innui. Optarem ut Fratrem aeque ac me semper paratum invenires, Tuaeque civilitati ille responderet. Nosse cuperem, an ad Te nondum literas dederit.

XV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum Te discessum e patria meditantem oporteat occupatissimum esse rebus necessariis et propriis, intempestivum, imo iniquum foret ingerere Tibi aliena et pertinentia ad internum illud mentis theatrum, quod externa quiete indiget. Itaque pleraque hujus Epistolae differas licet, dum vacabit examinare. Tantum scribo Tuisque heri acceptis statim respondeo, inexpectatae illius difficul-

tatis causa, quam de libris Basileam mittendis objecisti. Unde sequitur nec Bibliopolis vestris liberum fore commercium librorum ex Germania, si non sit integrum ipsis mittere eos deinde quo velint. Verendum etiam est, ne pari cautione opus sit in his, quae Francofurto ad vos deferrentur, neve omissa illa libri sint in periculo simili. Quare rogo ut inquiras tum in hoc, tum et in pretium vecturae Francofurtensis. Et si forte mature Tibi discedendum sit, rogo amicum aliquem mihi nomines, per quem confici talia possint, et qui mecum de his communicare non aspernetur. Sumtus literarum libenter feram, et quia non possunt literae uno impendio ad vos liberae curari, restituam.

De me in itinere adeundo non erit cur sis sollicitus, quoniam ubi Groningae eris, satis ad ea sese per otium occasio dabit, cum non adeo magno hinc intervallo tunc sis abfuturus. Itaque quanquam non facile venire huc possit hospes gratior, ferenda tamen est mora necessaria. Ubi ad Illustrissimum Hospitalium perveneris, cultum a me Tuo, quaeso, testimonio confirma. Mirum est solum ipsum in Gallia in Geometriae profundiora penetrasse, dum tot alii, qui ab his studiis etiam praesidia vitae petunt, inter vulgares notitias torpent. Itaque magna nobis ab ejus ingenio adhuc promitto.

De Medicina optarim ut sis sollicitus, vel Tui ipsius causa, non quasi ego Te velim ad praxim illam fastidiosissimam damnari, sed quod putem meditando a Te magna quaedam erui posse ad interiora naturae cognoscenda, quibus praxis ipsa juvetur. Nam quae hactenus Cartesius vel alii in Physicis dedere, parum admodum ad usum faciunt.

Mathematicis nolim ut nunc mentem occupes; volo tamen paucis tangere loca literarum Tuarum, quae id postulare videntur; de quibus aliquando cogitabis, cum plus otii nactus eris. Ubi comparationem illam inter polynomii potentias et rectanguli differentias porro prosecutus fueris, spero Te nos reperta Tua ignorare non passurum. Ego quoque per otium de re tanti momenti cogitabo. Elegantissima interim methodi hujus nostrae mirabilis confirmatio, novo hoc seriem tuam prodeundi modo, sese prodit. Quod difficultatem attinet lineae unius continuae ex circulari et cycloidali compositae, non puto nos ea re turbari debere, cum revera unius lineae perfecta generalisque notio non detur, quae vetet partem ipsius A uniri cum parte ipsius B, et quae naturae sunt diversissimae, certis describendi modis, saepe unam componant. Ubi suo

tempore Tibi vacaverit, gratum erit nosse paullo distinctius, quae contra Dnum. Craigium ad Dnum. Marchionem Hospitalium scripseris.

Cogitandum puto, annon omnes lineae transcendentes sint simul percurrentes, licet nondum id nobis semper sit exploratum; quemadmodum certe omnium illarum, quae a Circuli et Hyperbolae quadratura pendent, nota nobis est ratio percursus. Artis jam foret, simile quiddam et in aliis invenire. Estque id ipsum ex meis desideratis unum, quae vobis valentioribus perspicacioribusque commendo.

Quod controversiam de radicibus osculi attinet, scito me jam dedisse manus, et ante dies complures iis quae Frater tuus, vir egregius, responderat, olim perfunctorie, sed nunc occasione praecedentis Epistolae Tuae curatius inspectis, omnino deprehendisse verissima ejus monita fuisse: jamque Dno. Menckenio scripsisse, ut retractationem meam inserat Actis, quo Frater tuus candorem meum intelligat. Vereor enim ne sequius de me existimaverit, quem forte credidit palliare errorem voluisse; cum tamen dilatae agnitionis non alia fuerit causa, quam distractio animi, longe diversa studia plerumque volventis. Hoc rogo, ut ei cum salute plurima significes. Nullas equidem hactenus ab eo accepi literas; sed tamen nec velim ei laborem scribendi fortasse ingratum imponi.

Si rationem invenires determinandi, quae curva sit rectificabilis vel per se vel saltem cum circuli arcu, rem maximi momenti in hoc negotio praestares. Itaque hortandus es, ne hujus meditationis obliviscaris.

Aliquid egregium dedisset Dnus. Tschirnhausius, si ostendisset modum, data linea algebraica, inveniendi ejus focos seu modum describendi lineam per fila circa quaedam puncta fixa per convergentes aut divergentes aut vicarias iis parallelas, aut ostendendi impossibilitatem. Equidem potest eo perveniri, si calculo deducamus curvas ex focis, et aequationes ad curvam inventas comparemus datae, sed ego optarem Methodum directiorem et breviorem. Modus, quo ipse percurrentes cum algebraicis comparat, coactus est, et in speciem detortus. Ego majores ex nova Libri ejus Editione progressus expectabam. Praeclara tamen in Physica experimentali observasse puto, quae vellem ut ederet potius quam Geometricis solis immoraretur, in quibus mihi optimas

vias ingredi non videtur, dum commodas meditandi rationes ab aliis monstratas evitare affectat. —

Nunc venio ad controversiam inter nos agitari coeptam de aestimatione potentiae motricis, speroque nos rectissimam viam terminandae ejus ingressos, per penetrationem scilicet in medium Elasticum, aliterve aequaliter ubique resistens. Sed opus est, ut rem ordiar paulo altius. Ajo igitur in universum Artem laestimandi in eo consistere, ut omnia reducamus, quoad licet, ad mensuram quandam congruam, cuius simplici repetitione sit opus, ut in numeris est unitas. Itaque concipiamus jam corpus B in medio liberrimo sine ullo impedimento moveri, certa velocitate, ut a, et successive aliquot globis inter se aequalibus et ejusdem materiae, nempe L, M, N etc. eundem dare gradum velocitatis, ut e, atque hoc effectu eoque solo peracto, conquiescere, omni vi agendi omissa et huc impensa; tunc dico unum ex globis, motum celeritate e, quam accipit, posse haberi pro mensura potentiae; et cum omnium globorum L, M, N, aequalis sit potentia, et aggregatum potentiae omnium, id est, totus effectus causae toti seu potentiae corporis B, in hunc quippe effectum impensae, aequetur (quod unum suppono, sine quo nulla erit possibilis virium aestimatio) sequitur potentiam corporis B, velocitate a praediti, exprimi per potentiam globi L, moti velocitate e, numero globorum multiplicatam, seu potentiam corporis B esse ad potentiam globi L, ut numerus globorum est ad unitatem. Hinc porro, si aliud sumatur corpus C, motum celeritate h, quod itidem vim suam exacte consumat in globorum dictorum numerum certum, dando cuivis velocitatem e, tunc dicam ego potentias corporum C et B ita esse inter se, ut sunt numeri globorum aequalium in velocitatem e concitatorum. Sed jam pro globis aequalibus, certa velocitate praeditis, assumamus alios effectus aequales repetitos, ex. gr. certa pondera ad certam altitudinem elevanda, dico nos eam proportionem potentiae, quam per viam praecedentem globorum, pure mechanicam, nihilque physicum involventem consecuti sumus, etiam consecuturos, si jam gravitatem adhibeamus. Nempe finge (fig. 42.) λPL normam seu angulum rectum, ita ut pertica λP sit verticalis et PL horizontalis, sustinens grave L, idemque esse in normis μQM, νRN etc. sustinentibus gravia M et N; quae gravia sint aequalia et per omnia similia inter se, ceu globi, qui ante; et normae sint etiam per omnia sese eodem modo habentes, ita ut

λ, μ, ν sint in eadem recta horizonti parallela, et L, M, N itidem in eadem; patet corpus B incurrens successive in perticas λP, μQ, νR, quas fingimus esse lineas rigidas, ponderis et resistentiae expertes, elevare hos globos graves L, M, N ad eandem altitudinem, veluti L ad altitudinem (L) unde globus L elevatus ad (L), et delabens per arcum (L) S deveniet in horizontem T S vel LQM; ibique procurret ea velocitate, quam postulat descensus altitudo, et quam adeo dedit ipsi corpus B elevando; idemque erit in caeteris M, N, adeoque perinde est, ac si aestimemus numerum gravium aequalium ad eandem altitudinem elevatorum, an vero corporum aequalium numerum eandem velocitatem nactorum, si scilicet tantus sit ascensus, ut praecise illam velocitatem producere possit. Unde intelligitur posse nos tuto adhibere gravium aestimationem ad aestimandam potentiam. Est autem gravitatis consideratio pulchre apta ad hanc aestimationem, quia in homogeneas partes commodissime dividi potest. Finge scilicet B consumere potentiam suam incurrendo in duas perticas λ et μ, sed C incurrendo tantum in unam λ, utique dupla erit potentia ipsius B, at potentia ipsius C erit tantum simpla. Hinc patet potentiam ipsius B, quae elevat duas libras L et M, ad altitudinem unius pedis (si (L) vel (M) ponamus pedali altitudine esse super horizontem L M), esse duplam potentiae ipsius C, quae elevat solum unam libram L ad altitudinem unius pedis. Similiter etiam hinc sequitur, potentiam, quae elevat libram ad duos pedes, esse duplam potentiae quae elevat libram ad unum pedem. Nam finge grave L elevatum incursu ipsius B in normam λ, tradi in (L) ipsi normae μ, facili quadam connexione seu machinatione, ut ejus ope rursus tantundem elevetur, ubi B in μ incurrit, patet B non minus integram suam vim consumere hoc modo quam ante; nihil enim refert, sive (L), sive M, ad pedem secundo incursu elevet, cum a normae ipsius, machinationisve resistentia animus abstrahatur. Itaque potentia ipsius B consumitur in elevationem ipsius librae ad pedes duos; unde sequitur porro etiam ejusdem potentiae esse elevare libram ad duos pedes, cujus est elevare duas libras ad pedem unum.

Jam veniamus ad elastra, seu ad medium elasticum; vides facile quo tendam; nempe finge (fig. 43.) L λ, M μ, N ν esse elastra aequalia et similia, eodem modo tendenda procursu mobilis B: utique (ex principio aestimandi nostro) potentiam ipsius B aestima-

bimus numero talium elastrorum aequaliter tendendorum, totam ejus potentiam in hoc unum consumentium. Pono autem ejusdem potentiae esse elastrum aliquod tendere, et grave quoddam attollere ad altitudinem, ex qua cadens id ipsum elastrum sic tendere possit; sive ejusdem esse potentiae Elastrum aliquod mediate vel immediate ad determinatum tensionis gradum producere: ex principio scilicet nostro, quod effectus integer suae causae aequipolleat, seu quod aequipollentia sint, quae idem possunt. Hinc necesse est, ut pro elastris substitui possint pondera, aut vice versa.

Itaque ut nunc ad id veniamus, de quo proxime inter nos agebatur, necesse est corpus B, habens celeritatem ut 2, quadruplo altius penetrare posse in medium, talibus elastris aequabiliter disseminatis instructum, quam corpus aequale D, habens celeritatem ut 1. Nam si corpus D potest attollere unam libram ad altitudinem pedis, potentiam scilicet suam consumendo, poterit corpus B duplae celeritatis attollere unam libram ad quatuor pedes, vel quatuor libras ad unum pedem, vel ut utrumque una locutione complectar, poterit quater attollere unam libram ad unum pedem, antequam vim suam consumat; vel quod idem est, si unum elastrum possit intendi lapsu librae ex pede, consequens est B celeritate dupla posse quatuor elastra intendere; si D aequale, celeritate simpla, tantummodo intendat unum.

Hae ratiocinationes semper sibi respondent et satisfaciunt. Si vero non procederent, et alia proportio virium inter duo corpora datae celeritatis oriretur, consumendo ipsa in Elastris intendendis, quam prodiret in ponderibus attollendis, aut in motibus imprimendis, caderet tota Scientia Dynamica, seu impossibile esset vires aestimare: imo potentia non esset quantitas certa, sed quiddam vagum et absonum. Sed haec fusius explicui, ut aliquando per otium examinares. Res enim magni momenti est.

Caeterum, si ad Tua priora nuper respondere visus sum solita excitatius, hoc studio augendi utriusque nostrum attentionem factum, Tibi facile spero, re considerata, persuadebis. Ego facillime objectiones fero; a Te vero adeo non refugio, ut potius expetam, quod sciam mihi fructuosas esse solere, praesertim ubi animum intenderis. Et quanquam in re, diu a me considerata, aliquid praestitisse sperem, facile tamen agnosco, eo Te ingenio esse, ut diuturnos labores nostros brevi non aequare, sed et vin-

cere possis. Puto autem Dynamices negotium a Te festinatius tractatum fuisse, quod omnia tam pulchre determinata haberi posse, quam mihi deprehendere visus sum, non suspicabaris. Quod superest, vale, et ubicunque sis, me ama, et felicibus utere fatis.

Dabam Hanoverae 29. Jul. 1695.

P. S. Incomparabilem Hugenium obiisse haud dubie intellexisti. Quanta haec sit jactura, dici satis non potest, ob summum viri judicium, cum maxima profundissimaque rerum notitia conjunctum. Utinam, quemadmodum spero, reperiantur in ejus schedis, ex quibus pars eorum, quae meditatus est, erui et publico commodo produci in lucem possit. Dolendum est quod vis morbi, quae mentem obfuscaverat, non permisit ut ipse, quod optimum visum fuisset, ea de re non statuerit atque ordinarit. Nisi forte (ut fieri solet) paulo ante mortem ad se rediit ultimamque voluntatem suam aperuit, quod si factum est, non diu latebit.

XVI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum forte Berolinum nuntiassem Te a Groningensibus vocatum esse, jussu Illustrissimi Danckelmanni mihi commissum est, ut inquiram, annon commode effici possit, ut Halam Saxonum potius accedas. Itaque volui hoc Tibi significare, ut mihi, si videbitur, mentem Tuam amica fiducia aperias, statumque Professionis Groninganae atque emolumenta indices; ita enim fortasse in Te exorando elaborare majore cum fructu possem. De caetero, me ad praecedentes meas refero, incertus an hae Te Basileae sint inventurae. Vale.

Dabam Hanoverae $\frac{5}{15}$ Septembr. 1695.

P. S. Ubi mea de penetratione in medium elasticum responsa expendere vacaverit, sententiam nosse velim.

Nolim, ut mea de quibus ad Te in prioribus scripseram, vel minimum officiant tempori Tuo, cujus nunc potissimum habenda ratio est, dum iter magnum paras. Itaque si (quod ex silentio

suspicor) Tibi nunc ad hoc animum adhibere non licuit, scito ea me aequitate esse, ut nolim commoda mea cum aliorum incommodo conjungi. Fortasse aliquid ex Te didicero, cum tempus et locus scribere patientur.

XVII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Publicas Vocationis literas, quod bono sit omini, accepi ipso meo natali die, vigesimum nonum aggrediens annum. In eo sum, ut nunc quovis die relicturus sim patriam, quod sane intra octiduum fiet: tandem uxorem induxi, ut se mihi praebeat comitem in itinere, una cum puerulo nostro et famula. Hanc ob causam iter non suscipiemus per Galliam, sed recta Francofurtum petemus. Cum advenero Groningam, de adventu meo Te quantocyus certiorem reddam, ideoque responsionem Tuam eousque differas. Vitodurani Chronicon nec apud Einsidelenses reperire est, ut ex Bibliothecarii, cui ipsemet ego scripsi, responsione quam Tibi mitto videre poteris. Jam tertia vice Vesontionem scribi curavi, sed nihil adhuc responsi venit. Caetera quae me jussisti, diligenter curavi; iterum apud diversos mercatores inquisivi, quid faciendum sit, ut merces tuto ad nos perveniant ex Germania, sed omnes unanimiter confirmant, attestatoriis illis omnino opus esse, nisi velint periculum publicationis incurrere; quae Francofurto ad nos deferuntur, pari quidem cautione opus habent, sed ut plurimum transeunt sine attestatoriis, non quod iis non indigeant, sed quod telonarii non ita diligenter inquirant. Poteris itaque exiguo cum periculo hac via transitum tentare neglectis attestatoriis. Vectura centenarii Lipsia Francofurtum mittendi constat 8 fl. et Francofurto Basileam 6 fl. Si vero omni periculo vacare velis, iter per Italiam suaderem; sunt enim ex nostratibus, qui eadem via utuntur, si quid ex Germania in Galliam curari volunt. Substitui amicum qui me absente omnia, quae desiderabis, exacte conficiet; est ille Dn. Battier Med. Doctor, vir honestus et officiosus, multa eruditione pollens praesertim in philologicis et linguis, nec mediocrem etiam notitiam habet in mathematicis; calculum differentialem ex nostra manuductione jam mul-

tum sibi familiarem sibi reddidit. Non dubito si alicubi locorum se occasio praeberet talentum suum collocandi, quin eam acciperet. Velim Te inter et illum commercium literarum iniri, habebis eum ad omnia officia paratissimum.

Ubi Groningae fuero, omnia tentabo ut mihi aliquando Te videndi copia detur; hoc enim unicum est, quod ardenter desiderem. Si solus profectus fuissem, multos Patronos, quos in itinere adiissem, mihi proposueram. Sic spe excidi perveniendi ad Dnum. Hospitalium, quem etiam propediem rus abiturum intelligo. Mirum non est illum solum in Gallia in Geometriae profundiora penetrasse; ideo enim tot alii, qui his studiis incumbunt, inter vulgares notitias torpent, quod nostra non putent esse de pane lucrando. Quis unquam sordidi lucri causa literis se accingens aliquid egregii praestitit? Praeter hoc optime nosti, Gallorum indolem esse, omnia quae ab Exteris proveniunt inventa aspernari. Bono oportet sint signo nati Dni. Hospitalius, Varignonius et pauci alii, quod aequius sint animati; plurimos enim alios novi, inter quos etiam Dn. de la Hire, qui aegre et indigne sane ferebant, cum de nostris loqueremur, ut torvus eorum vultus satis indicabat: nescio annon me juvenem, cum hominibus gravibus ita loquentem, audire dedignati fuerint, ita ut inventa Tua forte ab illis benignius recepta fuissent, si praeconem habuissent graviorem.

Vix puto omnes lineas transcendentes esse simul percurrentes; omnes enim percurrentes, ope Logarithmicae, construere possum; et hoc modo quadraturae circuli et hyperbolae, imo omnium spatiorum ab invicem dependerent, quod egregium inventum esset.

Gaudeo Te nunc nobiscum in eadem esse opinione circa numerum radicum osculi: certe credideram aliud quid subesse, quod ita firmiter contrariae sententiae inhaeseras; saepe enim contingit, ut rem diversimode considerantes, etiam eam diverso modo concipiamus, licet in puncto quaestionis conveniamus. Hujusmodi controversia agitata fuit inter Clavium et Peletarium, de angulo contactus, quamvis, quod verius videtur, neutrum ejus naturam bene percepisse crediderim. Dnus. Hospitalius etiam in nostram opinionem transiit, et miratus est Te in re tam clara a nobis discrepare. Fratri reduci ex acidulis retractationem hanc, cum salute a Te significavi; se proxime Tibi scripturum dicit. Ex quo reversus me ex patria abiturum audiit, paulo humaniorem se gerit erga me, unde colligo quod quem odit praesentem, absentem me forte sit amaturus. Tantum

abest ut ipsi ideo male cupiam, ut potius omnia luber obliviscor. In hunc finem nolui ipsum latere, quae hactenus inter nos agitata fuere, quorum novitate non parum illum commotum sensi; praesertim eorum quae de polynomii potentiis et rectanguli differentiis comparandis invenimus: his enim plane nihil simile quid antea inaudierat.

De ratione comparandi curvas cum arcubus circularibus aliquid ad Acta*) misi; sed speculationem illam de comparandis polynomii potentiis cum rectanguli differentiis nunc prosequi plane non licet, ob plurima alia negotia quibus distringor.

Nescio cuinam causae tribuam, an stupiditati ingenii mei, an vero distractionibus animi, quod modum Tuum aestimandi potentias motrices nondum capiam; tertium enim Te hallucinari, absit ut dicam. Verissima mihi videntur principia Tua, nempe effectum integrum suae causae aequipollere; item corporis B, cujus velocitas est a, potentiam mensurari debere per numerum globorum L, M, N etc. quibus eodem velocitatis gradu e impresso, illud quiescit. Hinc potentiam corporis B, velocitate a moti, esse ad potentiam corporis C, velocitate h moti, ut numerus globorum ab illo, ad numerum globorum ab hoc, in velocitatem e concitatorum. Haec, inquam, omnia concedo; imo et hoc, quod pro globis aequalibus certa velocitate praeditis, assumi possint alii effectus aequales repetiti, nempe certa pondera ad certam altitudinem elevanda; et proinde duplam potentiam elevare duplo plura pondera aequalia ad eandem, puta, altitudinem; triplam, triplo plura; quadruplam, quadruplo plura, etc. Vel quod eodem redit, si loco ponderum aequalium, quae successive elevanda sunt, sumamus idem pondus, sed quod toties elevandum sit, quot fuerunt pondera, habebimus utique eundem effectum et proinde aequalem potentiam: nihil enim refert, sive semper idem pondus successive novum ictum recipiat, sive aliud aequale substituatur. Sic facile concedo potentiam ex. gr. quadruplam elevare unum pondus, quater ad eandem vel aequalem altitudinem, id est, pondus illud ascendet per vices ad altitudinem quadruplam; sed (in quo controversiae cardo versari videtur) nego, illud pondus, si potentiam motricem, quam per vices exhauriebat, uno ictu absumat, ad altitudinem tantum quadruplam uno saltu

*) Meditatio de Dimensione linearum curvarum per circulares. Act. Erudit. 1695 p. 374.

ascendere. Differentiam omnino faciendam puto inter elevare pondus aliquoties ad altitudinem, et inter elevare idem pondus ad eandem altitudinem toties sumptam; non enim eadem potentia utrobique requiritur; contra quam Tu statuere videris, quando dicis: *Unde sequitur ejusdem potentiae esse elevare libram ad duos pedes* (ego addo duabus vicibus) *cujus est elevare duas libras ad pedem unum.* Aliter se habet in medio aequaliter elastico; cum enim in eo elastra aequalia et similia aequalibus intervallulis sint disseminata; haud dubie, dupla potentia duplo plura elastra deprimentur, et proinde spatia percussa erunt in ratione potentiarum. In hoc itaque convenimus; sed et hoc ipsum arguit, elevationes ponderum aequalium uno saltu factas non esse horum ponderum potentiis proportionales. Nam si gravitatis causam elastrorum resistentiis comparemus, videbimus elastra ista, id est, sollicitationes ad gravitatem, non fieri spatiolorum percursorum, sed tempusculorum intervallulis aequalibus; ita enim gravitas explicatur: ceu notum est Galilaeum accelerationes gravium descendentium deduxisse ab impulsionibus materiae ambientis, singulis momentis aequalibus grave stimulantis. Hoc posito, evidentissimum est, pondus ascendendo ad quadruplam altitudinem, non nisi duplo plures impulsiones superare; siquidem etiam nonnisi duplum tempus requiratur, et tempora sint ut numerus impulsionum. Ergo, si superatio unius impulsionis sumatur pro communi mensura potentiarum, juxta Tuum ipsum principium, sequitur ad elevandum pondus uno jactu ad altitudinem quadruplam, duplam dumtaxat requiri potentiam; adeoque elevationes esse in ratione duplicata potentiarum: et cum elevationes etiam sint in duplicata celeritatum, potentias esse ut ipsas celeritates, et non ut quadrata harum. Sed diutius his immorari non possum, quia aliae cogitationes me ab his abducunt; quamquam plurima adhuc alia habeam, quae mihi in Tuas partes transire non permittunt. Optarim ut scrupulum hunc meum diluas et ingenue dicas, in quo me errasse putes; a Te enim doceri mihi semper summa voluptas fuit. Interim quae a me Tibi objectiones fiunt, non objiciendi, sed discendi gratia, factas puta: non dubito, quin et Tibi interdum utiles esse possint.

Tristissimum nuncium de obitu Incomparabilis Hugenii jam ex Belgio acceperam. Ego, ut puto, prae aliis summam feci jacturam, si vel solam eum videndi spem amissam considerem. Dnus. Hospitalius mihi scribit habuisse illum 66 annos, et Fratri suo ex-

heredato substituisse heredes nepotes suos. Solatium nobis est, quod ante mortem de Manuscriptis suis optime disposuerit: nominavit enim, ut audio, duos Mathematicos Batavos, quibus schedas suas committi jussit, ut praestantiora typis mandentur. Quantum damnum, si ea intercidissent!

Vale et fave etc.

Basil. d. $\frac{24 \text{ Aug.}}{3 \text{ Septembr.}}$ 1695.

XVIII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Haud mirabere silentium meum, ubi ex hisce intellexeris me jam prope sex septimanas esse in itinere, quod ob tenellum nostrum infantem satis lente procedit. Interim ego miror, quod ultimas meas quas octiduo ante discessum Tibi scripseram, nondum acceperis, prout ex honoratissimis Tuis $\frac{5}{15}$ Septembr. datis mihique huc transmissis colligo. Spero eas nunc ad Te recte pervenisse, ex iisque vidisse novas meas difficultates quas in responsis Tuis de penetratione in Elasticum medium repereram, rogo eas aequi bonique feras. Miseram etiam literas Bibliothecarii Einsidelensis, quae Vitoduranum nec apud Einsidelenses haberi ferebant. Sub abitum Bibliopola Basiliensis mihi monstrabat literas Vesontione, ubi monumenta historica a Boisotio Tibi promissa Abbati Nicaise tradita dicuntur, ut eorum Te compotem reddat. De caetero Tibi commendavi Dn. Samuelem Battier Med. D. qui Tua me absente optime curabit. Velim ipsum quae facta voles libere jubeas.

Quae mihi narras de Professione Halensi, multum placent, sed doleo quod res non amplius sit in integro; essem enim Tibi propinquior, si ibi starem. Promisi Groningensibus et nescio quo pacto absque violatione honestatis ab iis liberari possem, nisi forsan postquam aliquot annos illis inserviero. Stipendium annum est quingentorum thalerorum solidorum seu argenti unciarum, praeter emolumenta academica et institutiones privatas, quae eandem fere summam conficiunt. Heri fui Hagae Comitum, ubi Illust. Danckelmannum ipse alloquutus fuissem, si a Te habuissem literas

commenditias. 24to hujus vendentur ibi auctione publica Nob. Hugenii libri omnes. Lugduno Bat. transii, ubi Volderum Mat. P. adii, quem breve post colloquium reliqui, praesertim ubi illum non ita bene de nostra methodo sentire audirem, quam totam ex Slusiana deductam dicebat. Dn. Nieuwentiit etiam libenter viderem, sed extra urbem nescio ubi degit. Vale etc.

Dabam Amstelodami $\frac{8}{18}$ Octobr. 1695.

P. S. Responsionem Tuam si qua me dignaberis Groningae expectaturus sum; dirigere eam poteris ad Dn. Braunium Doct. et Prof. P. S. T.

XIX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Quod vigesimum nonum aetatis annum ingredienti Tibi, ipso natali die, vocatorias Groninganorum literas redditas scribis, facit ut Tibi gratuler de tempore hactenus tam bene collocato. Itaque optima quaeque porro non possum non ominari ac vovere. Gratias ago, quod Vesontionem pariter et ad Einsidelenses scripsisti aut scribi curasti. Abbas Nicasius, Divionensis Canonicus, Vir doctus et clarus, mihi Praesidis Boisotii literas ad se pollicitatorias nuper misit. Nec dubito quin sit promissis staturus. Si Basileam destinet, quae exspectare me jussit, utar beneficio Tuo, et D. Doctoris Battierii, experientissimi viri, procurata mihi a Te benevolentia, quem a me ut officiose salutes rogo.

Nondum pro certo possum affirmare, omnes transcendentes simul esse percurrentes, ut appellas, id est, per puncta secundum Geometriam ordinariam designata descriptibiles; est tamen cur de plurimis suspicer ita esse, nec dum video quid de reliquis prohibeat. Id fateor, fastigium foret Geometriae transcendentis, si huc res actu ipso deducta haberetur, ut alias dicere memini. Nondum tamen ostensum est, necesae esse ut omnes percurrentes ad quadraturam Circuli et Hyperbolae reducantur, cum sint resolutiones algebraicae, quae nec per anguli nec per rationis sectionem

construi possunt; quibus duabus Circuli et Hyperbolae quadratrices, per puncta describuntur, et caeteras tamen itidem ad curvarum per puncta inventionem adhiberi, transeundo de gradu in gradum, non video quid prohibeat.

Quod ad aestimationem potentiae attinet, videris mihi tam prope nunc accessisse ad mentem meam, ut tenue illud velum intergerinum, quod nos separat, facile tolli posse videatur. Hoc unum Te moratur, quod aliam potentiam requiri putas pro elevando pondere (fig. 44) L ad altitudinem PQ quater repetitam, seu ad altitudinem PT quadruplam ipsius PQ, percursam quatuor vicibus, quam quae requiritur ad idem pondus A elevandum ad altitudinem PT (vel ei aequalem) percursam una vice. Sed ubi aliquando de his meditari attentius vacaverit, ipse credo miraberis hic Te discrimen suspicari potuisse. Ita enim comparata est natura, ut sive per vices, sive uno tractu agere aliquid coneris, nunquam majus eadem vi efficias; alioqui nihil foret facilius motu perpetuo mechanico. Nec plus interest, quam inter pecuniam minutatim per obolos, sed saepe repetitos expensam, et eandem magnis summis ac per talenta effusam. Ipse etiam vides pondus L ad altitudinem PT uno tractu ascendens, revera non simul, sed per gradus PQ, QR, RS, ST eo devenire; nec aliud esse discrimen, quam quod nullum ita est intervallum inter vices. Possum autem intervalla inter ascensiones interponere, ut tamen fateri oporteat nullum nasci discrimen; veluti si idem grave L primum horizontaliter currat per 1, 2; inde inclinate assurgat per 2, 3, cujus altitudo perpendicularis aequet PQ; deinde rursus horizontaliter eat per 3, 4, et inclinate assurgat per 4, 5, cujus altitudo perpendicularis aequet QR; et ita porro per 5, 6; 6, 7; 7, 8; 8, 9. Sed novam distinctionem, opinar, afferes dicesque, hoc Te concedere, si primo impetu concepto pondus L rem peragat; secus vero, si denuo sit nova impressione excitandum. Equidem ratio aliqua distinctionis hujusmodi expeti possit, quam ego nullam video, nisi quod permissum est respondenti rigore summo argenti τὴν θέσιν διαφυλάττειν, quamdiu etiam citra verisimilitudinem potest. Unde vel ideo quod alias admittenda mea conclusio foret, distinctionem Tibi adhibere licere putabis, donec a me locum eam non habere ostendatur. Volo tamen hac quoque in re agere liberaliter, ut demonstratio tanto sit certior, nec tantum probabilibus argumentis nitamur.

Equidem cum concesseris globum majorem aequipollere globis minoribus simul sumtis, quibus in motum concitatis quiescit, posses agnoscere nihil interesse ad potentiam, conjuncta sint quae producuntur, an disgregata. Sed placet tamen id de quo inter nos agitur, ita per se demonstrare. Ajo igitur, ejusdem potentiae esse, efficere ut pondus L (fig. 45) continuo tractu ascendat ad altitudinem PT, et efficere ut ad eam ascendat quatuor vicibus repetitis PQ, QR, RS, ST, nova semper excitatione. Ponamus pondus L tantam celeritatem habuisse, dum in horizonte movebatur, ut impetu inde concepto assurrexerit continuo tractu ad altitudinem PT, jamque inde rursus descendere, et filum secum trahere, incidens per trochleolas x et y, et postremo volutum circa trochleam z; quo attracto, simul trahatur stylus F depressurus elateria G, H, I, K. Ponamus autem pondus L cadens ex altitudine TS praecise tantum acquirere impetus, quantum opus est, ut stylus F superans elaterium G perveniat ex $_1F$ in $_2F$; similiter Elateria H, I, K superari transitu styli $_2F$ $_3F$, $_3F$ $_4F$, $_4F$ $_5F$, orto ex descensibus SR, RQ, QP; ita ut praecise, ubi pondus pervenit in T, impetu ejus per descensum concepto, rursusque per tensionem elastrorum exhausto stylus pervenerit in $_5F$. His positis, patet mox, unoquoque Elastro successive liberato, posse per vices globum L rursus ad altitudinem PT restitui, cum unumquodque ad quartam altitudinis partem attollendi grave vim habeat, ex qua scilicet, ipso labente, fuit tensum; idque ope hujus ipsius fili et trochlearum praestari, si elastrum K, liberatum rursus ac sese erigens, reducat stylum a $_5F$ ad $_4F$, elastrum I a $_4F$ ad $_3F$ etc. Cum igitur potentia globi gravis L, in horizonte procurrentis, ante omnem ascensum tanta sit (ex hypothesi) ut possit elevare pondus L ad altitudinem PT, eademque tanta sit, ut possit praecise tendere quatuor elastra G, H, I, K; erit ipsius L potentia ante ascensum potentiae tensionis quatuor elastrorum aequalis; sed haec potest praecise, per vices, elevare pondus L ad eandem altitudinem PT. Ergo potentiae pondus L elevandi ad altitudinem PT uno tractu aut per vices, sunt aequales. Et generaliter hanc aequalitatem tam certam arbitror, ut judicem alioqui, quemadmodum jam innui, nihil facilius fore, quam motum perpetuum mechanicum obtinere, si alterutrum altero praevalere dicas, ut Tibimet consideranti manifestum fore arbitror, cum alterum alteri, nullo negotio, substitui possit. Quod si haec nondum persuadent, opus erit ut

aliquando paulo distinctius explices mentem Tuam, et certo casu ac schediasmate declares. Fateor enim me in dictis ne minimam quidem dubitandi rationem videre. Prosunt tamen, quae opponis, vel ideo, quod ita melius video, quibus praejudiciis inprimis sit occurrendum. Nam quae Tibi negotium facessere possunt, multo magis aliis poterunt. Caeterum ipse rei summam tot modis examinatam habeo, et tam diversis rationibus atque applicationibus ad consensum perveni, ut hic paralogismum amplius metuere non possim. Non eo minus tamen libenter monita, a Te inprimis, audio.

Objectionem sumis a gravitatis causis, sed eae, ut saepe monui, nil obstant. Verissimum quidem est, quolibet temporis momento aequalem fieri impulsionem, sed sciendum est eam non producere aequalem vim in impulso (quippe aliter atque aliter disposito, prout plus minusque virium jam habet) etsi aequalem producat gradum celeritatis, quia haec duo non coincidunt. Itaque haec objectio principium petit. Nam, ut jam publice monui, corpus bis A motum celeritate e, duplum est re et potentia corporis A praediti celeritate e, quia bis in eo occurrit Ae, seu adest Ae + Ae. Sed corpus A motum celeritate bis e (seu A bis e) non est duplum ipsius Ae, quia, etsi duplicata sit celeritas, non tamen simul duplicatum est corpus: potentiam autem tum demum multiplicatam judico, cum aliquid reale, potentiam habens, exacte repetitur, vel multiplicatur: veluti cum (sive interrupte sive continue) datum pondus ad multiplicatam altitudinem, vel multiplicatum pondus ad datam altitudinem elevare licet; unaquaeque enim repetitio, pro separato effectu, exacte congruo, haberi potest. Itaque quod, secundum meum principium, superationem alicujus impulsionis pro mensura sumi putas, non concedo, nec concedere debeo, ut, eo attentius considerato, ipse animadvertes, nisi scilicet omnia sint in impellente et impulso sint eodem modo se habentia. Opus est pro mensura repeti realem alicujus potentiae productionem vel destructionem. Intelligo autem potentiam suum subjectum includentem seu realem repeti, velut pondus elevatum esse, elastrum tensum, grave in motu positum, ut repetitio sit omnimoda. Non vero sufficit aliquid modale repeti, verb. gr. gradum velocitatis repetitum, corpore non repetito, seu plures gradus velocitatis poni in eodem corpore simul existentes. Et senties experiundo si utaris repetitione reali, omnia consentire etiam secundum diversas assumptiones; si modali, non item: quoniam in mo-

dali repetitione non omnia paria seu exacte repetita reperiuntur. Et suspicor caetera omnia, quae Tibi adhuc scrupulum movent, ex hoc uno non observato profluere, quod apud me veluti primum est principium Artis aestimatoriae in universum, seu scientiae de quantitate in genere. Certe hactenus in hac materia vix quicquam mihi fuit objectum, quod non jam tum praevenissem, aut quod per se non dispareat, meditationem prosequendo.

Reapse etiam comperi, in solvendis problematibus intactis, nonnisi secundum principia mea exitum dari. Non tantum enim nascuntur inde mihi, quae alii experimentis didicere, aut ex principiis aliis magis limitatis deduxere, sed et ultra pergere possum ad ea, in quibus ipsorum principia desinunt. Veluti si (fig. 46.) globus A simul incurrat in duos globos B et C, possum demonstrare quid sit futurum, idque (quod mireris) ex hoc solo principio, quod alioqui causa et effectus non futuri sint aequipollentes, seu quod tunc, certis hypothesibus factis, non possit post concursum tantumdem ponderis elevari ad datam altitudinem, quantum ante concursum, vel contra.

Solatio aliqua certe nobis esse debet, quod scribis Hugenium ante obitum de Manuscriptis suis edendis constituisse; gratum erit aliquando intelligere, quosnam constituerit ejus trei Curatores. Unum ex iis Volderum esse credo, non mediocris doctrinae Virum, idque literis ex Batavis acceptis mihi confirmatur.

Rectissime factum, quod Fratri Tuo, ingeniosissimo Viro; nostri commercii copiam fecisti. Ita enim communi ope melius proficiemus.

Quoniam, ut scis, potentiis analogae sunt differentiae, hinc ex serie pro potentiis duxi seriem pro differentiis, hoc modo: $\boxed{m}\overline{x+y} = x^m y^0 + \frac{m}{1} x^{m-1} y^1 + \frac{m.\overline{m-1}}{1.2} x^{m-2} y^2$ etc. Ergo fit $d^m\overline{xy} = d^m x\, d^0 y + \frac{m}{1} d^{m-1} x\, d^1 y + \frac{m.\overline{m-1}}{1.2} d^{m-2} x\, d^2 y$ etc. Ubi vertendo d in $\int$, ut sit $d^m = \int^n$, posito $n = -m$, fiet $\int^n \overline{dzy}$ $= \int^{n-1} z d^0 y - \frac{n}{1} \int^{\overline{n-}} z d^1 y + \frac{n.\overline{n+1}}{1.2} \int^{\overline{n+1}} z d^2 y - \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3} \int^{\overline{n+1}} z d^3 y$ etc. ubi, posito dz constante, summae singulatim iniri possunt,

et quidem finite, si n integer. Similia pro trinomio vel aliis polynomiis fabricare licet, aliasque omnigenas analogias comminisci.

Has jam scriptas dimittere distuleram, donec discerem ubi ageres. Nunc cum ex Tuis Amstelodamo datis libens intellexerim, Te in Batavis recte feliciterque appulisse, eas ut jussisti, Groningam mitto.

Boisotiana quaedam ab Abbate Nicasio accepi.

Facile judicare poteram, quid de Halensi negotio dicturus esses, jamque in eam fere sententiam Berolinensibus responderam de meo.

Volderi, Viri licet egregie docti, judicium de nostris Methodis non est quod nos magnopere moveat. Videtur enim in hanc Analyseos partem minus inspexisse. At Hugenius ipse, quo nemo melius ista dijudicare poterat, et cui Slusiana et multo ampliora erant perspectissima, de praestantia nostrae methodi magnifice sentiebat; idque testatus est, non tantum literis ad me privatim datis, sed et publice in Lipsiensium Actis. Hujus sententiam Volderianae opponi suffecerit. Si excerpta desideras ex literis Hugenii, mittam.

Quod Nieuwentiitium in transitu non vidisti, non magna, opinor, jactura erit, neque enim Tibi prodesse colloquium poterat, sed illi tantum ad conversionem. Quod superet, gaudeo Te nobis propiorem, ut crebrius Tuis fruar, quibus auxilium spero in multis, quae adhuc diversi generis molior incremento harum literarum.

Dabam Hanoverae $\frac{20}{30}$ Octobr. 1695.

P. S. Tuam nunc apud Foederatos Belgas habitationem magni usus fore arbitror ad Methodi nostrae propagationem. Cum enim plurimi in Batavis Algebram colant, multa utilia dabunt, ubi huc animos converterint. Interim de mea Infiniti scientia delineanda cogitabo.

XX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ecce me tandem aliquantulum liberum a multitudine negotiorum tam domesticorum quam publicorum, quibus hucusque adeo

obrutus fui, ut postremarum Tuarum, quas sub adventum meum quam rectissime accepi, pene oblitus fuissem. Nondum tamen ea tranquillitate fruor, quam optarem, ad Studiis Mathematicis incumbendum, tanta cum libertate, qua olim Basileae feceram: nec enim meus amplius sum, sed si Mathesis hic maxime mihi exercenda sit, erit id dumtaxat studiosorum in gratiam, quibus, ut jam provideo, Elementa inculcando maximam temporis partem teram, adeo ut, quo plures forsan studiosi, ego eo pauciores facturus sim progressus. Quos putas in Batavis Algebram colentes, hic sane non reperiuntur; imo ne unicum quidem videre adhuc mihi contigit, qui vel mediocris Mathematici nomen mereatur. Ultimus Matheseos Professor Borgerius jam ante 28 annos, nimirum eodem, ni fallor, anno quo hanc ego ingressus vitam terrenam, ille egressus est; post cujus obitum Sedes Mathematica in nostra Academia in hunc usque diem vacavit; hinc judica, quantum haec studia florere potuerint. Si vel unicam haberem causam, cur Hallensem, quam obtulisti, vocationem huic anteponerem, esset profecto liberior et commodior Tecum conversandi copia. Ex quo patriam deserui, nihil plane Actorum vidi; scire cuperem an quid novi in istis prodierit, quod nostra concernit; et num, inter alia etiam, Marchionis Hospitalii G e n e r a l i s q u a d r a t u r a C y c l o i d u m, cui ego subjunxeram quaedam de reducendis curvis ad arcus circulares.

Procul dubio fastigium Geometriae foret, si transcendentes curvae ad percurrentes reduci possent, id est, ad tales curvas, quarum aequationes constant terminis ad dimensiones indeterminatas ascendentibus. Sic etiamnum sum in opinione omnes percurrentes construi posse, ope quadraturae Hyperbolae: verum Tu illas latiori sensu sumis. Quadratrix enim Circuli mihi non est percurrens, quoniam ejus natura per talem aequationem exprimi non potest.

Quae de aestimatione potentiae adducis, multum mihi placent, meque proin in Tuam tandem trahunt sententiam. Aliqui adhuc mihi haerent scrupuli, quos adimi mihi vellem. Dicis impulsiones materiae gravitatem causantis, utut aequales et aequalem celeritatem in pondere producentes, non tamen producere vim aequalem; interim, si consideretur materia subtilis, quae gravitatis causa est, moveri celeritate adeo magna, ut pro infinita haberi possit (revera talis supponi debet, alias enim accelerationes gravium cadentium

non in infinitum augerentur) respectu illius quam pondus ascendens vel descendens habet; considerandum erit pondus tanquam in quiete, quemcunque habeat celeritatis gradum, ita ut hac ratione impulsiones etiam semper aequalem vim in pondere producere censendae sint; eodem plane modo, quo concipio globum sclopeto explosum testudinem aliquam aeque fortiter ferire, sive quiescat omnino sive prorepat, nunc celerius, nunc lentius; omnis enim testudinis celeritas nihil est, respectu celeritatis globi.

Secundo concedo pondus L (fig. 44.) ascendens uno impetu per 2, 3; 4, 5; 6, 7; 8, 9 et dein iterum descendens, posse tot elastra G, H, I, K, deprimere, quot sufficiunt ad idem pondus ad eandem altitudinem per intervalla attollendum, quia quodlibet elastrum depressum, sese restituendo, eam tribuit ponderi vim, quam ab illo accepit, et sic gradatim assurget per altitudines PQ, QR, RS, ST, per quas prius descendit. Sed hoc demonstratum mihi cuperem, quod grave L eodem impetu, quo ascendit per altitudinem 2, 3; 4, 5; 6, 7; 8, 9 etiam possit deprimere totidem elastra, quot nempe descendendo depressit: hoc si demonstraveris, omnino in Tuas transibo partes. Possibilitas motus perpetui mechanici, quam ex negatione hujus deducis, nihil facit ad rem: rigorosus enim adversarius illam possibilitatem statuere posset.

Tertio omnes regulae communicationis motus, a Cartesio aliisque exhibitae et hucusque receptae, a Tua hypothesi subvertuntur. Ex. gr. si globus incurrat in alium aequalem et quiescentem, celeritate ut 1; post ictum ambo juncti pergerent moveri celeritate non ut $\frac{1}{2}$, ceu hactenus creditum est, sed ut $\sqrt{\frac{1}{2}}$; hac enim celeritate uterque ad dimidiam ascenderet altitudinem, ad quam totam prior globus, integra sua celeritate, ascendisset: sic pro omnibus aliis novae regulae communicationis motus fabricari deberent, servando Tuum principium, vires esse in ratione composita ponderum et altitudinum, ad quas celeritatibus suis ascendere possent. Sic facile divinare potero, quid sit futurum si globus A simul incurrat in duos globos quiescentes B et C; si enim celeritas globi A sit ut 1, erit celeritas postfutura cujusque globi ut $\sqrt{\frac{A}{A+B+C}}$ supposito globos nullam habere elasticitatem, et omnes tres esse in recta linea. Illos autem in schemate Tuo non ponis in recta linea, et sic problema mihi non videtur determina-

tum, si globus impingens oblique incurrat in reliquos duos; aut saltem mentem Tuam non satis assequor.

Quarto distinctio Tua inter potentiae productionem realem et modalem valde placet, ingeniose namque ostendis, quod pro mensura potentiae repetitio illius, non autem hujus, sumenda sit. Interim non video, quid impediat, quominus penetrationes globi in medium non elasticum, sed tantum frictione resistens, sumi possint pro mensura potentiae; nihil enim refert, sive potentia absorbeatur, sive restituatur; saltem potentia est causa penetrationis; et proinde penetratio illius effectus, sicque repetito effectu, repetitur etiam causa. Ex quo sequitur, globum aliquem, celeritate dupla, quadruplo altius penetraturum esse in medium aliquod molle, veluti in lutum, quam alius globus aequalis celeritate simplici; id quod adhuc ostendendum est: credo enim penetrationes fore ut celeritates.

Quos Hugenius constituerit Curatores pro edendis suis Manuscriptis, hactenus ignoro. Excerpta, quae mihi offers, ex literis ejus ad Te datis, in quibus methodi nostrae praestantiam agnoscit, lubenti et grato animo accipiam, ut si aliquando occasio dabitur, ea Voldero, minus aeque de nostris sentienti, aliisque objiciam.

Ex analogia potentiarum et differentiarum facile deducitur series pro $d^m\overline{xy}$ quam adducis. Interim si m sit numerus fractus vel irrationalis, dicas mihi quaeso quid sit $d^m\overline{xy}$, an quantitas, an quid aliud? De his diu est, quod non cogitaverim, quoniam nondum ad me redii. Et difficulter a me impetrabo, ut hisce quae jam fere mihi exciderunt, de novo animum advertam. Accepi heri literas a Dno. Marchione Hospitalio, in quibus sibi eandem hanc seriem Te communicasse dicit, et simul mea, quae super hac materia me detexisse, a Te intellexerit, petit.

Frater meus junior ex Suecia nuper veniens me accessit, qui in Pharmacopoeis Regiis Stockholmiae et Hafniae per triennium ministravit, et antea diu in aliis Germaniae locis; nunc ut Patriae propinquior sit, iterum in Germania conditionem ad futurum Pascha se accepturum dicit. Ego ipsi consului, ut Hanoveram adiret, ubi in Te haberet Patronum, et noster quasi internuntius esset, quod lubens iniit mihique duos quos novit Pharmacopoeos nominavit, Dn. Placotomum et Jaegerum, apud quorum alterutrum ministrum agere volupe sibi esset. Poteris haud gravatim inqui-

rere, num ad dictum tempus alterutrius officinam ingredi possit, et ipsum et me non mediocriter obstringes, mihi praesertim facies rem gratissimam. Possum de illius diligentia et peritia praeprimis in Chymicis spondere, ut honorifica testimonia quae a suis quibusvis Patronis habet, satis ostendunt.

Nostine certum quendam Germanum, qui se nominat Johann August Haberstroh, a quo etiam heri literas accepi Lugduno Bat. datas, ubi juvenis alicujus nobilis D. Tschirnhausi cognati se Ephorum agere et non ita pridem Te in aedibus Tuis allocutum fuisse scribit, me rogans ut cum ab ipso Dn. Tschirnhausio Geometriam Cartesii jam edoctus fuerit, sibi futura aestate, quo tempore huc venturus esset, Matheseos secretiora, praesertim vero Calculum differentialem explicem. Interim ex me quaerit, quod ridiculum mihi videtur, quanto tempore se profectum mathematicum evasurum ego putem; num id fieri possit brevi, quia a juvene suo non diu possit abesse. Sed vereor ut ipsi satisfacere possim; deest enim mihi infundibulum Norimbergense.

Literas Tuas imposterum ad me mittendas immediate mihi inscribas; jam enim satis in urbe notus sum.

Vale et ama etc.

Groningae $\frac{17}{27}$ Decembr. 1695.

XXI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gaudeo Te salvum Groningam appulisse, et rite auspiciis publici muneris perfunctum fuisse. Omnia tempus faciliora reddet, et quod studiosis docendis Tibi peribit, poterit vicissim accrescere, si quos invenias aut facias, qui Te juvare possint. Nullam esse regionem credidi hactenus, in qua magis floreat Algebra, etiam inter plebejos homines, quam in Batavis. Certe vix alibi plures libri tales vernacula lingua scripti extant.

Dn. Haberstroh apud me fuit; petiit nuper per literas Tibi commendari, quod nunc facio, sed monebo ubi iterum ad me scripserit, ut cogitet rebus egregiis non perfunctoriam operam

dandam, nec quicquam magni praestiturum, qui talia in transitu libare velit, ut canis aquam Nili.

Scrupulos, qui Tibi supersunt circa Dynamicen meam, puto adimi posse. **Prima objectio** omnium quae in hoc negotio fieri possunt, est speciosissima: Celeritatem materiae gravificae esse incomparabiliter majorem, quam corporis gravis, ita ut grave, ejus comparatione, semper quiescere videatur, uti testudo respectu ictus sclopeti. Respondeo verissimum hoc esse, et effectum qui producitur in mobili tardo, talem esse, si comparetur motui illi velocissimo, ut sive tardum quiescat plane, sive jam sit in motu, discrimen non fiat notabile. Si scilicet oculus positus sit sive in globo sclopeti, sive in testudine, et ex uno horum respiciat alterum, non notabit in resultante discrimen inter casum quietis et motus tardi. Sed si effectus novus, qui per ictum producitur in ipso corpore tardo, comparetur cum priore motu vel effectu, qui in ipso jam est, omnino ille respectu hujus notabilis est, adeoque hac ratione multum interest inter id quod idem ictus, licet celerrimus, producit in corpore quiescente, et quod producit in corpore tardo; nec possumus asserere recipiens semper se eodem modo habere ad ictus. Et tametsi eundem semper imprimat vel adimat velocitatis gradum, non tamen semper dat vel adimit eumdem gradum virtutis; sed majorem dat obsequenti seu in easdem partes tendenti, adimit resistenti seu in contrarium nitenti.

Secundo loco non bene intelligo quid Tibi adhuc velis demonstrari, cum ostendi postulas, **quod grave L eodem impetu quo ascendit per altitudinem 2, 3; 4, 5; 6, 7; 8, 9, etiam possit deprimere totidem elastra, quot nempe descendendo depressit.** Nam, quantum judico, semper facile ostenditur, grave idem posse efficere ascendendo vel descendendo, quanquam nec satis videam cur hoc petas. Ab eadem causa se totam consumente vel impendente aequalis semper producetur effectus, quomodocunque ad sese consumendum causa applicetur, ascendendo vel descendendo.

Quod vero **tertio**, modum deducendi ad motum perpetuum, tanquam ad absurdum, quo subinde utor, a rigido adversario rejici posse putas, id ego nimii in hac scientia rigoris fore arbitror, et tuto assumi hypothesin hanc, quippe et rationi consentaneam, et infinitis experimentis comprobatam. Qui motum perpetuum me-

chanicum possibilem defendit, etiam fieri posse putabit, ut aqua sponte ascendat in montem.

Quarto quod communicationis motuum regulas attinet, concedo, si corpus A celeritate ut 1, incurrat in aequale B quiescens, et ambo post concursum simul ferantur, nec pars potentiae absorbeatur, aggregatum latum iri celeritate ut $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Sed sciendum est hunc casum non occurrere. Nam si corpora sint elastica, non ibunt simul post ictum; sin sint mollia, ut argilla, magna pars virium in ipso ictu absorbebitur et transferetur in partes insensibiles materiae mollis, nec restituetur corporibus integris, ut fit in casu elasticitatis.

Quinto recte judicas, ex meis principiis sequi corpus duplo celerius quadruplo amplius penetraturum in materiam mollem, modo scilicet seponatur condensatio, quae contingit in molli, ut scilicet initio cedat facilius, postea difficilius, ob partes posteriores ipso priorum impactu redditas magis compactas; et modo consideretur sola difficultas, quae est in separatione partium tenacium, excluso motu partium in molli, qualis est in aqua, seu excluso eo, quod in schediasmate De resistentia medii vocavi resistentiam respectivam, retenta sola absoluta. Haec enim, quae exclusi, efficere possunt et debent, ut regula illa non exacte observetur; puto tamen nihilominus, adhibitis cautelis debitis, ab experientia ei fautum iri.

Quod quaeris de differentia, cujus exponens est fractus vel irrationalis, etiam notavi in literis ad Dnum. Marchionem Hospitalium, simulque addidi modum, per quem talis differentia potest alteri ordinariae comparari. Ex. gr. $d^{1:2}x$ sit differentia proposita. Sint x progressionis geometricae; assumpta differentiali constante dh, ut fiat $xdh : a = dx$, erit $d^2x = dxdh : a = xdhdh : aa$, et similiter $d^3x = xdh^3 : a^3$, et generaliter $d^e x = xdh^e : a^e$, adeoque $d^{1:2}x = xdh^{1:2} : a^{1:2}$ seu $d^{1:2}x = x\sqrt{dh : a}$ (1:2 mihi est idem quod $\frac{1}{2}$; et $dh : a$ idem quod $\frac{dh}{a}$). Unde vides talium differentiarum valores hoc modo haberi posse per radicem vel potentiam ordinariae differentiae. Quod cum memorabile sit, Tibi non ingratum fore puto. Easdem extraordinarias differentias per seriem infinitam ex ordinariis conflatam exprimi posse, me non monente, vides, adeoque suo modo reales esse, etiam hinc patet.

Vale, feliciaque festa age, et cum anno novo novum rerum prosperarum cursum ingredere.

Dabam Hanoverae 28. Decembr. 1695.

XXII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Nuperas gratissimas ignota manu scriptas rectissime accepi, quas quod nomine Tuo subscripto carebant pro Tuis non agnovissem, nisi paucae quas propria manu adjunxeras lineae errorem praecavissent.

Nescio annon crebrae meae objectiones contra Dynamicen Tuam tandem Tibi molestiam creaverint, quod fere conjicio ex eo, quod more Tuo solito, non ad omnia, quae Te in prioribus meis rogabam, ita exacte respondisti: sed novi Tuam aequitatem et animi candorem; si quid, hac in parte, a me commissum fuerit, quod minus arrideat, mihi condonabis. Nihil sane a natura mea alienius est, quam pravus iste contradicendi pruritus, et nihil eidem convenientius quam veritatis amor, quam usque adeo depereo, ut acquiescere minime possim in re aliqua, nisi omnis obscuritatis nebula mihi sit discussa. Est haec praecipua causa, cur in rebus dubiis ad Te recurram, tanquam ad naturae oraculum, cui in abstrusissimis nunquam lumen deest, cum aliis quoque communicandum, quod jam abunde compertum habeo. Vides itaque, quo incitamento difficultates Tibi subinde proponam; adeo tamen iniquus non sum, ut promptam nimis responsionem ad eas exigam; sufficiet si summa Tua commoditate id fiat.

Paucis abhinc diebus noster Academiae Rector mihi suggessit libellum a Dionysio Papino, proxime elapso anno editum, cui titulus, Fasciculus dissertationum de novis quibusdam machinis etc. ubi inter alia exhibet synopsin controversiae inter vos agitatae circa rationem aestimandi vires motrices, in cujus fine dicit, quod Te rogaverit, ut etiam tale extractum scriberes, quo possint Lectores omnia pro et contra certius perspicere. Miror quod me nunquam oblegaveris ad Acta Eruditorum; video enim ex hac synopsi, quod praecipuae meae objectiones jam in Actis a Dno. Papino prodierint, ut et Tuae responsiones ad illas, de qui-

bus certe nihil mihi constabat; alias labori inutili eas de novo repetendi, qui hucusque calamos nostros exercuit, pepercissem. Eo enim tempore, quo haec inter vos ventilabantur, in Galliis versabar, ubi nihil quicquam Actorum ad me perveniebat. Nunc Acta, in quibus haec extant, a quodam Collegarum meorum mihi comparavi, ubi summo cum fructu rationes utriusque perlustravi, quibus, ut et meis, quas super hac re inveni, diligenter expensis, Tuam nunc opinionem, in quam jam ab aliquo tempore inclinavi, sed, ob leves, qui mihi supererant, scrupulos, judicium tantisper suspendens, omnino pro vera agnosco, quae me proin in posterum non solum non adversarium, sed sui defensorem quavis occasione habebit.

Doleo vices Dni. Papini, qui in falsa sua opinione persistit; videtur ille mihi aut rem non satis examinasse, aut sibi non gloriosum ducere, revocare errorem popularem quem in Cartesianorum gratiam sibi defendendum suscepit. Quod enim dicit, potentiam corporis majoris non posse totam transferri in minus quiescens, et deinde aliquam partem potentiae non quidem perire (quod ex Cartesianorum mente necessario sequi aptissime ostendisti) sed impendi et communicari materiae ambienti in ipso ictu; item nulla dari corpora perfecte rigida, mihi videntur mera effugia quibus suae opinioni, jamjam labenti, asylum struere conatur. Quis enim non videt, translationem istam potentiae totius ex corpore majori in minus non supponi tanquam actu possibilem, sed quatenus, sine ulla simplicita contradictione, mente substitui potest potentia minoris corporis in locum aequalis potentiae corporis majoris; sufficit namque hoc, ut si absurdum aliquid, mediante ista suppositione, ex aliqua sententia sequatur, etiam ipsam sententiam absurdam esse dicamus. Et apposite notasti, quod si adversarius hoc neget, perinde sit, ac si quis Archimedi postulanti negasset aliquam rectam alicui curvae aequalem esse, quia nullam poterat geometrice exhibere. Atque, quod plus est, si quis mihi ad oculum ostenderet se reperisse motum perpetuum, si modo haberet metallum aliquod gravius auro, dicerem, sane summo jure, eum hominem revera invenisse motum perpetuum, licet metallum gravius auro non inveniatur et vix inventum iri sperandum sit; ostendisset enim mihi possibilitatem motus perpetui, si non practicam, saltem theoreticam.

Optime dicis objectionem a celerrimo motu materiae gravificae,

ut vocas, petitam, esse speciosissimam, quam etiam maximopere urget Dnus. Papinus; nec Tua responsio mihi omnino satisfacit; videtur enim quod non solum velocitates singulis momentis corpori impressae, sed etiam ipsi effectus, quos impulsiones materiae gravificae in corpore producunt, debeant esse aequales, sive dein comparentur motui materiae velocissimo, sive comparentur motui priori, qui in corpore jam est: comparatio ista hic non habet locum; effectus enim considerantur absolute, idque solummodo quaeritur, annon inter se comparati omnes sint aequales? Facile enim demonstrari potest, quod globus A incurrens celeritate infinita in globum B, huic semper aequalem vim imprimat, sive sit in motu sive in quiete, ita ut adversarius constanter perseverare possit in eo, quod potentia corporis ascendentis non per ascensus, sed per temporis spatium mensurari debeat; ex quo dein sequitur corpus ascendens ex. gr. ad altitudinem quadruplam, non nisi duplo plures ictus aequales recipere, quam aliud aequale corpus ascendens ad altitudinem simplam, ideoque potentias illorum corporum esse ut 2 ad 1, non autem ut 4 ad 1. Difficultas haec, fateor, me diu multumque vexavit (videbam enim hic non esse petitionem principii, uti dicebas, sed praecipuam argumenti Tui vim directe impugnari) donec tandem exinde ita me extricare putaverim, dicendo: Verum quidem esse, quod effectus in corpore ab impulsionibus materiae gravificae producti, initio cujusvis momenti, sint semper aequales, sive corpus quiescat sive moveatur; sed et hoc verum est, quod corpus descendens vel ascendens occurrat uno momento certo numero particularum perpendiculariter dispositarum, qui numerus erit in ratione celeritatum corporis moti; singulae autem hae particulae suum peculiarem faciunt ictum aequalem in corpus ascendens vel descendens. Et hac ratione effectus materiae gravificae non initio tantum momenti, sed per totum momentum productus, computandus esset per quantitatem spatii uno momento percussi: hinc augmentum momentaneum potentiae corporis ascendentis vel descendentis semper variatur pro ratione celeritatum, et erit infinities majus, quam vis impulsionis quam recipit quiescens a materia gravifica.

Mentem meam melius schemate aperiam: Repraesentet (fig. 47) AB lineam descensuum in qua 01, 02, 03, 04, 05 etc. percurrantur momentis aequalibus 1, 2, 3, 4, 5 etc. applicentur ad 0, 1, 2, 3, 4, 5 etc. aequales 0a, 1b, 2c, 3d, 4e, 5f etc. quae

denotent vires impulsionum materiae gravificae, initio cujusvis momenti corpori impressas. Nunc, per naturam gravium cadentium, altitudo A 8 est quadrupla ipsius A 4, quamvis nonnisi duplo plures impressiones aequales 0 a, 1 b, 2 c, 3 d, 4 e, 5 f, 6 g, 7 h, 8 i in illa contineantur quam in hac 0 a, 1 b, 2 c, 3 d, 4 e, hinc cum Dno. Papino credideram, sufficere ut grave ascendat per altitudinem 4 A subquadruplam ipsius 8 A, ad superandam dimidiam partem resistentiae, quam superaret ascendenda per 8 A, non animadvertens errorem, qui in eo consistit, quod sumseram impressiones momentorum initiales 0 a, 1 b, 2 c, 3 d, 4 e etc. loco impressionum continuarum 0 b, 1 c, 2 d, 3 e, 4 f etc. quae utique non amplius sunt aequales. Oppido inde liquet veritas asserti Tui, quod nempe potentiae corporum aequalium sint in ratione altitudinum percussarum: est enim summa omnium impressionum 0 b + 1 c + 2 d + 3 e + 4 f + 5 g + 6 h + 7 i id est, rectangulum A i, ad summam omnium impressionum 0 b + 1 c + 2 d + 3 e, id est, ad rectangulum A e, ut altitudo A 8 ad altitudinem A 4. Rogo mihi sincere dicas, annon rem acu tetigerim. Hoc argumento, arbitror, Dnus. Papinus optime convinci posset, quamvis alias in eodem libello contra Guilelminum disputans, de fluentium aquarum mensura, proprium gladium suppedidet quo jugulari potest. Ex iis enim quae pag. 77. legitime contra adversarium suum infert, apertissime sequitur vires motrices vel potentias ponderum aequalium esse in ratione ascensuum, id est, in quadrata celeritatum. Tibi haud dubie non ingratum erit, si quae ad rem faciunt, hic excerpam, cum forsan hunc libellum Tibi nondum videre contigerit. „Constat quod gravia, si motu a gravitate accepto sursum versus reflectantur, ascendendo motum amittunt: finito autem ascensu ipsorum centrum gravitatis non potest reperiri altius quam antequam coepissent moveri: alioquin daretur motus perpetuus mechanicus. Sit ex. gr. (fig. 48) funis A B D supra trochleam B C transiens, cujus alteri extremo A una libra, alteri vero extremo D duae librae appendantur, sitque A E dupla ipsius E D: centrum gravitatis erit in E. Supponamus jam pondus D descendere in d, debebit pondus A tantundem ascendere, nempe ad a, et tunc centrum gravitatis reperietur in e. Facile est autem demonstrare, quod descensus E e est tantum $\frac{1}{3}$ descensus D d. Ergo corpus illuc delatum, si sursum versus reflecteretur, non ascenderet nisi ad $\frac{1}{3}$ altitudinis d D ut in f, et corpus A continuando suum motum sursum versus,

tantundem spatii percurreret usque ad G; tunc enim centrum gravitatis in eadem qua prius altitudine, nempe in E reperiretur etc." Quid haec ad confirmationem Tuae sententiae contribuant, facile perspicies. Libra enim una, descendens ex altitudine D d, efficere potest ut tres librae ascendant ad $\frac{1}{3}$ ejusdem altitudinis. Ergo quaelibet trium librarum ascendentium habebit $\frac{1}{9}$ potentiae librae descendentis (siquidem effectus sit aequalis causae) unde constat propositum, nempe potentias ponderum aequalium esse in ratione ascensuum vel descensuum, id est, in quadrata celeritatum. Sed regeret forsan Dnus. Papinus, unam illam libram, quod cum reliquis duabus conjuncta sit, non efficere eandem vim, ac si in aëre libero per eandem altitudinem sola descenderet, praesertim cum in illo casu plus temporis et proinde plures impulsiones materiae gravificae durante descensu recipiat quam in hoc. Verum hoc objiciens pariter ad motum perpetuum mechanicum deduceretur, ubi non opus haberemus supponere translationem totius potentiae corporis majoris in minus, adeoque Dnus. Papinus solitis suis effugiis, nimirum negatione illius translationis et perfectae rigiditatis, amplius evadere non posset.

Haec omnia cum perpendissem et vidissem tam luculenter confirmare novam Tuam vires motrices aestimandi rationem et destruere vulgarem illam Cartesianorum opinionem, quae eousque in Philosophorum Scholis invaluit et radices egit, ut quamplurimi caeco ductu malint credere rem, in omnium quotquot sunt Philosophorum modernorum ore versantem, quam eam paulo attentius et penitius examinare; Ego, inquam, postquam haec probe perpendissem, tandem errorem vulgarem omnino deserui, mihique ipsimet iratus fui, quod illum apud me tamdiu foverim. Interim mentem meam subiit, annon nova haec ratio potentias aestimandi, demonstrari posset directe et ἀποδεικτικῶς ex ipsa nempe motus natura et lege, supponendo corpora moveri in vacuo, in quo in alia vires suas exerant. Demonstratio enim per deductionem ad motum perpetuum, tanquam ab absurdum quid, pertinacem Cartesianum novis potius involvit scrupulis, quam ab erronea opinione deflectit.

Post levem meditationem vidi id directe posse probari per principium aliquod, quod ipse Cartesius admisit, nempe per compositionem motus, et quidem sic: Moveatur (fig. 49) globus A celeritate et directione A B, et impingat oblique in alium globum aequalem B quiescentem, ita ut angulus incursionis ÂBD sit semirectus;

nunc quaeritur, quid post ictum sit futurum, supposito totam potentiam corporis alicujus directe incurrentis posse transferri in aliud corpus aequale quiescens? Considero motum AB tanquam compositum ex duobus aliis aequalibus AC, BC, quorum directiones angulum faciant rectum ACB: nunc statim patet, quoniam AC est parallela ipsi BD, et BC ad eandem perpendicularis, quod globus A secundum directionem AC nihil globo B communicet, sed quod tota vis secundum BC transferatur in globum B (si modo globi perfecte aut saltem admodum elastici supponantur, ut globi in ludo tudiculario) ita ut post ictum globus B moveatur in directione BE, velocitate BC, et globus A in directione BF velocitate AC. Quoniam autem tam globi, quam velocitates sint aequales, erunt eorum potentiae aequales, et ambae simul sumtae, tanquam effectus aequales causae, id est, toti potentiae quam habebat globus A ante ictum. Ergo potentia globi A ante ictum est ad potentiam globi B post ictum ut 2 ad 1, ut $(AB)^2$ ad $(BC)^2$, ut quadratum velocitatis A ad quadratum velocitatis B. Q. e. d.

Idem generaliter potest demonstrari, si globus A alia quavis obliquitate intelligatur incurrere in globum B; tunc enim semper globus B recipiet velocitatem BC, et globus A perget moveri velocitate AC; et hoc modo, quia potentiae duae partiales, simul sumtae, constituunt totam, erit potentia globi A post ictum ad potentiam globi B, ut $(AC)^2$ ad $(BC)^2$, id est ut quadrata globorum celeritatum.

Nescio quid huic demonstrationi objici possit, nisi fortasse quod nulli globi tam perfecte elastici reperiantur, qui omnem suam potentiam in alios aequales directe impingentes transfundere possint. Hoc profecto demonstrationem nostram minime labefactat: etiamsi enim concedamus illam perfectam elasticitatem non dari, scimus tamen per experientiam dari corpora ita prompte se restituentia, ut nullum sensibile discrimen intersit inter velocitatem globi incurrentis ante ictum et inter velocitatem globi aequalis percussi post ictum, adeoque et hoc contra demonstrationem nostram nihil valet. Supponamus tamen in favorem adversarii tantummodo partem celeritatis BC (fig. 50) communicari globo B, nihilominus ex Cartesii opinione sequetur aliquid absurdi. Esto enim, et acquirat globus B ex percussione globi A partem celeritatis BC, puta BG; ergo, secundum Cartesium, remanebit globo A in directione CB residua celeritas CG (supponuntur enim globi aequales). Quo-

niam autem juxta directionem AC, integram velocitatem AC servat, habebit globus A post ictum, ex compositione motus AC et CG, velocitatem AG. Ergo, si quantitas motus ante et post ictum esset aequalis, foret $A \times AB = A \times AG + B \times BG$, et quia $A = B$, foret $AB = AG + BG$. Q. e. a.

Quid ad haec reponi possit ab acerrimo quoque Cartesiano, non video; compositionem enim motus non negabit, nisi simul coryphaei sui explicationem reflexionis et refractionis radiorum destruere velit, aliaque, in quibus compositio haec admodum solemnis ipsi fuit: dicet forsan, post ictum directionem mutari; hinc globos A et B celerius moveri, quam si ille in hunc directe impingeret, ut nempe quantum a prima directione deflectuntur, compensetur per augmentum celeritatis. Sed quid, quaeso, directio ad quantitatem motus vel ad quantitatem virium? sive corpus aliquod huc, sive illuc feratur, retinebit, credo, semper eandem vim, si modo celeritas eadem maneat. Numquid ridiculum esset dicere singula, quae in toto Universo moventur, semper eandem directionem servare; secus juxta mentem adversarii quantitas motus variaret.

Aliud adhuc superest argumentum non contemnendum, quo probatur vires corporum aequalium esse in ratione quadrata velocitatum. Constat quod vires centrifugae corporum in gyrum motorum sint in ratione composita ex quadrata celeritatum et reciproca longitudine radiorum (facile hoc demonstrari potest) ergo, existentibus radiis aequalibus, erunt vires centrifugae, vel vires fila, quibus corpora detinentur, tendentes in ratione quadrata celeritatum. Sic quia vires istae tendentes sunt inadaequate quidem effectus corporum motorum, satis probatur propositum.

Jam nimium fere huic materiae immoror; patere tamen, ut quae ex nova Tua sententia nunc satis stabilita legitime fluere videntur, paucis proponam, super quae mentem Tuam desiderarem. Videtur centrum percussionis corporum aliter nunc se habere, quam hactenus creditum est, siquidem vires percutientes elementorum corporis aestimatae sunt a mole elementorum et a velocitate eorundem, loco quod quadrata velocitatum, juxta novam hypothesin, sumenda essent. Hoc modo centrum percussionis lineae rectae rigidae, circa alterutram extremitatem motae, non esset ibi, ubi est centrum gravitatis in triangulo, nempe $\frac{2}{3}$ longitudinis lineae distans ab extremitate quiescente; sed esset, ubi est centrum gravitatis

in pyramide, nempe ¾ axis distans a centro rotationis; et sic in aliis. Praetereà videntur resistentiae medii, quas vocas respectivas, sepositis absolutis, non esse in duplicata ratione velocitatum, sed in triplicata. Corpus ex. gr. aliquid motum, in liquido tenacitate notabili carente, duobus velocitatis gradibus, certo tempore duplo majorem quantitatem liquidi penetrat, et duplo celerius quam aliud corpus aequale, motum uno velocitatis gradu; quoniam vero quantitatum aequalium vires sunt, ex nova hypothesi, in duplicata ratione velocitatum, erit resistentia corporis illius octupla resistentiae hujus: contra quod Tu statuere videris in Actis ann. 1691 pag. 177. Dices forsitan, differentiam esse, quando corpus cum omnibus suis partibus, simul et uno instanti, in alterum corpus, ut globus in globum, impingit, et quando per partes et successive appellitur, ut fluidum contra obicem; sed si ita distinguis, optarim ut explicares rationem distinctionis. Desiderarem etiam rationem exactam, cur nova Tua hypothesis tantum locum habeat in velocitatibus actualibus, non autem in conatibus, siquidem conatus nihil aliud est quam motus infinite parvus. Cur ex. gr. ad aequilibrandas quatuor libras in una distantia ab hypomochlio vectis appensas, non etiam requiratur ab altera parte vectis tantum una libra in duabus distantiis appendenda, sed duae librae. Et deinde concesso, hujus posse rationem reddi, videtur quod si duabus istis libris, quae cum quatuor libris oppositis aequilibrium faciunt, vel minima velocitas actualis imprimatur deorsum versus, illico praeponderare deberent et magno impetu descendere: duae enim istae librae, habentes duos gradus velocitatis, haberent duplomajorem vim, quam quatuor librae cum uno gradu velocitatis. Hoc tamen est contra experientiam, nam lente admodum nec eousque quo possent, descendunt. Explicationem etiam sciscitor experimenti illius quod, recensente in Epistolis Cartesio (ut Dnus. Varignonius in Actis Erudit. an. 1691 pag. 300 memorat) Pater Mersennus cum Dno. Petito saepius iterata vice instituerat circa majus tormentum bellicum, quo perpendiculariter erecto et disploso, globum ejusve vestigia frustra in terra quaesivere: argumento eum non recidisse, sed etiamnum in aere haerere suspensum. Hoc, si non sit figmentum, multum etiam Tuae demonstrationi, quam ab impossibilitate perpetui motus petis, derogaret.

Quando dicis, quod qui motum perpetuum mechanicum possibilem defendit, etiam fieri posse putabit, ut aqua sponte ascendat

in montem, facile judico quorsum digitum intendas: nimirum ad meam, olim in Actis insertam, inventionem perpetui mobilis, filtri ope comparandi, per quam perennem aquarum per poros terrae, instar filtri, ascensum, et sub forma fluviorum et fontium descensum explicabam. Certe hujusmodi perpetuum mobile non tam absonum esse et contra naturae leges cuivis, vel leviter ad pressiones fluidorum attendenti, patebit: numquid enim, si possemus efficere, ut centrum gravitatis alicujus corporis sponte vel ob motum quemdam particularum intestinum ascenderet, haberemus motum perpetuum mechanicum? Ast, si super liquorem graviorem in vasculo quodam contentum, superinfunditur alius levior cum priori perfecte miscibilis, commune duorum liquorum centrum gravitatis infimum locum non occupabit, sed necessario ascendet: alias liquores non miscerentur. Quod si ais hanc permixtionem non duraturam, sed tractu temporis particulas liquoris gravioris iterum ad fundum subsidere, rogabo Te, ut consideres quam minutim dissolvatur mercurius a liquore quodam corrosivo, velut spiritu nitri, et ita intime cum illo misceatur, ut, nisi affundatur sal quoddam, permixtio illa in perpetuum duratura sit, manente interim liquore adeo limpido et fluido, ut si ex gravitate id non conjiceretur, nihilo impraegnatum illum esse diceres. Quid igitur impedit, quominus ope filtri, quod separaret istas duas substantias, leviorem a graviori, haberi possit motus perpetuus; filtratione enim ista commune centrum gravitatis, quod non est in sua sede naturali, descendere conatur, quia tamen descendere non potest ob delabentem ex tubo materiam secretam, quae, ut suppono, iterum sese perfecte miscet cum substrato liquore, conatus iste et proinde filtratio continuo perseverabit: unde objectio ista, quod gravioris liquoris actio per filtrum intercipiatur, ita ut solus levior in eum, qui in tubo jam est, gravitet, nihil valet: ipse enim levior, qui extra tubum est, etiam a graviori premitur, et ita junctis viribus eum qui in tubo est premunt. Non itaque mirum, multo minus absurdum esse debet, si tali modo, ubi natura motus (motus nempe intestinus) juvat, motum perpetuum obtineri posse dicam. Non enim minor absurditas esset dicere centrum gravitatis posse ascendere, quod tamen hic contingere videmus. Interim Tecum sentio, impossibile esse motum perpetuum per machinam quamdam corporum solidorum procurandum, quae solo artificio et industria humana operatur. Sed quia literae jam praeter spem Tibi forsan ad nauseam excre-

verunt, hic abrumpo, et differentialium materiam in proximam scribendi occasionem differo.

Vale, et votum pro voto habe. Perage laetus et inconcussa sanitate novum hunc annum et quam plurimos subsequentes, ut ego cum toto Orbe mathematico ingenii Tui fructibus, ut hactenus, ita proporro quamdiutissime frui possim. Iterum vale et ama, qui se sincero corde dicit etc.

Groningae $\frac{18}{28}$ Jan. 1696.

XXIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Quod ad nonnulla Tuarum anteriorum visum sum respondisse paulo brevius, non ideo factum est, quod Tuae objectiones mihi fuerint ingratae, sed quia judicavi, quod res est, eo Te esse ingenio, ut non habeas opus multis verbis. Fortasse etiam fuere tunc, quae scribentem coegerunt festinare. Et nunc quoque sunt, quae me avocant a meditandi laboribus, quorum potissimum est catharrus gravis, qui adjunctam habet febriculam, quae ne quid altius in recessu habeat, cavendum est.

Dnus. Papinus libellum suum, quem vidisti, ubi primum fuit editus, ad me misit. Ex eo renovata est inter nos concertatio per literas, quam totam Tibi communicabo; cui enim meliori possem judici atque etiam defensori? Videbis antiquum obtinere virum, nec facile gloriam veritati daturum esse, non considerantem, quod ipse Deus est veritas. Gaudeo Te, repetitis meditationibus pro acumine Tuo perspexisse et pro candore agnoscere sententiae meae vim ac firmitatem, quod paucis contigit: adeo difficile, nec fere nisi meliorum ingeniorum proprium est, praejudicia exuere. Quod ad Acta Eruditorum Te non remisi, causa in promptu est, quia Tibi lecta non dubitabam.

Quae de ictibus materiae gravificae habes, sunt ingeniosissima, nempe quod numeri ictuum, qui quolibet tempusculo imprimuntur corpori gravi, non sint aequales, sed ejus celeritati proportionales; quo quidem admisso, sublata esset difficultas Dni. Papini, etiamsi ipsi concederemus, quemlibet ictum aequalem vim imprimere. Alterutrum igitur nobis faciendum superest, vel quaeren-

dus modus ostendendi quod notas de numero ictuum, vel neganda ictuum aequipollentia. Fateor nondum mihi modum occurrere ostendendi, quod numeri ictuum in aequalibus momentis sint celeritatibus proportionales, quia adversarius negabit de eo quaeri, quot occurratur corpusculis, cum non ab horum numero, sed velut a numero totidem flatuum venti (bouffées de vent) res pendeat, quemadmodum in navi velis acta, qui numerus est aequalibus tempusculis aequalis, adeoque temporibus proportionalis. Hoc igitur rogo, ut porro mecum considerare velis, quemadmodum et alterum membrum dilemmatis, utrum scilicet globus A incurrens celeritate infinita in globum B, aequalem ei vim imprimat, sive globus B quiescat sive moveatur, quod facile demonstrari posse ais; ego fateor me nondum eam demonstrationem videre. Jungemus igitur meditationes, ut videamus an nobis in his rebus liquido satisfacere liceat; quo facto haud scio an deprehensurus sis, subesse aliquid solidi meae responsioni ad elegantem difficultatem de globo sclopetario in testudinem impacto. Et considerandum videtur, non omnimode esse verum, quod continuatis impressionibus infinite celeribus in B inde a quiete, semper idem celeritatis gradus denuo imprimi debeat mobili, tempusculo quovis, sed tum demum, cum etiam feriens infinities minus censetur, quam mobile continue percussum; ubi etiam in impulsibus materiae gravificae vel venti navem impellentis, reapse ita contingit, ob materiae percutientis maximam tenuitatem vel raritatem. Sed si feriens percusso aequale ver. gr. vel notabiliter comparabile esset, ac se haberet velut aqua ad lapidem et infinito impetu feriret, manifestum est, primo statim ictu, quiescenti percusso imprimendam fore celeritatem infinitam, quem gradum continue denuo imprimi non posse est manifestum. Unde vides, non posse generaliter pronuntiari, quod continuo aequalem velocitatis gradum imprimat medium aequaliter agens, si infinita celeritate agere ponatur; sed et in eo casu, quo revera aut circiter idem semper gradus velocitatis imprimitur, non video quomodo inde possit inferri, sine petitione principii, eundem imprimi gradum virtutis seu eundem in patiente produci effectum; cum non concedam, vires esse velocitatibus proportionales, imo contrarium mihi sit pro demonstrato.

Quae habes de incursu obliquo, egregia sunt et prorsus ad sensum meum. Imo si in plano aliquo (fig. 51) tres sint globi aequales A, B, C et globus A in duos quiescentes B et C simul

incurrat, ita ut centra eorum in momento concursus faciant triangulum, quod sit rectangulum ad A; demonstro quieturum corpus A in ${}_2A$, corpora autem B et C omnem vim esse receptura et quidem itura celeritatibus ${}_2B_3B$, ${}_2C_3C$, quae sint latera quadrati, cujus diagonalis sit ${}_1A_2A$ celeritas ipsius A ante ictum. Hinc jam duxi consequentiam, qua rursus constrictus tenetur Dnus. Papinus. Ponamus corpora B et C in ${}_3B$ et ${}_3C$ parieti immobili Elastico directe occurrentia, repercuti celeritate et itinere quo venerunt, et redeuntia proinde simul ad ${}_1B$ et ${}_1C$, ibi rursus simul incurrere in A, loco cujusque resumto; tum ambo B et C resument quietem, et corpus A suam celeritatem recipiet. Hinc porro sequitur, idem futurum, si B et C in quiescens A veniant ex locis ${}_3B_2C$ celeritate aliunde accepta, quam ab A aut pariete elastico; nihil enim refert, unde habeant, postquam semel habent. Ergo aequales globi B et C et aequiveloces, simul incurrentes in tertium cuilibet eorum aequalem A, situ centrorum faciente triangulum ABC rectangulum in A, quiescent post ictum, et totam suam vim in A transferent, eique dabunt celeritatem ${}_2A_1A$, quae sit ad celeritatem ipsorum ${}_3B_2B$ vel ${}_3C_2C$, ut diagonalis ad latus quadrati. Unde jam habemus simplicissime, quod Papinus fieri posse negarat, ut in concursibus ex majore massa in minorem tota vis transferretur; quod tamen hic contingit ex $B+C$ in A. Idque in literis ad Papinum scriptis innui a me repertum per concursum unius cum duobus, non tamen exposui, quod videretur mihi inconvertibilis demonstrationibus quantiscunque.

Sed quoniam Te in nostris castris video, lubenter communicabo principium meum a priori demonstrandae verae aestimationis virium, quod mihi in promptu esse aliquoties indicavi, nondum tamen hactenus produxi. Tibi autem communicare est frugiferae maxime terrae commendare granum, ut in magnam plantam surgat. Petitur autem ex principiis maxime primis et abstractis, nempe notione temporis, spatii et actionis. Unde etiam patet tantum abesse, ut quod aliqui putarunt, negligatur a me debita temporis consideratio, ut potius sit totius aestimationis basis.

Ecce Argumentum:

1. Actio faciens duplum, tempore simplo, est dupla (virtualiter) actionis facientis idem duplum tempore duplo; seu percursio duorum milliarium intra horam est dupla (virtualiter) percursionis duorum milliarium intra duas horas.

2. Actio faciens duplum tempore duplo, est dupla (formaliter) actionis facientis simplum tempore simplo; seu percursio duorum milliarium intra duas horas est dupla (formaliter) percursionis unius milliaris intra unam horam.

3. Ergo Actio faciens duplum tempore simplo est quadrupla Actionis facientis simplum tempore simplo; seu percursio duorum milliarium intra unam horam est quadrupla percursionius unius milliaris intra unam horam.

4. Si pro duplo substituissemus triplum, quadruplum, quintuplum etc., prodiisset actio noncupla, sedecupla, 25pla; et generaliter patet, actiones motrices aequabiles, aequitemporaneas, aequalium mobilium esse ut quadrata celeritatum, vel quod idem est, in eodem vel aequali corpore vires esse in duplicata ratione celeritatum. Q. E. D.

Hoc argumentum, quo est brevius et petitum ex magis obviis, hoc puto fore inexpectatius, et nonnullos etiam sese in eruendo aliquo ejus paralogismo frustra fatigaturos. Suspicamur enim nos decipi, quoties brevibus et facilibus argumentis velut circumvenimur. Nolui tamen illos dignari hac liquida luce veritatis, qui argumenta illa, ab affectibus gravium vel aliorum corporum sensibilium petita, non ut par est accepere; unde nec publice extare volui, ut esset, quod illis communicarem, qui sese aequos judices praebuissent.

Verissimum est, quod ais, et a me quoque comprobatum in Tentamine de Motuum Coelestium causis, vires centrifugas in ratione composita esse ex duplicata directa celeritatum et reciproca simplice radiorum; neque id contemnendum est in rem nostram, etsi enim hae vires vel potius sollicitationes differant a viribus ipsius per se circulantis; sufficit quod illis sunt proportionales. Interim revera nihil aliud sunt quam celeritates elementares. In centro percursionis indagando peculiaris oritur subtilitas, quam alia vice exponam; nunc enim valetudinis ratio magnam attentionem non fert. Memini etiam me olim examinare resistentiam respectivam ad meae aestimationis leges, et tamen veram deprehendere, quod et ipsum resumtum lubentissime exponam. Cur autem in vulgari Mechanica aequilibrium sit, cum velocitates descendendi infinite parvae seu initiales sunt ponderibus reciproce proportionales, causa est (quemadmodum etiam indicavi in Actis) quod initio etiam descensus vel ascensus sive altitudines sunt ve-

locitatibus istis elementaribus proportionales. Generaliter autem gravium vires sunt in ratione composita corporum et altitudinum, ad quas vi ipsarum ascendere possunt corpora, vel ex quibus descendendo eas acquisivere. Caeterum pro objectione non habeo quod notas, si una libra a fulcro duplo remotior cum duabus libris sit in aequilibrio, supervenientem velocitatem actualem ex parte unius librae descensum ejus facturam, non tamen magno impetu semper, sed pro ratione impressae velocitatis, cum et appositae duae librae, una illa descendente, sint elevandae; nec puto experientiam a nostris principiis dissensuram.

Mersenni experimentum vereor ne sit erroneum; si tamen verum esset, globum erecto perpendiculariter tormento excussum non recidere, sequeretur gravitatem, in brevi distantia a terra, vim perdere, et terram esse instar magnetis, qui acus nonnisi valde propinquos attrahit. Neque id nobis officeret; rem tamen ita sese habere non facile credo. Miror experimentum a nemine, inde a Mersenni temporibus, fuisse sumptum.

Velim Tibi persuadeas, cum contra motum perennem mechanicum nuper Tibi scriberem, plane me in animo non habuisse, quae olim ope filtri proposueras; alioqui dixissem aperte et candide nec Te verbis aculeatis pupugissem, quod a meo more est alienum. Et non ero adversus, cum declares debere accedere motum intestinum ex aliis quam gravitatis principiis ortum, veluti si fermentatio durabilis aut periodica esset in liquore, atque non nisi motum physicum perennem intendas. Nam optime ais, liquore leviore super graviorem posito et deinde cum eo perfecte mixto, commune eorum gravitatis centrum ascendere; unde adeo vi quadam extranea vel physica ad hanc mixturam opus esse constat. Forte et alia postea vi physica opus erit ad procurandam filtrationem seu ad vincendam causam mixtionis conservatricem, quae causa conservans fortasse esse posset vel sola partium tenuitas. Itaque ingeniosam Meditationem Tuam sugillare in animo non fuit.

Atque ita jam omnia Tua attigisse credo, etsi omnibus non sit satisfactum, quod tamen spero me alias, Deo dante, facturum, ubi valetudo sibi recte constabit. Interea parabilioribus meditationibus semper promptissime inservire conabor. Et sunt omnino in hoc negotio Dynamices nostrae, quae adhuc Tibi exponi debent, quia publice nondum prostant; cum enim a multis annis ista ver-

saverim, mirum non est, si nonnulla constitui, quae primo aspectu sese offerre non possunt. Quanti autem momenti sit, recte constitui principia hujus Matheseos, vel Physico-Matheseos tam late patentis, quae considerationem virium (rem imaginationi non subditam) addit Geometriae seu scientiae imaginum universali, facile intelligis. Libentissime autem Tibi exponam sententias meas, vel ideo ut cognitis illis, facilius deinde per Te superes difficultates, meque necessitate haec diutius meditandi leves. Nam multa mihi elaboranda supersunt adhuc altiora, si Deus vires vitamque concedat, quae vellem non interire.

Cum Cursor publicus abiisset ante has expeditas atque adeo tempus adhuc superesset, nonnulla subjungenda putavi, ne qua in re Tibi satisfacere negligerem. Et quidem circa demonstrationem meam ex principiis primis petitam, notatu dignum est et imprimis memorabile, hinc sequi revera eamdem semper quantitatem Actionis motricis absolutae conservari; sed in eo fuisse peccatum a Cartesio, quod eam non recte accepit et cum ea, quam vocat, quantitate motus confudit, praejudicia recepta secutus. Deinde sciendum est, a me distingui vim absolutam a directiva, quanquam et directivam ex sola consideratione potentiae absolutae deducere et demonstrare possim. Et quidem demonstro non tantum eamdem conservari vim absolutam seu quantitatem actionis in mundo, sed etiam conservari eamdem vim directivam eamdemque quantitatem directionis ad easdem partes, seu eamdem quantitatem directionis ad easdem partes seu eamdem quantitatem progressus, sed progressu in partibus computato, ducta celeritate in molem, non quadrato celeritatis. Haec tamen quantitas progressus in eo differt a quantitate motus, quod duobus corporibus in contrarias partes tendentibus pro habenda quantitate motus totali (sensu Cartesiano) debent addi quantitates motus singulorum (seu facta ex celeritate in molem) sed pro habenda quantitate progressus debent a se invicem detrahi; differentia enim quantitatum motus in tali casu erit quantitas progressus. Itaque cum Cartesius putarit sese ita posse salvare actionem Animae in corpus, quod anima quidem non augeat vel minuat quantitatem motus in mundo, augeat tamen vel minuat quantitatem directionis spirituum, lapsus est ignoratione hujus legis nostrae novae de conservanda quantitate directionis, quae non minus pulchra est et inviolabilis, quam conservatio virtutis vel actionis absolutae. Haec autem lex directionis vel potius

consectaria ejus, mire decepere plerosque, ut videntes ibi locum habere aestimationem ex ductu celeritatis in molem, ubique illi locum facerent, etiam cum agitur de vi absoluta. Exempli causa experimentis constitit, si duo globi duri seu Elastici, A et B, directe et centraliter concurrant inter se celeritatibus, quae sint reciproce proportionales corporibus, eos se mutuo repellere, ita ut ambo redeant ea qua venere celeritate. Hujus rei necessitas sequitur ex nostro principio conservandae directionis. Nam, ante concursum, progressus eorum seu quantitas directionis est aequalis nihilo; ergo talis etiam debet esse post concursum. Cum vero etiam vis eorum absoluta debeat conservari, demonstratur has duas conservationes virtutis absolutae et directionis simul non posse obtineri, nisi dicta repercussione. Simili methodo demonstratur, quod supra asserui, de globo A cum B et C concurrente per triangulum rectangulum, et regulae etiam concursus duorum corporum statim definiuntur. Verissimum est etiam ipsam vim directivam haberi ductu molis in quadratum celeritatis, ut aliquando apparebit. Interim, eo seposito, illa simplex consideratio directionis seu progressus etiam facit, ut in aliis multis opus sit celeritate ducta in molem; verissimaque maneant theoremata receptae Mechanicae, item oscillationis vel percussionis, imo et resistentiae medii respectivae. Reperi enim, si ponamus corpus in medio ferri, et medium constare ex innumeris globulis, per spatium tanto rarius disseminatis, quanto medium est tenuius, celeritatum decrementa, in quovis ictu amissa, esse celeritatibus proportionalia; et cum aequalibus temporibus, numeri ictuum hoc loco sint ut celeritates, fore decrementa ut quadrata celeritatum, aequalibus temporum elementis. Idque ex ipsis illis meis principiis de conservanda tam virtute absoluta, quam directione, demonstro. Unde vides, quanta hic cautione sit opus in recto usu principiorum nec iri debere per saltum, nondum omnibus rite examinatis. Sed haec altiora objectoribus, in quibus non satis docilitatis apparuit, exponere non sum dignatus, tametsi principium hoc generale de conservanda etiam directione contra Cartesianos non dissimularim. Tibi vero vellem haec omnia uno oculi obtutu paterent. Atque ita jam ea dedi, ex quibus omnibus Tuis difficultatibus (etiam supra dilutis) satisfit. Hoc tantum addo, re considerata, non esse quod quaeramus demonstrationem hypotheseos illius, quasi grave descendens vel ascendens plures ictus

a materia gravifica recipiat, eodem tempusculo, proportione celeritatis, neque enim veram puto: et si esset vera, celeritates non crescerent aequabiliter seu ut tempora. Interim minime concedendum est, quod aequalis gradus virium absolutarum, quovis ictu gravi, addatur vel auferatur; etsi enim materia gravifica semper aequaliter agere ponatur, tamen grave patiens non manet aequaliter dispositum. Longe enim alia ejus est dispositio cum quiescit, quam cum jam vim accepit. Imo, eo ipso, dum additur eadem celeritas celeritati alicui jam inexistenti, demonstratum habetur ex nostris principiis addi vim majorem, quam cum additur quieti; seu plus esse celeritatis gradum addere jam moto vel magis moto, quam addere quiescenti vel minus moto: ut ita argumentum contrarium sit demonstrative revictum, et alia solutio non sit quaerenda. Vale.

Dabam Hanoverae 28. Januar. 1696.

P. S. Curavi nuper edi relationem ex Gallia mihi missam de novo illo et admirabili Andidysenterico, quod mercator quidam ex Hispania attulit, et jussu Regis innumeris successibus comprobatum est. Non dubito quin Tibi, in Gallia versanti, dudum innotuerit. Sed quoniam nunc compertum est, nihil aliud esse quam remedium a Pisone descriptum in Historia naturali Brasiliae, et quae antea velut arcana premebantur, jam emanavere, in usum nostrorum edi curavi. Credo hoc remedium plus adhuc habere in recessu, nec ad solus dysenterias valere. Apud Pisonem vocatur Ipecacuanha ....

De caetero magna me voluptate afficies, si me crebro, et si vacat, septimanatim scribas, etsi ego fortasse semper septimanatim respondere non possim. Iterum vale.

XXIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Vix credideris, quanto me moerore afficiat dubia Tua valetudo; faxis, rogo, omnibus modis, ut graviori malo in tempore occurras. Spero tamen catharrum, quo natura subinde, praesertim hoc anni tempore, utitur ad expellendum quod sibi molestum

est, Tibi pariter in firmiorem sanitatem esse cessurum; quod ut ita fiat, Deum animitus precor.

Dominus Papinus, ut video, manus victas nunquam dabit; jam nimis aperte Cartesianae opinionis defensionem suscepit, quam ut ab ea deflecti possit, suae magis consulens gloriae (si qua gloria dicenda est a praejudiciis non desistere velle) quam veritati. Quin si errorem tandem videret, non tamen cum agnosceret, multominus publice fateretur. Interim gaudeo, quod nunc ego Tecum in summa rei conveniam, et pleraque, quae in prioribus meis notabam, ad stabiliendam novam Tuam hypothesin, Tibi non displiceant. Miror vero etiam, a Te non approbari modum meum explicandi ictus materiae gravificae, qui quolibet tempusculo corpori gravi imprimuntur; certe si velimus aequos judices agere, oportet ut cuique suum tribuamus. Ecquid clarius est, quam quod duae quantitates fluidorum aequivelocium incurrentium in duo corpora aequalia, ipsis inferant vires, quae erant in ratione ipsarum quantitatum fluidarum; est enim et hic repetitio effectuum homogeneorum, quam adeo commendas pro aestimatione causarum; ita ex. gr. quantitas fluidi, ut $_2A$, celeritate ut C, producet duplo majorem vim quam quantitas ejusdem fluidi, ut $_1A$, celeritate eadem C, quod enim potest unum A, idem poterit etiam alterum A, caeteris paribus; ergo geminata causa, geminatur effectus. Hinc siquidem minus arrideat quod dixerim, numeros ictuum, qui quolibet tempusculo imprimuntur corpori gravi, esse ejus celeritati proportionales, ponamus unicum esse ictum, quovis tempusculo impressum (quamvis, ut verius dicam, nullus sit ictus, sed potius una continua pressio per totum descensum gravis) nunquid ipsi ictus diversis tempusculis impressi erunt, (quandoquidem celeritas materiae gravificae maneat semper eadem) ut quantitates fluidi seu materiae gravificae illis tempusculis percursae seu penetratae; verum ae quantitates sunt ut spatiola descensuum momentaneorum, id est, ut celeritates gravis; ergo etiam ictus, vel potius vires ictuum diversis tempusculis gravi impressae, erunt ut celeritates. Id quod apertius liquet ex ipsa figura in ultimis meis adjecta, quam, si placet, aspicias; ubi si supponatur grave descendens per AB esse ex. gr. in 2, facturum uno tempusculo descensum 2, 3; nunc autem esse in 6, et aequali tempusculo percurrere 6, 7; illico bpparet majorem copiam materiae gravificae aequali tempusculo appellere ad grave, quando est in 6, quam cum est in 2; quae

quidem copiae erunt ut spatiola percursa, id est, ut 5,6 ad 1,2; id est, ut celeritates in dictis locis acquisitae. Sed rogo ut haec paulo attentius mecum consideres; non enim dubito quin iis tandem assensum tribuas, cum adeo apprime et rationi et experientiae conveniant; licet verum sit, me minus congrue dixisse grave descendens vel ascendens plures ictus a materia gravifica recipere, eodem tempusculo, proportione celeritatis; est enim, ut jam dixi, unica continua pressio; interim per numeros ictuum illorum celeritatibus proportionales, intelligere volui pressiones uno tempusculo inductas, quae sint celeritatibus proportionales, ideo quod grave in illa proportione materiam gravificam penetret, ut ego puto, non autem quod grave nunc tardius, nunc celerius moveatur, ut Tu statuis. Unde cernis meam sententiam plane nil officere opinioni receptae, celeritates crescere aequabiliter seu ut tempora. Ne autem quid desit, ostendam alterum dilemmatis membrum, quod scilicet globus A, incurrens celeritate infinita in globum B, aequalem ei vim imprimat, sive globus B quiescat sive moveatur; ad quod demonstrandum haec duo tanquam concessa praemittam. 1. Si duo globi moveantur in plano, quacumque celeritate, et sibi mutuo occurrant, erit quantitas ictus eadem censenda seu erit ictus aeque fortis, sive planum, super quo moventur globi, omnino quiescat, sive alia peculiari celeritate moveatur; hoc utique nemo negabit; alias corporum actiones in terra non eaedem dicendae essent in Hypothesi Ptolemaica et Copernicana, vel ex. gr. operarius in navi laborans, non eadem vi clavum impelleret, si navis quiescat quam si sit in motu. 2. Corpus motum celeritate infinita eumdem effectum praestabit, quem praestat, si ejus celeritati superaccedat finitus celeritatis gradus; sit enim Corpus A, celeritate infinita (∞) et idem corpus A celeritate $\infty + 1$, erunt effectus ut quadrata celeritatum, id est, ut ∞^2 et $\infty^2 + 2\infty + 1$; verum haec duo quadrata censentur aequalia, quoniam $2\infty + 1$ pro nihilo habetur respectu ∞^2.

Quibus praeliminatis supponatur globus A moveri in plano aliquo quiescente, celeritate ∞, et incurrere in globum B quiescentem; nunc vero intelligatur planum simul etiam moveri in easdem partes, celeritate ut 1, habebit hac ratione globus A velocitatem $\infty + 1$, et globus B velocitatem 1, atque adeo, per lemma primum, globus A, celeritate $\infty + 1$, tantundem valet in globum B, celeritate 1, quam idem globus A, celeritate ∞, in globum B, cele-

ritate 0 seu quiescentem. Verum per Lemma secundum effectus globi A, celeritate ∞, est aequalis effectui globi A, celeritate $\infty + 1$; ergo etiam globus A, celeritate ∞, tantundem valet in globum B, celerite 1, quam in eundem globum B, celeritate 0 seu quiescentem; id est, vis impressa globo B erit aequalis, sive moveatur, sive quiescat. Q. E. D. Hinc, ni fallor, veritas illius, quod de globo sclopeti in testudinem impacto retuli, satis asseritur.

Dum haec scribo, non possum quin ob affinitatem materiae aliquid moneam, quod mihi post scriptas demum priores meas occurrit in perlectione Schediasmatis Tui Actis Erud. Anno 1689 p. 40 inserti De resistentia medii et motu projectorum gravium in medio resistente, ubi, quae de Resistentia absoluta Art. 1. habes, nimis festinanter a Te scripta videntur, ut pro ingenuitate Tua ipse fateberis, si ea relegere placuerit. Dicis enim

1. Decrementa virium sunt proportionalia incrementis spatiorum; quod utique ita debet esse, etenim ad superandam duplo majorem frictionem, id est, ad percurrendum duplum spatium, etiam impenditur duplo major vis etc. sed quod subnectis

2. Velocitates sunt proportionales spatiis, perditae percursis, residuae adhuc percurrendis, hoc ipsi Tuae hypothesi de aestimatione virium minus consentaneum videtur. Ratio quam addis ibidem: Ponantur incrementa spatii esse aequalia, erunt decrementa virium aequalia (per prop. 1): nam si ejusdem mobilis decrementa virium sint aequalia, etiam decrementa velocitatum sunt aequalia (sunt enim vires ut quadrata velocitatum; aequalibus autem existentibus quadratis, etiam aequalia sunt latera) itaque Elementa velocitatum amissarum sunt ut elementa spatiorum percursorum, residuarum ut adhuc percurrendorum. Ergo velocitates sunt ut spatia etc. In hoc praeprimis vacillat, quod consideras velocitates amissas, quae utique amplius non existunt et proinde ad aestimationem virium perditarum nihil faciunt, loco quod considerari debuissent velocitates residuae ad aestimandas vires residuas, ex quibus deinde decrementa illarum et harum innotuissent; sunt enim velocitates reales, quae determinant vires. Hinc, si in figura ibi apposita (fig. 52) velocitas initio sit AE, spa-

tium integrum in medio percurrendum sit recta AB, ejus pars jam percursa AM, adhuc percurrenda MB, velocitas residua MC (vel AF) amissa FE, erit ECB non recta, sed parabola, cujus vertex B et axis BA: quod quidem ex hoc solo etiam patet, quod si spatium percursum AM sit ex. gr. $\frac{3}{4}$ partes axis AB, perdiderit mobile etiam $\frac{3}{4}$ suae vis (quia spatia percursa sunt ut vires impensae) remanebit ergo mobile $\frac{1}{4}$ vis initialis, et cum vires sint (juxta hypothesin novam) ut quadrata celeritatum, habebit mobile in M, $\frac{1}{2}$ celeritatis initialis, id est BM . BA :: MC^q . AE^q. Praetereà huic meae objectioni ipse apertissime suffragaris in penultimis Tuis ad me datis, ubi ais, me recte judicare, ex Tuis principiis sequi corpus duplo celerius quadruplo amplius penetraturum in materiam mollem, modo consideretur sola difficultas, quae est in separatione partium tenacium, id est, considerata sola resistentia absoluta etc. Quae cum ita se habeant, pleraque cadunt, quae in dicto Schediasmate ex praemissis illis deducis, ut curva AL cujus abscissae et applicatae BM, ML denotant spatia residua, et tempora insumta, non erit logarithmica, sed parabola communis, contra reg. 3 et 5 Art. I. Ideoque mobile M absolvit spatium percurrendum integrum AB tempore finito, contra reg. 4 ibidem. Sequentia etiam quoad maximam partem subvertuntur. Qua de causa Tibi deliberandum relinquo, annon haec corrigere operae pretium esset. Interim enixe rogo, ut hanc meam admonitionem serena fronte accipias; vides enim unicum meum scopum esse studium veritatis, et procul a me distare morem illorum, qui aliorum scripta cavillandi unice causa suas objectiones statim divulgant publice; si vicissim a me in aliqua re peccatur, non solum aeque fero correctionem, sed insuper obstrictum me fateor illi qui me ab errore liberaverit; quo nomine Tibi plura, quam ullatenus demereri possim, debeo.

Modus transferendi totam vim ex majori massa in minorem, quem ex iis, quae de incursu obliquo globorum dixeram', deduxisti, mihi perplacet; nec dubito quin Dn. Papinum, et vel invitum, ad assensum coëgerit; pergratum tamen esset intelligere, quid responderit. Meo arbitrio non male ageres, se responsionem Tuam ad ultimas ejus objectiones etiam publici juris faceres, cum ille in libello suo eo Te invitare videatur; alias multi rem a Papino egregie defensam putarent.

Argumentum a priori petitum, quo demonstras principium Tuum, est sane speciosissimum, et ut dicis, omnino inexpecta-

tum: quod illud mihi communicare volueris, haud parvas refero gratias. Non video quid ab adversario in contrarium dici possit; nisi forte quod actio virtualis confundi videatur cum actione formali, negando scilicet consequi A esse quadruplam ipsius C, ex eo quod A sit dupla ipsius B virtualiter, et B dupla ipsius C formaliter. Itaque dicet tali modo ratiocinari licere, si utraque actio esset homogenea, id est, utraque aut virtualis aut formalis; sed utrumvis sumamus, delabemur semper in πρῶτον ψεῦδος; quod scilicet actio faciens duplum, tempore simplo, non esset quadrupla, sed dupla tantum actionis facientis simplum tempore simplo. Ecce imitor argumentum Tuum.

1. Actio faciens duplum tempore simplo est dupla virtualiter actionis facientis idem duplum tempore duplo.

2. Actio faciens duplum tempore duplo est simpla virtualiter actionis facientis simplum tempore simplo.

3. Ergo actio faciens duplum tempore simplo est dupla actionis facientis simplum tempore simplo. Vel sic

1. Actio faciens duplum tempore simplo est simpla formaliter actionis facientis idem duplum tempore duplo.

2. Actio faciens duplum tempore duplo est dupla formaliter actionis facientis simplum tempore simplo.

3. Ergo etc.

Vides duo argumenta, quae idem plane concludunt, sed Tuae conclusioni omnino contrarium, et vulgato illo nituntur axiomate, quae eidem sunt aequalia, illa sunt inter se aequalia; quod quidem tantummodo locum habet in quantitatibus homogeneis, ut hic comparando actionem virtualem cum virtuali, et formalem cum formali, non autem illam cum hac. Quid ad hanc objectionem responderi debeat, ipse dispicias; nolim ego Tibi quid objicere, sed potius quid ab aliis objici possit, sincere moneo, quod a Te etiam ita acceptum iri spero.

In Actis Februarii Anni 1689 vidi Tibi quoque compertum fuisse vires centrifugas seu, ut vocas, conatus excussorios esse in ratione composita ex duplicata directa celeritatum et reciproca simplice radiorum. Hinc si velis paulo attentius considerare problema meum, quod ante annum in Actis proposui, illud non adeo inelegans reperies, quin Tuam applicationem mereatur. Grave nempe in plano verticali libere descendens et evolvens curvam aliquam quaesitam acceleratur, et proinde vis centrifuga hac ratione auge-

tur. Quoniam autem filum evolvens, cui grave alligatum est, elongatur, vis centrifuga hac ratione minuitur. Quaeritur itaque constructio curvae, ut decrementa vis centrifugae ab elongatione fili profecta, compensentur per incrementa ejusdem vis ab acceleratione provenientia, id est, ut tensio fili semper eadem maneat, vel ut filum semper vi eadem extendatur.

Quaenam in centro percussionis indagando alia oriatur subtilitas, quam illa, ut considerentur quadrata celeritatum actualium, ceu in prioribus meis innui, lubentissime mihi exponi cuperem.

Ais Te etiam olim examinasse resistentiam respectivam ad Tuae aestimationis Leges, et tamen veram deprehendere; sed nescio utrum verum putes, an quod resistentiae respectivae sint ut quadrata, an vero ut cubi celeritatum; illud vulgaris est opinio, hoc autem ex existimationis Tuae lege consequitur.

Mirum quantum me delectarunt, quae habes de vi directivà et quantitate directionis ad easdem partes seu quantitate progressus: ubi pulchre detexisti, quid Cartesio aliisque ad errorem ansam dederit, scilicet quod cum viderent aestimationem ex ductu celeritatis in molem alicubi, ut in duobus globis perfecte elasticis, inter se celeritatibus quae sint reciproce proportionales corporibus concurrentibus, qui post ictum, pristina celeritate repercutiuntur, locum habere, fallaciam committentes inductionis ubique illi locum facerent. Recte dicis, quod vis directiva ex sola consideratione potentiae absolute deduci et demonstrari possit; sed non ita facile est demonstrare, semper eamdem quantitatem directionis seu progressus conservari. Interim scias me jam a longis annis simile formasse principium, quod, ex occasione Tui, iterum in memoriam revocavi, et post institutum examen mirifice cum Tuo conspirare deprehendi. Illud autem est tale: Si corpora quotcunque, in motu constituta, sibi quomodocunque occurrant, habebit se centrum commune gravitatis post concursum eodem modo quo ante concursum, id est, post mutuam actionem corporum, centrum commune gravitatis eamdem directionem et eamdem celeritatem servabit, quam habebat ante actionem. Possum autem demonstrare, quod id quod vocas quantitatem directionis, scilicet ducta celeritas in molem, nil aliud sit, quam quantitas progressus centri gravitatis, seu ducta celeritas centri communis gravitatis in summam molium, adeo ut haec duo principia sint plane unum et idem. Ex his jam conjicere liceret, eamdem semper gravitatem directionis in mundo conservari; est

enim ista quantitas semper nulla, seu tanta est quantitas directionis in unam partem, quanta in contrariam; alias centrum commune gravitatis totius universi progrederetur aequabiliter in linea recta in infinitum, a quo utique natura abhorret. Concipio itaque totam Machinam mundanam tanquam corpus suspensum in centro gravitatis, cujus tamen partes, liberae et separatae, omnibus modis circa centrum moventur, ita ut perpetuum aequilibrium servetur. Ex his principiis facile novae et verae conduntur regulae communicationis motuum: veteres enim, a Cartesio et aliis constitutae, omnes erroneae sunt eo ipso, quod ad conservationem ejusdem quantitatis virium motricium et progressus centri communis gravitatis non attenderint. Concursus harum duarum quantitatum sibi semper aequalium regulas determinat; alias esset problema indeterminatum, cum infinitis modis celeritates mobilium variari possint, ita tamen ut semper eadem quantitas virium maneat. Sed non erit eadem quantitas directionis seu progressus centri gravitatis; et vicissim infinitis modis celeritates variantur, ut semper eadem quantitas progressus maneat, sed tunc non manebit eadem quantitas virium. Unicus ergo est casus, ubi utrumque simul obtinetur, ex quo generalis regula pro communicatione motuum elicitur haec:

Globus a celeritate m, incurrens in globum b, habentem celeritatem n, habebit post ictum celeritatem $\frac{am + 2bn - bm}{a + b}$ et celeritas ipsius b erit $\frac{bn + 2am - an}{a + b}$, si globi ad easdem partes ferantur, et m sit major quam n; sin ad partes contrarias, ponendum tantum est $-n$ pro $+n$, et $+n$ pro $-n$. Hinc si corpus A, celeritate ut 1, incurrat in aequale B quiescens, habebit post ictum B celeritatem ut 1, et A quiescit (pono hic corpora perfecte elastica vel dura; idem enim effectus sequetur, sive sint perfecte elastica sive perfecte dura, nam falsissimum puto, quod aliqui, inter quos Wallisius, statuerunt perfectam duritiem, si qua daretur, efficere ut corpora post concursum simul et conjunctim ferrentur). Sed si artificio quodam effici posset, ut in ipso concursus momento, corpora, etiamsi summe dura, per uncum aliquem, vel aliquod gluten, ita arcte sibi invicem cohaererent, ut non possent progredi nisi junctim, procul dubio ob conservationem ejusdem quantitatis virium irent celeritate ut $\sqrt{\frac{1}{2}}$: verum tunc

quantitas progressus non eadem maneret. En igitur casum aliquem, quem in penultimis Tuis dari posse negaveras: Tuam super hoc responsionem libenter audirem; ego quidem aliquid responsionis loco adducere possem, sed id ipsum non omnino mihi satisfacit. Caeterum dicis, quod simplex consideratio directionis seu progressus etiam faciat, ut in aliis multis opus sit celeritate ducta in molem, verissimaque maneant theoremata receptae Mechanicae, item oscillationis vel percussionis, imo et resistentiae medii respectivae. Nescio quo pacto facias ut, sola celeritate ducta in molem, pervenias ad cognitionem centri oscillationis: ego eleganter admodum et felicissime centrum istud invenio, ponendo tantum principium illud conservationis ejusdem quantitatis virium, ubi in omnibus consentio cum Dno. Hugenio, absque ut adhibeam ejus obscurum principium, quod scilicet commune centrum gravitatis penduli compositi ad eandem altitudinem ascendere debeat, sive corpora pendulum constituentia separatim moveantur, sive simul, cum sunt in linea rigida affixa, oscillentur. Interim de centro percussionis nondum constat, an illud sit, quod Geometrae hactenus constituerunt. Lubentissime concedo, si ponamus corpus ferri in medio constante ex innumeris globulis aequaliter disseminatis, celeritatum decrementa fore ut quadrata celeritatum, aequalibus temporum elementis. Possum enim et ego illud demonstrare ex principiis de conservanda tam virtute absoluta quam directione; hoc autem minime probat, quod enim resistentiae ipsae, id est, virium decrementa quovis tempusculo amissa sint ut quadrata celeritatum; quin imo ex hoc ipso evincitur resistentias esse ut cubos celeritatum. Si enim (fig. 53.) mobile A feratur in tali medio, et abscissa AB denotet tempus, erit celeritas BD in curva hyperbolica CD, cujus asymptotos AB, et celeritas initialis AC, quoniam differentiales ipsarum BD sunt ut harum quadrata. Verum vires mobilis sunt etiam ut quadrata celeritatum BD: ergo decrementa celeritatum sunt ut vires, et proinde decrementa decrementorum celeritatum ut decrementa virium, id est, ut resistentia ipsa; sunt autem in hyperbola decrementa decrementorum applicatarum BD, id est, differentiae secundae ut cubi applicatarum ipsarum BD. Ergo etc.

Groningae 22. Febr. 1696.

P. S. De mirabili antidysenterico Ipecacuanha nunquam antehac innotuit mihi, neque etiam novo nostro Practices Professori

mecum vocato, Medico alias experientissimo, quem super hac re expresse interrogavi. Herbam Paraguay jam satis notam dicit. Cortex Peruviana etiam apud vos venalis erit. Frater meus scripsit de omnibus Amstelodamum celebri cuidam pharmacopolae (Droguiste) sed responsum hactenus nondum accepit.

Nihil mihi gratius esset, quam crebrius, imo hebdomatim Tibi scribere, sed negotia tam publica quam privata hoc prohibent; adde quod mihi labores nocturni omnino sint interdicti, eo quod lumen candelae valde officiat oculis meis. An nunc Halenses habeant Professorem matheseos et quemnam scire vellem. Si post aliquot annos ego desiderarer, vocationem non recusarem. Iterum vale.

XXV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Meditationes Tuae mihi sunt gratissimae, sive provehas nostra, sive ingeniosis dubitationibus illustres. Utinam ego semper meditandi laborem ferre possem, ut Tibi recte satisfacere liceret; faciam tamen quantum nunc commode possum. A Te absit ut exigam, mihi ut septimanatim scribas, cum paria reddere non possim: facias ergo, quod e re videbitur, persuasus Tua nunquam apud me nimia esse. Si non assentior in quibusdam, peto ne me id quadam judicii iniquitate facere putes, ut propemodum insinuas, cum ais: si aequos judices agere velimus, oportere ut suum cuique tribuamus. Spero Te persensurum me, non sine gravi causa, dubitasse de modo explicandi ictus materiae gravificae. Asseris, si fluidum A incurrat in corpus L, et fluidum priori simile et aequivelox B incurrat in corpus M aequale corpori L, vires in corporibus L et M productas fore ut magnitudines fluidorum A et B; vel ut tuis verbis utar, duas quantitates fluidorum aequivelocium, incurrentium in duo corpora aequalia, illis inferre vires, quae sunt in ratione quantitatum fluidorum. Hanc propositionem non concedo, nec video quomodo per repetitionem effectuum a me adhibitam et commendatam demonstrari possit. Et reperies contrarium contingere, si A et B non fluida sint, sed solida, licet corpora recipientia L et M ambo quiescere intelligantur. Et multo

minus res succedet, si differant celeritate. Nimirum si globus A, 1, celeritate 1, incurrat in globum L, 1 quiescentem, accipiet globus L celeritatem 1. Si vero globus B, 2, celeritate 1, incurrat in globum M, 1 quiescenten, accipiet globus M celeritatem 4. Vides ergo, etsi globus B sit duplus ipsius A, tamen vires impressas ipsi M multo plus quam duplas esse earum, quae impressae sunt ipsi L. Numerum ictuum non improbo; imo magis veritati consentaneum arbitror, quam pressionem continuam. Quod tuam attinet rationem probandi corpus celeritatis infinitae eamdem vim dare percusso, sive quiescenti, sive moto, concedo ictum esse aeque fortem, sive corpora concurrant in plano quiescente, sive in plano moto; sed aliud est ictum esse aeque fortem, aliud eamdem in percusso produci potentiae quantitatem, computando tam quod proprium, quam quod commune est: cum alia sit virium, alia motuum vel potius directionum compositio: quae etiam in finitis agnosci possunt. Sunt et alia in eo argumento, quae non omnino concludunt, quod appareret, si in formam redigeretur.

Monitum Tuum ad meam aestimationem resistentiae absolutae deprehendo verissimum; idque ipse occasione data profitebor. Revera enim non valet haec consequentia: si ejusdem mobilis decrementa virium sunt aequalia, etiam decrementa velocitatum sunt aequalia; ortumque hoc est ex praejudicio vulgari de aestimatione virium, menti adhuc praeter intentionem inhaerente. Sit mobilis a, celeritas e, vis aee; vis amissa avv, vis residua $aee - avv$, celeritas residua $\sqrt{ee - vv}$. Sit ejusdem mobilis celeritas (e), erit celeritas residua $\sqrt{(e)(e) - vv}$. Celeritatis decrementum priore casu erat $e - \sqrt{ee - vv}$, posteriore casu est $e - \sqrt{(e)(e) - vv}$, quae duae quantitates non sunt aequales. Itaque illud verum est, si vires integrae ejusdem corporis diversis temporibus sint aequales, etiam velocitates fore aequales; secus est de parte, veluti de viribus amissis vel acquisitis.

Nondum communicavi Dno. Papino modum transferendi totam vim ex majore massa in minorem, quem possibilem esse negaverat, ut thesin tueretur. Nempe vigesimo Decembris anni praeteriti, his verbis ad eum scripseram: „Pour conclure, je me souviens, „qu'autrefois vous avez nié qu'un grand corps peut transferer toute „sa force sur un plus petit, parceque vous avés vû que selon

„l'opinion vulgaire des Cartésiens, que vous soutenés, j'en inferois „le mouvement perpetuel, et vous avés tâché d'eviter la force de „mes preuves, touchant les moyens de cette translation, le mieux „que vous avés pû, en faisant des difficultés un peu recherchées „sur ces moyens. Cependant ayant revû mes méditations sur le „choc des corps, j'ay trouvé que sans levier ny autre apparat, „dont je m'étais servi autrefois pour vous satisfaire là-dessus, il „y a un moyen simple pour cela. C'est que faisant en sorte que „deux corps choquent à la fois un troisième, il doit arriver en „certain cas, que les deux corps ensemble, quoyqu'ils fassent „une masse plus grande que le troisième, demeurent pourtant en „repos, et donnent toute leur force au troisième." Ad haec respondet Dnus. Papinus in literis 15 Januarii 1696: „Pour ce que „vous dites des deux corps, qui communiquent ensemble tout leur „mouvement (non dixeram „„tout leur mouvement"" sed „„toute „leur force"") à un trosiéme, je crois me douter de ce que c'est; „mais crainte d'estre encore obligé de donner deux réponses au „lieu d'une, je différeray d'en parler, jusqu'à ce que vous ayés „nettement exposé le fait" etc.

Sed cum in illis ipsis literis mihi non satis aequitatis ostendere, sed sese ad elusiones praeparare videretur, rem exponere operae pretium non putavi; neque enim ita nunc constitutus sum, ut latebras varias quaerentem persequi velim aut possim. Caeterum cum voluptate vidi Te in literis tuis 18 Januarii datis, afferre nonnulla de compositione motus, quae cum his pulchre conspirant ipsique opponi possunt. Quae in libello suo scripsit, mihi controversiam tuam parum ad sensum meum proponere videntur, ut rem ipsam per se explicare aliquando, quam cum ipso litigare malim.

Video argumentum meum a priori non eodem apud Te esse loco, quo apud me. Neque habeo quod de eo querar. Tantum rogo, ut expendas talia paulo attentius, neque enim tam facile eludi potest, et ipse pro me solutionem objectionis dare potuisses. Sane non video quid Tibi velis, cum dicis actionem virtualem confundi cum formali. Non enim actio mihi hic est virtualis vel formalis; sed una actio alterius est dupla vel virtualiter, vel formaliter. Nimirum virtualiter, cum dupla est aestimatione, etsi non sit dupla mole vel congruentia, ut Ducatus est duplus Thaleri; formaliter vero, ut Thalerus duplum est semithaleri. Et sciendum

est, quod duplum est formaliter, id etiam virtute seu aestimatione esse duplum; ideo cum nonnisi de virtute seu aestimatione hic quaeratur, nulla est confusio diversi generis quantitatum vel aestimationum. Nempe virtualiter duplum intelligo quod tale est virtualiter solum; sed formaliter duplum voco, quod simul et formaliter et virtualiter duplum est, et poteram vocabulis illis (tantum harmoniae cujusdam causa adjectis) abstinere; ut enim quia Ducatus duplus est Thaleri, et Thalerus semithaleri, ;concludo Ducatum semithaleri quadruplum esse, ita quia percursio 2 milliarium, una hora, dupla est percursionis 2 milliarium, 2 horis, et percursio 2 milliarium, 2 horis, dupla est percursionis unius milliaris, una hora, sequetur percursionem 2 milliarium una hora esse quadruplam percursionis unius milliaris una hora. Ignosce candide dicenti, non videris nisi admodum obiter inspexisse demonstrationem meam, cum eam sic contra me verti posse objicis. 1. Actio faciens duplum, tempore simplo, est dupla virtualiter actionis facientis duplum, tempore duplo. 2. Actio faciens duplum, tempore duplo, est simpla virtualiter actionis facientis simplum, tempore simplo. Ergo 3. Actio faciens duplum, tempore simplo, est dupla actionis facientis simplum, tempore simplo, quod est contra me. Sed rogo ut expendas, quo jure assumi possit praemissa secunda, scilicet percursionem duorum milliarium, duabus horis, esse virtualiter simplum seu aequale percursioni unius milliaris, factae una hora. Certe quae virtute aequalia sunt, aequipollent; quis vero cursor non malit percurrere unum milliare, una hora, quam duo milliaria duabus horis: quin potius, si hoc ultimum ab ipso fieri velis, licet per intervalla, duplam mercedem petet, pro duplicato scilicet labore. Nimirum, ut dixi, quod formaliter duplum est (percursio scilicet duorum milliarium, duabus horis) eo ipso etiam virtualiter seu aestimatione est duplum. Idem est de altero tuo argumento ad mei, ut ais, imitationem fabricata, quod tamen rursus longissime ab imitatione ejus abest, ut ipse facile perspicies, Ducato, Thalero et semithalero substitutis. Placet tamen hoc quoque argumenti simulacrum expendere: 1. Actio faciens duplum, tempore simplo, est simpla formaliter actionis facientis idem duplum, tempore duplo. 2. Actio faciens duplum, tempore duplo, est dupla formaliter actionis facientis simplum, tempore simplo. Ergo 3. Actio faciens duplum, tempore simplo, est dupla actionis facientis simplum, tempore simplo. Videris ita loqui ac si propositiones

hic possent assumi pro arbitrio; sed qua tandem verisimilitudine assumis hic praemissam priorem? Simplum formaliter esse, nihil aliud est, quam aequale esse formaliter, sive congruere, ut Thalerus et duo semithaleri. Tantum autem abest, ut percussioni duorum milliarium intra horam aequetur formaliter percursio duorum milliarium intra duas horas, ut ne virtualiter quidem seu aestimatione aequetur; quis enim dubitet, quin plus sit, idem velocius, quam tardius peragere? Interim mirari subit mentis humanae conditionem.

His duobus vocabulis, virtualiter et formaliter, quae omittere poteram, adjectis, totam apud Te argumenti vim corrupi, ut a re ipsa aversus, aliud ageres, quod Galli non male vocant: prendre le change. Talia nobis eveniunt, solo attentionis defectu. Obvium aliquid nos saepe ita percellit et ad se trahit, ut reliqua non amplius consideremus, quasi jam asseculi paralogismi, quem nobis facile fingimus, sedem, sive *πρῶτον ψεῦδος*, ut Tute loqueris. Ego nihil magni promittere ausim; sperabam tamen reus non fieri paralogismi apertissimi in argumentatione, non obiter elapsa, sed a compluribus annis considerata, quam tanquam alicujus momenti venditaram. Itaque fateor non potuisse me non valde mirari praecipitem sententiam tuam, et puto candorem in monendo meum Tibi non ingratum fore, quia utilis est, ut attentio excitetur, ne tempus male collocare mihi opus sit, defendendo, quae Tibi ipsi consideranti facile se poterant approbare; cum me aequius sit in his sublevari. Majori specie opponi poterat: Pari jure quo ego assumsi hanc propositionem, Actio faciens duplum, tempore simplo, est dupla actionis facientis duplum, tempore duplo, potuisse assumi hanc: Actio faciens duplum tempore simplo est dupla actionis facientis simplum tempore simplo. Verum respondeo, hanc posteriorem non posse assumi, sed potius convinci falsitatis manifestae, hoc modo: Inter haec duo: A facere duplum tempore simplo, itemque C facere simplum tempore simplo, datur medium minus priore et majus posteriore, nempe: B facere duplum tempore duplo, cumque manifestissime (ex natura repetitionis perfectae) sit B duplum ipsius C, sequitur demonstrative A esse plus quam duplum ipsius C. Comparatio igitur inter A et C potest resolvi ulterius per interpositionum comparationis simplicioris; comparatio vero inter A et B interpositione simplicioris resolvi

non potest, sed primitiva est. His igitur a Te expensis, gratum erit aliquando cognoscere, quid jam argumentatione mea videatur. Quin aliam addo, quae, si fundum rei spectes, redit in priorem, habet tamen suum proprium pondus. Actiones motrices (aequabiles intelligo) ejusdem mobilis sunt in ratione composita effectuum immediatorum, nempe longitudinum percursarum et velocitatum. Porro longitudines (aequabiliter percursae) sunt in ratione composita temporum et velocitatum. Ergo actiones motrices sunt in ratione composita ex simplice temporum et duplicata velocitatum; adeoque iisdem temporibus vel temporum elementis, actiones motrices ejusdem mobilis sunt in ratione duplicata velocitatum, vel, si diversa sint mobilia, in ratione composita ex simplice mobilium et duplicata velocitatum. Itaque ex nostris principiis verius rectiusque ostenditur, eamdem in universo quovis momento vel aequalibus temporibus actionis motricis quantitatem conservari; quam vero Cartesiani computant quantitatem motus, veram actionis motricis quantitatem non esse. Sunt autem potentiae ut actiones, non impeditae nec adjutae; aequalibus temporibus exercitae. Videmus ergo eamdem semper vim, eamdemque movendi actionem in rebus servari, et quantum vel potentiae vel actionis motricis uni decedit, tantum in alterum transferri.

Egregie divinasti (considerato, opinor, concursu duorum, in quibus celeritates sunt reciproce ut moles, ubi nullam esse directionem notaveram) principium de conservato semper progressu centri gravitatis coincidere cum principio servandae directionis. Revera enim directio seu progressio totalis idem est, quod progressio centri gravitatis ducta in mobilium aggregatum, ut jam fere Guldino notatum, cujus regulam ampliavi; et centrum gravitatis tantum praestat ratiocinandi compendium. Malui autem directionem adhibere in loquendo, quod mihi cum Cartesianis res esset. Cum Romae essem anno 1689 et cum Auzouto, eruditissimo Gallo, qui inter Academiae Scientiarum Regiae velut conditores fuit, multum de his disputarem, meditationes meas in ordinem redigens libellum adumbravi, in quo demonstrantur haec omnia, de vi scilicet tam absoluta, quam directiva, et conservando progressu centri gravitatis, aliaque his non inferiora. Eum transiens per Florentiam amico, in Mathematicis egregio, petenti reliqui edendum, et ille redegit in mundum omnia studiose, sed cum finis libro adhuc deesset, quem summittere in me receperam, per me stetit hactenus,

quominus editio sequeretur; nondum enim colophonem adjeci, partim quod multa nova subinde nascerentur, quae mererentur addi, partim quod his, quos videbam mea non ut par erat accepisse, nollem velut obtrudere pulchras veritates. Interim propositionem hanc per elegantem inde decerptam, ante annos aliquot Diario Parisino*) inseri curavi: Si mobile A (quod ut punctum nunc consideremus) tendat simul motibus (id est, celeritatibus et directionibus) AB, AC, AD etc. (id est, ut quo tempore, si uno motu solo ferretur, perventurum esset in B, eo si altero solo ferretur, perventurum esset in C, et ita porro) et quaeratur punctum G, quod sit centrum gravitatis punctorum B, C, D, E etc. et recta AG producatur in F, ita ut AF sit ad AG, ut numerus tendentiarum ad unitatem, feretur mobile motu composito AF (id est, eo tempore, quo motu solo AB pervenisset in B vel motu solo AC pervenisset in C etc. nunc motu composito pervenit in F) quae Propositio Hugenio profundae meditationis visa est, et nascitur et ipsa ex conservatione directionis, scilicet quod ex motibus duobus componentibus, qui sint secundum duo latera parallelogrammi, oritur motus compositus secundum diagonalem; hujus propositionis generalis casus est simplicissimus, dudum notus. Meminit meae propositionis Dnus. Frater tuus in iis, quae nuper contra nos in Actis dedit. Respondi quam humanissime (ut hoc obiter dicam) tametsi videretur etiam sinceritatem meam in dubium vocare, quod me silere vetuit. Dn. Menkenius noster, vir egregius, significavit mihi sese ad Te scripsisse hortatumque esse, ut moderate fratri natu majori respondeas, voluitque ut idem suaderem ego. Respondi, me de Tua moderatione non dubitare et olim Te hac in re mihi *ὁμοψηφον* deprehendisse.

Verum est, quemadmodum et in proxime praecedentibus literis innui, ex conjunctis his duabus legibus: conservatae vis absolutae, et conservatae directionis, determinari leges motuum seu concursuum, modo corpora concurrentia A et B ponantur esse dura, seu quod mihi idem est, perfecte elastica. Calculum autem ita inire soleo, ejusque communicationem Tibi non ingratam fore spero. Progressus corporum A et B ad eamdem partem vocetur ante ictum in illo v, in hoc, y; post ictum in illo x, in hoc z; quod si contingat corpora non tendere in easdem partes cum centro

*) Journal des Sçavans 1693, 7 Sept.

gravitatis, tunc ejus, quod in partem contrariam tendit, progressus erit negativus. His positis, ex lege virium absolutarum conservandarum fiet (1) $Avv+Byy = Axx+Bzz$; ex lege conservandae directionis, fiet (2) $Av+By = Ax+Bz$, quae regula, certo tantum casu, coincidit cum regula conservandae quantitatis motus Cartesiana, cum scilicet ambo corpora tam ante, quam post concursum tendunt ad easdem partes, et adeo nullus ex progressibus v, x, y, z est quantitas negativa. Sed ecce jam tertiam legem non minus elegantem, quae hinc nascitur, imo caeteris simpliciorem. Ut enim prima regula est trium dimensionum, et secunda duarum, ita tertia est dimensionis unius. Nempe (3) $v-y=z-x$. Quod sic ostendo: Ex aequatione (1) fit (4) $Avv-Axx = Bzz-Byy$, et ex aequatione (2) fit (5) $Av-Ax = Bz-By$. Dividatur aequatio (4) per aequationem (5) prodibit (6) $v+x = y+z$, vel (quod idem est) aequatio (3). Aequatio igitur (3) continet legem conservandae celeritatis respectivae ejusdem, sive sit appropinquationis, accessusve ante concursum, sive recessus post concursum. Et quidem haec lex aliunde demonstrari potest, per vim scilicet elasticam concurrentium, quae concursu compressa se deinde restituunt, adeoque tantum celeritatem respectivam in contrarium vertunt, seu dispelluntur ut compellebantur. Unde ex lege prima et ex tertia aliunde demonstrata vicissim ostendi potest lex secunda. Nam si aequationem (4) dividas per aequationem (6) prodit aequatio (5) vel (2). Aliaque adhuc plura in his arcana satis mirabilia latent. Casus, ut corpora concurrentia simul eant post concursum, servatis viribus, facilius fingi, quam a natura praestari potest; absorbebitur scilicet pars in ipso retinaculo vel glutine; atque ita objectioni, quam Tibi eo casû facis, respondendum est.

Haud dubie cum Hugenio sentiendum est circa Centrum oscillationis, in quo nostra principia spectanti non potest esse difficultas; puto tamen et Centrum percussionis consentire ob causam dictam. Circa medium respective resistens, puto nos in re non pugnare, quia agnoscis quod dixi, aequalibus temporum elementis fore celeritatum decrementa, ut celeritatum quadrata. Interim pergratae erunt meditationes tuae, quas innuis de centro oscillationis, vel de resistentia respectiva, aliisque. Diu est, quod de nostris differentialibus apud me nihil attigisti, sed facile judico multa alia Tibi nunc agenda esse.

Mitto exemplum ejus, quod de Antidysenterico ex Gallico edi curavi. Quoniam Dn. Medico vestro satis nota est herba Paraguay, inquire peto in specialia, tam de ejus usu, quam de modo obtinendi. Venalis est apud nos cortex Peruvianus, sed plerumque sic satis suspectus, et non satis autorum notis de optimo respondens. Itaque si recenter allati cognitae probitatis et virtutis copiam mediocrem nancisci possem, libenter pretium persolverem. Quo loco res nunc sit apud Halenses circa Professionem Matheseos, non comperi, inquiram tamen. Non mediocriter doleo, neque hic neque in vicinia aperuisse sese locum apud pharmacopoeum pro Dn. fratre tuo, cujus notitia et vicinia mihi futura esset admodum grata.

His scriptis Tuas novissimas accepi. Gratias ago quod communicas, quae Dn. frater tuus ex Batavis didicit de exoticis, quorum mentionem feceram. Binae librae optimi corticis Peruviani mihi erunt gratissimae, ut sit ad manus cui fidi possit, si quid incidat. Pretium statim reddi curabo. Ipecacuanham puto multo minore pretio ex Gallia obtineri posse. Inquiram tamen de herba Paraguay; cura quaeso, ut circa usum efficaciamque accuratiora discamus.

Dabam Hanoverae $\frac{8}{18}$ Martii 1696.

P. S. Accepi etiam Acta Februarii proximi Lipsiensia, in quibus relationem de Libro Nieuwentitii, tuamque ad ejus objecta responsionem reperio, quam prorsus probo.

In relatione ipsa notatum video non immerito, interesse Reipublicae Literariae discentiumque inprimis, ut consentiant Viri Docti in easdem notas. Quare velim audire sententiam tuam, an probes mecum adhiberi notam $\int$ pro summis, ut adhibetur nota d pro differentiis; item an approbes meam rationem exhibendi subinde divisionem per duo puncta, verbi gratia, ut a : b idem sit quod $\frac{a}{b}$, id enim praesertim in typis commodum est, ne linearum spatium amittatur. Et constat proportiones a nonnullis solere tali ratione exhiberi a : b :: c : d, cum revera res redeat ad quotientium aequalitatem, sufficit scribi meo more a : b = c : d seu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Sunt et alia in notis fortasse utiliter observanda, de quibus alia occasione.

XXVI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Vellem tandem disceptationum nostrarum finem videre (quod et ipse haud dubie desiderabis) praesertim cum summam rei non spectent, in qua utique convenimus; sed ut Tibi cedam et discrepantias meas mittam, quae in aliquibus circumstantiis mihi supersunt, dispiciendum nobis potius erit, qua ratione unitis viribus veritatem adeo claram ab Antagonistarum telis vindicare possimus, quanquam interim Te solum hujus veritatis primum detectorem eidem defendendae plus satis parem putem. Noli quaeso verba sincere utut imprudenti mihi elapsa, ita inique interpretari, quasi Te cujusdam iniquitatis arguam; absit hoc procul; novi Tuam ingenuitatem, quam cum profunda Scientia et Eruditione conjunctam habes; optarem ut Tibi satis innotesceret, quanti Te aestimem, quam longe Te omnibus, qui Mathematici, Physici, Philosophi audire volunt, praeferam; quam crebro unicum Leibnitium in ore habeam apud omnes, quibuscum quotidie conversari datur. Interim etiamnum sententiam meam tueor, duas nimirum quantitates fluidorum aequivelocium incurrentium in duo corpora aequalia, illis inferre vires, quae sunt in ratione quantitatum fluidorum. Sed hic suppono quantitates fluidorum infinite parvas esse respectu corporum, in quae incurrunt (uti revera supponi debet, hoc enim simili usus sum ad explicandum impulsum momentaneum materiae gravificae, quae utique quolibet tempusculo nonnisi infinite parva sui portione in grave impingit) adeoque fluida totam suam vim transferre in corpora, siquidem particulae fluidi ob continuo alias subsequentes post impulsum quiescere censendae sunt. Hac itaque ratione assertum meum non poterit in dubium vocari. Fluido enim A incurrente in corpus L, ipsique totam suam vim inferente, et fluido priori simili et aequiveloci B, incurrente in corpus M aequale corpori L, huicque pariter totam suam vim imprimente, erunt dubio procul vires productae in corporibus L et M (licet etiam L et M non essent aequalia) ut vires fluidorum ante impulsum, utpote ipsis aequales, adeoque ut magnitudines fluidorum; quis enim dubitabit de eo, quod fluidorum homogeneorum et aequivelocium vires sint ut magnitudines eorum? cum hic evidens sit repetitio non modalitatis, sed

realitatis. Vides ergo exemplum Tuum corporum solidorum non infinite parvorum in alia corpora quiescentia incurrentium huc non quadrare. Interim (ut haec obiter dicam) festinando errorem calculi admisisse hic videris. Dicis enim: si globus A, 1, celeritate 1, incurrat in globum L, 1, quiescentem, accipiet globus L celeritatem 1, hoc verissimum est; si vero globus B, 2, celeritate 1, incurrat in globum M, 1 quiescentem, accipiet globus M celeritatem 4: puto globum M accepturum esse celeritatem $\frac{4}{3}$, secundum regulas communicationis motus novo principio superstructas, quarum formulas in praecedentibus meis exhibui, quasque ex iisdem aequationibus eliciebam, quas in ultimis Tuis exprimis, compositis nempe legibus virium absolutarum et directionis conservandarum: ergo vires impressae ipsi M non multo plus, sed paulo minus quam duplae sunt earum quae impulsae sunt ipsi L.

An actio materiae graviticae per ictus discretos, an vero per pressionem continuam explicari debeat, amplius haud disquiramus; sunt enim tantum diversi modi unam eamdemque rem contemplandi, qui si dextre adhibeantur, nullus dubito, quin idem concludant. Sed inexpectatam mihi affers distinctionem inter ictum esse aeque fortem, et inter eamdem in percusso produci potentiae quantitatem, quae duo, ut fatear, eadem putabam, considerando ictum fortiorem vel minus fortem tanquam percutientis effectum, qui est aequalis quantitati potentiae productae in percusso. Miror quod non jam diu hanc distinctionem protuleris in responsione ad exemplum meum testudinis, ubi aequalitatem ictus, quam nunc concedis, aperte satis negare videris. Sed quidquid sit, status controversiae nunc huc redit, an duo corpora aequalia, sive in motu, sive in quiete constituta et aequefortes ictus recipientia recipiant etiam aequalem vim vel potentiam. Tu id negas, ego vero, etiamsi ratio mihi contrarium dictitet, in suspenso haereo propter id ipsum quod negas; malo enim inposterum mihi ipsimet diffidere, quam a Te dissentire. Et propterea optarem meas difficultates a me non acciperes tanquam ab adversario, sed potius tanquam ab amico, qui quid ab adversario fieri possit, sincere monet. Hoc saltem explicatum mihi vellem, quid aequefortiter ferire sit aliud nisi eamdem vim imprimere, alias de ictu non habeo conceptum clarum atque distinctum.

Multum gaudeo, quod monitum meum ad Tuam aestimationem resistentiae absolutae tam benigne exceperis; diu enim haesitabam, an e re esset talia a Te jam olim prolata insinuare, veritus ne Tibi importune caderent eorum denuo recordari. Unde vides me amore veritatis ductum interdum monere quaedam, de quorum licet eventu, an nimirum grata sint futura, ipse dubitem.

Optime praevides elusiones Dni. Papini, ad quas in antecessum se praeparare videtur, eo ipso quod verba Tua intempestive satis pervertit, mutando vim in motum, quasi nescires quale intersit discrimen, cum tamen in hoc praecipuus controversiae cardo versetur. Sic nec ego consultum duco eum corrigere et in meliorem viam redigere velle, cum oleum et operam perditurus esses, quam utilius collocabis, meo judicio, si rem totam bono Reipublicae Literariae publice exponeres, non quidem sub forma responsionis, hoc enim Papinum silere non faceret, sed potius praemoneres Lectorem, Te traditurum relationem historicam totius controversiae et simul explicationem difficultatum hactenus propositarum, alias autem novas Te a nemine expectaturum, sed totum negotium ad judicium Lectoris remissurum, ne tempus Tibi adeo pretiosum litigando inutiliter pereat.

Me sane immerentem severa nimis censura perstringis, retundendo nescio qua indignatione objectionem adeo amice factam contra argumentum Tuum a priori, cum tamen ab initio objectionis diserte dixerim, eam non a me, sed ab adversario proficisci putandum esse. Sed quid multum! Inventorum Tuorum sum praeco, ubicunque datur occasio; quid ergo succenses, si ut eorumdem veritatis defensor esse possim, a Te difficultatum enodationem subinde peto, qua adversariis obviam ire queam. Quidquid sit, si objectiones meae vel minimum offendant, impone mihi silentium, et compescam luxuriantem calamum, ne forte praecipitem sententiam ferat, quae me attentionis defectus reum faciat; dico forte, divinare enim non possum, an argumentatio quaedam Tibi sit obiter elapsa, an vero a pluribus annis considerata; sumus homines et erroribus obnoxii; si ergo in aestimanda resistentia absoluta et fortasse in aliis paralogismus Tibi excidere potuit, quidni et idem hic contingere potuisset. Sed ut videas quod res est, exponam paucis causam, quae me fecit prendre le change; id quod credebam fuisse legitimam retorsionem. Sumebam terminos, virtualiter

et formaliter, alio sensu quam eo, quo nunc eos explicas et quidem non sine omni ratione: etenim per actionem virtualem intelligebam vim ipsam vel virtutem rei agentis, et hoc sensu praemissa mea secunda, quam negas, erit verissima: Actio faciens duplum, tempore duplo, est simpla virtualiter actionis facientis simplum, tempore simplo, id est, eadem vis vel virtus corporis requiritur ad percurrendum spatium duplum, tempore duplo, quae requiritur ad percurrendum spatium simplum, tempore simplo: utroque enim in casu celeritas corporis et proinde etiam potentia est eadem. Et per actionem formalem intelligebam effectum jam productum, ut via quaedam manet semper ejusdem longitudinis, sive sit unica, sive sit unica sive duabus horis percursa; hocque sensu praemissa mea prima alterius retorsionis erit etiam vera: Actio faciens duplum, tempore simplo, est simpla formaliter actionis facientis idem duplum, tempore duplo; id est, spatium percursum intra minutum unum a corpore celeritatis duplae est aequale spatio percurso intra minuta duo a corpore celeritatis simplae. Vides itaque me non ita locutum fuisse, ac si propositiones possent assumi pro arbitrio, sed omnia mature expendisse, antequam Tibi ea perscripsissem. Interim Tua responsio mihi nunc plene satisfacit eoque proin acquiesco; video enim, quid duo isti termini Tibi significent. Caeterum argumentatio Tua mihi videtur elegantissima et publico non amplius invidenda; multum enim ponderis tribuet argumentis a posteriori.

Quae de conservanda non solum virium motricium, sed et directionis quantitate, vel quod idem est (me divinasse ais, quamvis non casu, sed industria eo pervenerim) de conservato semper progressu centri gravitatis habes, omnino mihi placent. Et memorabile imprimis est, quod lex tertia conservandae celeritatis respectivae ejusdem seu ejusdem differentiae celeritatum ante et post cursum, quae alias, uti bene notas, ex vi elastica concurrentium ostendi potest, tam pulchre ex duabus praecedentibus tanquam corollarium fluit: qui consensus non parum confirmat principium conservationis quantitatis virium. Alia procul dubio arcana sub his latent. Putem ergo alias posse condi leges quam plurimas, si loco divisionis adhibeamus multiplicationem, multiplicando scilicet aequationem (1) per aequationem

(2) vel (3), ut quae provenit iterum per unam inferiorum, quod in infinitum continuari potest. Propositionem ex conservato progressu centri gravitatis decerptam, quam Hugenius jure merito ex profunda meditatione ortam dixit, et quam ante aliquot annos Diario Parisino inseri curasti, mihi sine mora communicaverat Dnus. Varignonius, cujus demonstrationem etiam tunc e vestigio inveneram. Sit enim (fig. 54) mobile A, tendens simul celeritatibus et directionibus AB, AC, AD, AE etc. et sit AF directio et celeritas mobilis A, qua fertur ex motu composito: dico AF (productam) transituram per centrum commune gravitatis G punctorum B, C, D, E etc. et esse ad AG, ut numerus punctorum ad unitatem. Motus enim particulares BA, CA, DA, EA etc. intelligi possunt tanquam compositi ex collateralibus $B\beta$ et Bb, $C\gamma$ et Cc, $D\delta$ et Dd, $E\varepsilon$ et Ee etc.; quoniam itaque $FA\gamma$ est directio motus compositi, erunt celeritates affirmativae aequales celeritatibus negativis, id est, $B\beta + C\gamma$ etc. $= E\varepsilon + D\delta$ etc. Ergo, ut patet ex Staticis, $FA\gamma\delta$ est axis aequilibrii seu transit per centrum gravitatis punctorum B, C, D, E etc. Porro quia Bb, Cc, Dd, Ee etc. sunt parallelae AF, erunt celeritates partiales simul sumtae Bb + Cc + Dd + Ee etc. = celeritati compositae AF: est autem, ut iterum constat ex Staticis, Bb + Cc + Dd + Ee + etc. ad AG, ut numerus punctorum B, C, D, E etc. ad unitatem. Ergo etc. Q. E. D. Hinc ultro sequitur, si mobile A sit in ipso centro gravitatis G constitutum, et sollicitetur a potentiis AB, AC, AD, AE etc. secundum directiones AB, AC, AD, AE etc. mobile A mansurum in quiete, cujus generalissimi theorematis illud tantum est casus specialis, quod apud Hugenium aliosque me legisse memini, nimirum si corpus in centro gravitatis trianguli vel etiam pyramidis triangularis cujuscunque constitutum tendatur a potentiis secundum directiones linearum ab angulis ad centrum ductarum in earundemque ratione, corpus illud neutrorsum motum iri et proinde quieturum. Ex hisce autem patet, non solum hic, sed in omnibus aliis centrum potentiarum (ut ita loquar) esse idem, quod centrum gravitatis. Hoc enim triangulo et pyramidi triangulari proprium est, quod eorum centrum gravitatis sit etiam centrum gravitatis punctorum angularium.

Concedo resistentias medii respective resistentis esse ut quadrata celeritatum mobilis, si per resistentias intelligantur decrementa celeritatum; sed si per resistentias intelligamus (quod meo

judicio etiam sic intelligendum est) decrementa virium mobilis quovis tempusculo amissa, erunt citra omnem controversiam resistentiae ut cubi celeritatum.

Meditationes meae, ut vocas, de centro oscillationis non quidem sunt multae vel magni momenti; interim uno theoremate totam doctrinam pendulorum complecti possum, quod cum Hugenianis optime conspirat; neque considero centrum gravitatis, quod Hugenius aequaliter descendere et ascendere supposuit, sive corpora separatim sive conjunctim oscillentur, sed assumo novum Tuum principium de conservatione ejusdem quantitatis virium, ex quo deinde principium Hugenianum tanquam consectarium deducitur: Sit enim (fig. 55) pendulum HA, compositum ex quotvis gravibus A, B, C etc. perticae rigidae et nullius gravitatis HA affixis, et agitatum circa centrum H: quaeritur longitudo penduli simplicis et isochroni HG. Ponantur distantiae gravium penduli compositi AH, BH, CH etc. aequales a, b, c etc. et distantia penduli simplicis $GH = x$. Postquam nunc pendulum descendit, quantum descendere potest, nempe in situm verticalem, erunt celeritates punctorum A, B, C etc. G, ut a, b, c etc. x: ergo quantitas virium gravium A, B, C etc. erit $Aaa + Bbb + Ccc$ etc. Consideramus jam corpora A, B, C etc., non amplius perticae affixa, sed quodlibet in sua distantia separatim oscillari circa H, erunt per naturam gravium descendentium jam notam et receptam, celeritates gravium A, B, C etc. quando in situm verticalem venerint, $\sqrt{ax}$, $\sqrt{bx}$, $\sqrt{cx}$ etc. suppono enim celeritatem puncti G esse x. Ergo hoc modo quantitas virium gravium A, B, C etc. erit $Aax + Bbx + Ccx +$ etc. Quoniam autem utroque modo suppono eamdem virium quantitatem esse, erit $Aaa + Bbb + Ccc +$ etc. $= Aax + Bbx + Ccx +$ etc.: et proinde $x = \frac{Aaa + Bbb + Ccc + \text{etc.}}{Aa + Bb + Cc + \text{etc.}}$ Atque haec nunc est propositio fundamentalis, quam Hugenius in suo Tractatu pag. 100 operose admodum et per deductionem ad absurdum justo majoris minorisve ascensus centri gravitatis (quod ego ne considero quidem) demonstravit. Ex qua omnia caetera theoremata Hugeniana facillime eliciuntur, adeo ut etiam hinc veritas novi principii patescat, quia cum Hugeniano tam mirifice convenit. Liquet etiam ex hac aequatione centrum oscillationis illud ipsum esse, quod vulgo statuitur percussionis.

Haud mediocriter Tibi sum obstrictus, quod Dno. Menckenio

integritatem meam tuo testimonio comprobatam reddere volueris. Paucis abhinc diebus Acta Eruditorum, inter quae etiam mensem Decembr. superioris anni accepi; non possum non magnopere mirari Fratris mei animum atro nimis livore contra me etiamnum obsessum; credebam equidem discessum meum omnia expiasse et propterea statim sub adventum meum hinc ad illum scripsi quam humanissime, ut eo facilius cum illo in gratiam redirem, sed nondum respondit et nunquam illum responsurum puto: quin potius contrarium nunc video; an nondum in illo mense legisti, quam acriter nescio qua simultate et aemulatione agitatus contra me scripserit, quam abjecte de me loquatur? Utique non dignabor illum responsione, ut Tuae et Dni. Menckenii admonitioni locum dem; quid enim responderem ad cavillationes, ad nugas, ad ineptias insulsissimas quibus totum ejus schediasma scatet. Interim mihi pergratum foret, si data occasione Tu ipse meam causam suspiceres et oblique insinuares, quod de fratre et quod de me Tibi constat, ut Lectores cernerent, quid de utriusque animo sentiendum, et ab illius ineptiis non statim praeveniantur. Quid quaeso quaerit p. 546 cum historiola sua? Quid per illam Lectori seritur aut metitur? Vel qua necessitate et occasione adducit eam? nisi forte ut suam in resolvendis problematibus promtitudinem mirum quantum extollat, me vero quantum possit deprimat. Interim si dicendum quod res est (Dn. Hospitalius mihi testis erit) aequalitatem $a\,ds\,ddx = dy^3$, ad quam pervenerat, non potuit resolvere et ad finem producere, utut per annum vel plus ipsi inhaeserit, ceu ex literis ejus ostendere possum, donec illam mihi tunc Parisiis commoranti communicatam (ut nempe constructionem ejus tentarem) e vestigio resolvissem et vidissem, curvam hujus aequationis eandem esse cum catenaria. Quam solutionem cum fratri remisissem (non obstante quod D. Hospitalius mihi suaderet, eam paulisper tegere, et illi tantum significare me solutionis fuisse compotem, ut viderem an illam etiam repererit) mox rescripsit, se etiam ante acceptas meas literas incidisse in curvam catenariam, quam inventionem tanquam suam protinus Lipsiam misit. Nunc Tibi judicandum relinquo, an veresimile sit, fratrem praecise eo tempore quo literae hinc inde currebant praestitisse, quod antea per totum annum praestare non poterat; annon potius sit probabile, meam solutionem sibi arrogando plagium commisisse. Sed vide hominis impudentiam in aliis; pag. 540 dicit: q u i n i m o g e n e r a l i s e s t n a t u r a c o n d e s c r i p t a r u m , u t i p s a r u m

vel aggregatum vel differentia ad arcum circuli reduci possit, quod etiam fratri observatum video; numquid ut ejus verbis utar, haec sunt ova post prandium; quasi ille hanc condescriptarum proprietatem tanquam aliquid obvium et quod publicari non meretur, diu ante me observaverit, dum dicit quod etiam fratri observatum video. Quid sibi hic vult τὸ etiam? Tantum non post me; sic est, invidet mihi inventi gloriam, dum tam dolose reticet, quod sub discessum meum hanc condescriptarum naturam a me didicerit, quae alias nunquam sibi in mentem venisset. Quod si utile hoc inventum nondum publicassem, non dubito quin se ejus primum auctorem dixisset, et longe pomposioribus verbis praestantiam depraedicasset, quemadmodum idem fecit cum suis formulis pro invenienda longitudine radii circuli osculatoris, quas tamen nemo non mediocriter in nostris versatus facillime elicere potest. Nunc autem cum jam a me publicatum extet, vix dignum censet, ut obiter et vix tribus verbis de illo tanquam jam pridem sibi cognito loquatur, cum tamen et Tibi et Dn. Tschirnhausio multum placuisse ex Actis videam. Haec omnia condonari possent fratri, si modo pag. 550 omnes modestiae leges non transgrederetur et malitiosissimam impudentiam indueret. Ecce quam rustice simul et jejune me ludat! Non puto ex faece plebis homines incomptius agere posse; quid inficetius dici potuisset quam me ova post prandium apponere? O insipida ova! Ac si aliquid novi esset quod solutio prior tempore quam alia, tardius tamen lucem videat. Interim, cave, putidum hoc proverbium etiam in Te quadrabit, si per illud intelligat, se primam dedisse solutionem problematis isochroni ope suae elasticae sibi soli tantopere laudatae, et proinde se ova ante prandium apposuisse; Tua enim solutio erat etiam posterior. Sin autem velit dicere id se peculiare ante me fecisse, quod curvam isochronam per rectificationem curvae algebraicae constructam ante me in Actis publicarit, tunc ipse non minus ova post prandium apponit. Nam constructio Tua per curvam algebraicam omnium prima in Actis prodiit. Nunc Tibi rem gestam una cum causa, cur mea solutio uno mense tardius, quam secunda solutio fraterna in Actis apparuerit, narrabo, ex quibus nequitiam fratris mei nunquam satis miraberis. Cum primam ejus solutionem curvae isochronae quae m. Junio 1694 inserta est, ibidem praeter expectationem reperissem (nesciebam enim antea, quod de hoc problemate quicquam Lipsiam misisset) non nego, occasionem illa

dedit mihi, sicuti et haud dubie Tibi, quaerendi aliam constructionem naturaliorem et quae perageretur ope rectificationis curvae algebraicae, non autem transcendentis illius fraternae, quae ipsa constructa difficillima erat et supponebat quadraturas spatii. Quid multum? meditor, calculo, in mentem revoco quae olim super hac materia mihi obveniebant; uno verbo intra unius horae spatium plenariam solutionem invenio et plus quam antea sperabam, nam non solum detexi modum construendi isochronam per extensionem curvae algebraicae, sed ipsam etiam ejus elasticam ad extensionem ellipticae et ejusdem curvae algebraicae reduxi, quod frater non nisi per operosam quadraturam fecerat. Ab eo momento constitui novam hanç solutionem in Actis publicare, sed quid accidit? Aperio meum inventum cuidam amico significans ipsi, me reperisse solutionem curvarum isochronae et elasticae mediante extensione communis curvae algebraicae, amicus iste paulo post fratrem in aedibus suis conveniens eidem omnia innocenter refert, quae super hac re sibi dixeram: frater, his vix cito satis perceptis, se problemati de novo applicat et tandem genuinam solutionem eruit. Dum ego omnium horum ignarus solutionem meam lente scriptis mandabam, dum scriptam affini meo qui iter meditabatur in Germaniam et primum ad nundinas Francofurtenses per tres septimanas ibi commorandum proficiscebatur, tradebam Lipsiam deportandam; frater ut callide me praeveniret, quantum potuit festinavit et novam solutionem per cursorem publicum Lipsiam misit. Hinc quid mirum? Fraternum schediasma quod tardius Basilea emissum, citius Lipsiam appulit, meum vero citius profectum tardius pervenit. Certe si Dn. Menckenius vellet horum recordari et in literas nostras inquirere, videret meas literas vetustiores esse meisque proin verbis facile fidem haberet. Sed prolixum nimis foret et Tibi molestum, si omnes technas, omnia artificiola vellem recensere, quibus utitur ad nocendum mihi meaeque famae. Vides ipse satis, nihil a mordaci suo dente intactum relinquere quod a me in lucem est editum. Nunc hoc, nunc illud non placet, dicit meam methodum construendi aequationes differentiales sine separatione indeterminatarum nihil valere et nullius usus esse, nihilquè ibi me habere, quod non antea a Te fuerit praestitum; ac si nihil sit novi, quod ibi ostendi, omnes curvas etiam transcendentes quae eidem aequationi differentiali satisfaciunt, habere certa quaedam puncta ut flexus contrarios, quae semper sunt

in curva algebraica. Ne quidem innocua mea series universalis pro quadraturis et rectificationibus quae Tibi tantopere placuit, impune abiit: dicit p. 551: Sed nec series, alias satis ingeniosa (quam coacte!) quam nobis dedit, hic in usum verti potest: quod tenendum, ne quis existimet haec adeo universalia esse, ut nihil amplius desiderari possit. Quis, obsecro, venditavit hanc seriem pro separandis indeterminatis in aequatione differentiali? Qualis affinitas inter separationem istam et inter quadraturas et rectificationes, pro quibus solis illam excogitavi, quamvis interdum etiam commode ad alia possit applicari; proponat nunc mihi exemplum quadrandi spatii vel rectificandae curvae, sive indeterminatae in aequatione differentiali sint separatae sive non separatae, ubi series ista non succedat. Certe si unquam generale quid inventum sit, poterit haec mea series nomen generalitatis summo jure obtinere. Sed caetera transeo petoque veniam mearum querelarum, quas quia id publice facere verecundia prohibet, Tibi, homini candido, exponere ausus sum, iterum rogans ut si quid commode fieri possit, mei quondam defensionem suscipias, ne forte qui istas nugas legunt, sequiorem de me capiant opinionem. Interim Tuo prudenti consilio omnia relinquo, optime ipse perspicies qua ratione id commodissime fieri possit.

Gratias ago pro communicatione descriptionis antidysenterici. Praeterita septimana accepi pro Te tres libras corticis Peruvianae; indica viam qua illas optime Tibi transmittere possim. Nunc pharmacopola Amstelodamensis offert Ipecacuanham pro longe viliori pretio, nempe 80 a 90 flor. Holl. De usu ejus, ut et herbae Paraguay, et modo obtinendi, nihil sibi innotescere dicit: curabo tamen ut id aliunde discam. Noster Professor Medicinae Praticae asservat, se in se ipso periculum fecisse herbae Paraguay assumendo illam satis magna dosi, sed se nihil plane virtutis emeticae persensisse, nec etiam alium vel minimum effectum habuisse.

Jam olim Tibi aperui mihi perplacere, ut adhibeatur $\int$ pro summis et me inposterum eodem signo usurum; quod autem in responsione ad objectionem Nieuwentitii vocabulum integralis etiamnum usurpaverim, id ideo factum est, quia iisdem verbis, quibus Nieuwentiit objiciebat, ego respondere volebam. Interim

non inconsultum mihi videtur, si Lectores admonerentur, idem intelligendum esse per summam vel $\int$, quod nos antehac per Integrale vel I denotare voluimus, quandoquidem haec expressio jam passim invaluit. Pariter Tua ratio exhibendi divisionem per duo puncta commodissima mihi videtur, sed ipsi assuescere difficile erit, ita ut illi qui vulgari divisioni assueti sunt, vix uno intuitu dividendum et divisorem distinguere possint; praesertim quando fractio fractionis occurrit, ut si pro $\frac{a+\frac{b}{c}}{e-\frac{f}{g}}$ scribatur $\overline{a+\overline{b:c}} : \overline{e-\overline{f:g}}$; non statim patet quid et per quod sit dividendum, praeterquam quod variae lineolae suprascriptae non minus impedimentum pariunt in typis.

Nuper novi nostri Gubernatoris Principis Nassovii Informator mihi misit Actorum Lips. an. 1690. 1693 et 1694, quos coëmit in auctione Librorum Hugenii; invenio ibi varias notas criticas breves quâs Hugenius ad marginem plumbagine scripsit, plerasque super ea quae Tu, Dominus Tschirnhaus, Frater et ego publicavimus; nec Tibi nec nobis pepercit, praesertim Fratris multa ipsi displicent. Si curiosus es, ea quae Te concernunt, Tibi transcribam. Curabo ut etiam caeteris annis potiar, ut quid de aliis senserit videam. Interim vale quam optime et ama ut soles etc.

Groningae 7 April. 1696.

Nudius tertius accepi literas a D. Marchione Hospitalio, ex quibus eum a morbo gravi restitutum intelligo. Dicas mihi, quaeso, an frater Tibi nondum scripserit, quemadmodum promiserat cum adhuc Basileae essem. Frater meus junior hinc discessit abiturus in Galliam, ubi Marchionem aliosque quos ibi habeo Patronos et amicos, salutandi copiam habebit. Si quid per eum factum cupias, fac ut ocyus resciscam, ut id per literas ei significare possim, quando Lutetiae fuerit. Non dubito quin ibi aliquandiu commoraturus sit, si stationem inveniat in Laboratorio Chymico quod ad Academiam Scientiarum pertinet, ubi strenue in Chymicis laboratur; in hunc finem accepit a me literas commendatitias.

XXVII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Nolim putes disceptationes nostras mihi ingratas esse, dummodo illustrandae confirmandaeque veritati serviant, quod vix est ut fieri non possit inter studiosos veritatis et in ea inquirenda exercitatos. Quod verba attinet, elabi interdum calore scribendi non exquisite tornata,

Scimus, et hanc veniam petimusque damusque vicissim.
Neque ergo de Tuo erga me affectu dubitavi, et nolim vicissim admonitiunculam illam ab indignatione potius (quae nulla fuit) quam ab amico animo profectam putes, quod quaedam leviore brachio tractata arbitrabar, quam merebantur, aut veritatis interesset.

Spero controversiam inter nos de origine potentiae gravibus impressae jam facilius componi posse, postquam expressa Tua verba me tandem docuerint, in quo consistat dissensus. Nempe statuis particulam fluidi gravifici totam suam vim imprimere in grave; quod si ita esset, fateor quemvis ictum gravi aequalem (circiter) potentiae gradum esse additurum. Sed ego puto particulam materiae gravificae impactam omnino repercuti, nec alias sequentes particulas id impedire. Nam non sequuntur, nisi ex intervallo, et si immediate sequerentur, unum continuum percutiens componerent, de quo rursus idem posset dici, nempe totam potentiam suam non transferre. Et vero si particulae percutientes darent totam suam potentiam, sequeretur non celeritatem, sed potentiam gravis crescere uniformiter, cum numerus ictuum sit tempori proportionalis.

Caeterum hanc rationem de translatione totius potentiae (quantum memini) in prioribus non allegaras, et ita ni fallor ratiocinationem jam mutasti. Porro si globus B, 2, celeritate 1 incurrat in globum M, 1, quiescentem, omnino est ut scribis, acquirere globum M celeritatem $\frac{4}{3}$, et negligentia quadam omisi divisionem per 3, quam calculus dabat.

Verissimum puto, etiamsi ictus sint aeque fortes, non tamen ideo sequi potentiam eamdem imprimi recipienti, quia ictus vis aestimanda est, non tantum ab eo quod contingit in percusso, sed etiam simul ab eo quod fit a percutiente. Interim puto hic nobis magis in loquendi modo, quam rebus dissensum fuisse, neque in

isto situm esse controversiae statum, sed potius in iis, quae paulo ante dixi.

Utrum adhuc reciprocanda sit cum Dno. Papino serra, intelligam ex effectu novissimarum mearum apud ipsum literarum. Publice cum ipso litigare adhuc minus operae pretium erit. Quem literae privatae non movent, is multo minus publice manus dabit. Itaque satis erit rem ipsam suo tempore exponi.

Spero Te, qua es sinceritate, ingenue agnoscere, fuisse mihi causam mirandi, quod circa τὸ formaliter et virtualiter tam a meo sensu abhorrentia dixeras; ea enim, quam indicas, interpretatio nunquam mihi venerat in mentem, nec potuissem adhibere ad scopum meum, nisi manifeste ineptiendo. Sed bene est quod ego Tibi satisfeci, et Tu mihi jus reddis. Quid videtur Tibi de altera ejusdem propositionis demonstratione? Quae paulo magis est ad formam receptam, etsi ambae conveniant in radice. Maximi mihi conclusio ipsa momenti visa est, quia hinc magnum patet arcanum Divinae Sapientiae, et corrigitur sententia Cartesii, simulque scopus, quem sibi propsuerat, obtinetur. Nam revera servatur eadem quantitas actionis motricis in mundo, si quantitas illa aestimetur ut oportet. Unde et revera dici posset eandem quantitatem motionis servari, nisi sensus hujus phrasis vulgaris, quae celeritate in molem ducta motionem aestimat, jam esset receptus. Quantitas autem actionis motricis ex hac mea demonstratione duplici conficitur esse in ratione composita ex simplice molis et duplicata velocitatis. Itaque jam a priori constat, Deum non fore facturum ex legibus perfectae Sapientiae, si ex Cartesianorum sententia eamdem quantitatem motus, ut ab ipsis intelligitur, conservaret; ita enim ipsa ratione revera non foret aequabilis.

Haud dubie non casu, sed ingenio acri divinasti vel potius penetrasti, coincidere centri gravitatis aequabilem progressum et conservationem directionis. Demonstratio etiam Tua regulae meae de compositione motuum omnino consentit cum ea, quam innui in ipso Diario, cum ederem.

Pulcherrime ostendis ex principio nostro, velut ictu, confici propositionem Hugenii fundamentalem de pendulis; ita alterum alterius testimonio confirmatur et illustratur.

Laudabiliter facis, quod moderationem erga Dn. Fratrem ostendere decrevisti. Libenter aliquando, data occasione, testimonium

(quo non indiges) dabo, secundum meam de candore Tuo et circa ea ipsa, de quibus inter vos lis est meritis, sententiam. Quidni enim Tu ex merito laudari possis, nullo ipsius detrimento, imo potius cum ipsius honore, cum ipse Te primum ad haec studia formaverit?

Dnus. Nieuwentiit voluit replicationem ad responsionem meam mittere Lipsiam in Actis Eruditorum edendam; sed cum constaret illa nescio quot plagulis, Dnus. Menckenius id declinavit, excerpta tamen inserere obtulit. Scripsi illum admonendum videri, ut etiam Tibi respondeat eadem opera, quo inanes repetitiones evitentur; quin imo, ne frustra publico obstrepatur, recte meo judicio factum, si Tibi vicino scrupulos suos per literas communicet. Nam non video, quid ejus methodus peculiaris, quam laudat, praestare possit, cum pars sit ex nostris descripta, pars ex iis non intellectis enata.

In notandis calculis ad usum typorum decrevi pro lineis vinculorum imposterum uti commatibus directis atque inversis in vim parenthesium: ita non interrumpetur typorum series nec spatium amittetur, et tamen omnia (ni fallor) accurate habebuntur. Velim tamen prius Tuam audire sententiam. Exempli causa, Tuum

$$\frac{a+\frac{b}{c}}{e-\frac{f}{g}},$$

quod quinque typorum lineas minimum postulat, sic poterit scribi: ‚a +‚b : c, : ‚e —‚f : g,,: possent tamen inversa commata omitti, scribique a + ,b : c,, : e—,f : g,, quod et facere soleo et communiter sufficere potest. Sed tamen designatio quasi parenthetica per commata includentia est absolutior tutiorque interdum; praesertim si pro commatibus adhibeantur verae parentheses, ne commata inversa confundantur cum littera c, exempli gratia in eodem casu ista stabit $(a+(b:c)) : (e-(f:g))$.

Pergratum fuit, quod nuntias de notatis Domini Hugenii marginalibus in Acta Eruditorum. Rogo ut omnia describi cures, sive me sive alios concernant, mihique communices, libenter expensas reddam. Initio parum favebat methodis nostris, quod fructum earum, sua amicorumve experientia, nondum didicisset, quod nec in suis ad me prioribus dissimulavit; sed postea rectius doceri coepit, et cum in literis privatis, tum in schediasmate quodam inter Acta Lipsiensia publicato, candide pronuntiavit, quod res

est. Non dubito tamen, quin quaedam ab ipso recte admoneantur. In scheda De Resistentia error quidam ex festinatione admissus erat circa quandam propositionem; hunc cum in aliqua epistola ad ipsum, data occasione emendassem, respondit sese idem pene totidem verbis, ibi ad marginem Actorum notasse.

Gratias ago pro cortice redemto: rogo indicari pretium, ut reddi curem. Fasciculus mihi inscriptus poterit transmitti ad Dn. Gerardum Meierum, celebrem apud Bremenses Theologum, amicum meum; unde facile postea accepero. Herbam Paraguay quae apud amicum Tuum nihil effecit, suspicor genuinam non fuisse. Eaque res inprimis deterret a talibus redimendis. Unde et melius Ipecacuanham probatam ex Gallia nancisci licebit, inque his poterimus Dni. Fratris Tui favore uti, Te commendante, per quem fortasse et alia egregia resciscere licebit, quanquam in Chymicis non multum sit Gallis tribuendum. Itaque ipse admonendus est, ne nimis sit facilis in suis ostendendis, cum enim religio obstet, ne stabile quid in Gallia sperare possit. Enchiresibus potius sese commendabit, quam arcanis, nisi alia pro illis accipiat. Sed hoc Tibi in aurem. Caeterum cum tot amicos egregios illic habeas, me non indiget; si quid tamen sit, in quo inservire possim, faxo ut semper intelligat, quanti vos faciam. Vale etc.

Dabam Hanoverae 15 Mai. 1696 (ex itinere reversus).

XXVIII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Nostra Controversia omnino naturam referre videtur duarum linearum asymtotorum, quae quidem magis ac magis convergunt, nunquam tamen coincidunt: sic discrepantes nostrae opiniones, tractu temporis, continuo sibi invicem propius accedunt, ut nunc parum distare et imposterum minus distiturae videantur, ita tamen ut nunquam non aliquid scrupuli inter se relicturae sint; sed praestat continuationem asymtoticae nostrae liti praescindere, quam in infinitum disputando diminuere, sed nunquam adimere differentiam, quae jam fere insensibilis est. In hunc finem historice tantum (minime vero ut objiciam) modum proponam, quo particula fluidi

gravifici totam suam vim (cum nostram disputationem ad exiguam hanc particulam nunc redactam esse ipse agnoscas) gravi imprimere concipi possit. Hanc enim translationem totius potentiae, quam in penultimis meis me non allegasse adeoque in ultimis ratiocinationem mutasse dicis, semper innuere volui, et sic verba, non autem ratiocinationem mutavi. Utique Tecum puto, particulam illam repercuti, si statuatur postvenientes non nisi ex intervallo sequi, et illam quae nunc impingit, simulac impingit libere et sine ullo impedimento resilire posse. Verum considera, si placet, annon anfractus et sinuositates pororum corporis gravis possint esse in causa, ut particula materiae gravificae post impulsum, non ita facile corpus penetrare et ab eo separari queat, quin potius aliquantisper in poro quasi intrusa et infixa manere cogatur adeoque tota ejus vis a corpore absorbeatur. Quid si testudinis exemplum iterum proferam? recipit sane totam vim globi a sclopeto ipsi injecti, si nempe post ictum in carne ipsius haereat nec aliorsum evadat; atque hac ratione non video, quale discrimen intersit, sive testudo moveatur sive quiescat; utrovis enim casu exhaurit totam vim globi, nisi dicatur aliquam ejus partem impertiri materiae ambienti, quam autem hic excludo, supponendo motum illum in vacuo fieri. Praeterea ut ad rem nostram redeamus, materia gravifica cum sit subtilissima et omnia sint plena, procul dubio unum quid continuum constituit, in tantum ut ejus particulae, non ex intervallo, sed immediate sequi debeant. Demus vero et hoc, materiam gravificam non esse continuum quid, saltem ejus particulae erunt aequaliter disseminatae, adeoque si non agat per continuam pressionem, erit tamen numerus ictuum, non tempori, sed spatio proportionalis. Et hoc est quod hactenus impedivit, quominus huic opinioni assensum dederis, quia credis cum Galilaeo omnio necesse esse, ut numerus ictuum sit tempori proportionalis; si hoc esset, et ipse faterer meam opinionem non posse subsistere, quia tunc corporis cadentis celeritates non crescerent uniformiter secundum tempora. Sed jamjam videbis, quam pulchre haec uniformitas ex ipsa mea hypothesi, quae Galilaei omnino est contraria, sequatur. Qua in re idem fere mihi contingit quod olim Fermatio contra Cartesium de refractionibus disputanti, qui per rationem, utut Cartesianae directe oppositam, ad easdem tamen a Cartesio stabilitas refractionum leges pervenerat. Ostendo itaque

1. quomodo concipi possit, particulam materiae gravificae totam

suam vim transferre in grave; 2. quod numerus ictuum sit in ratione spatiorum, id est, quod grave ascendens vel descendens recipiat ictus, eodem tempusculo, proportione celeritatis (sunt enim spatiola percursa eodem tempusculo ut celeritates). Uniformitatem seu aequalitatem accretionis celeritatum secundum tempora sic demonstro. Esto (fig. 56) altitudo descensus AB, quae dividatur in partes aequales Aa, ab, bc etc. erunt per Lemma 2um numeri ictuum per Aa, ab, bc etc. etiam aequales. Atqui per Lemma 1um grave recipit totam vim particularum gravificarum; ergo augmenta virium gravis in singulis punctis a, b, c etc. successive existentis sunt aequalia, id est, si ae, bf, cg, dh etc. denotent vires acquisitas, erunt ae, if, lg, mh etc. elementa aequalia, et proinde AC est linea recta. Nunc, quia Tecum mihi res est, suppono principium tanquam a priori demonstratum, vires acquisitas esse in ratiene duplicata celeritatum. Applicentur itaque $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ etc. quarum quadrata sint ut ae, bf, cg etc. seu ut Aa, Ab, Ac etc. denotabunt $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ etc. celeritates acquisitas. Est autem, uti patet, curva $A\alpha\beta$ parabola. Ex quo sequitur etiam illam curvam, cujus applicatae denotant tempora impensa, esse parabolam, adeoque celeritates esse ut tempora seu crescere aequabiliter secundum tempora, id est, tempusculo aequali aequalem addi celeritatis gradum. Q. E. D. Meam nunc opinionem clare exposuisse sufficiat; si eam pro vera non agnoscere velis, per me licet, Tibi nullam inde movebo litem; vides saltem, quod omnino consentiat cum legibus descensuum a Galilaeo stabilitis. Ex eo enim quod posui, totam vim particularum gravificarum transferri in grave et numerum ictuum esse ut celeritates eodem tempusculo, idem sequitur scilicet acceleratio uniformis, quae deducitur supponendo vim particularum non totam transferri, et numerum ictuum esse ut ipsa tempuscula; adeo ut nequaquam videam, cur natura hac potius agendi via utatur, quam vero illa. Et sane nescio annon probabilius sit dicere, materiam gravificam continuo exercere vim suam in grave; ubicunque enim grave cadendo existat, ibi offendit particulam, cujus vim recipit. E contrario quidquid faciam, non possum concipere, qui fieri possit ut materia gravifica singulis tantum momentis ictum faciat. Quid quaeso facit inter duo proxima momenta? ocyaturne? Cessatne agere? Annon ubique et semper praesens est et praesto ad removendum obstaculum, quandocunque motui suo celerrimo occurrit? Quid clarius, quam quod posita causa, ponatur effectus?

Cum ergo materia gravifica continuo sit in actione, non interruptim nec per intervalla temporis (comme font les bouffées de vent), quid impedit quominus grave eam actionem semper et ubique persentiscat (si sentire potest). Ignosce prolixo mihi, non credebam tot de hoc verba facere; quia autem ab initio declaravi me meam opinionem, vel si mavis, meum explicandi modum circa originem potentiae gravibus impressae simpliciter expositurum, ut imposterum altercationibus supersedere possimus, non aegre feres, quod forte longius a calamo scripturiente abreptus fuerim, quam fecissem si inter scribendum (uti decebat) patientiae Tuae rationem habuissem.

Antequam hanc materiam omnino deseram, dissimulare non possum, quod quo attentius hactenus dicta considero, eo magis in mea opinione confirmor. Commodum, hoc ipso instanti, mihi incidit simile: Concipio aliquod medium instructum infinitis spiris elasticis vel aliis elastris aeque fortibus aequaliter disseminatis, vel (quod praestat) immediate juxta se positis; ista elastra tali artificio tensa suppono, ut ad appulsum alicujus corporis a retinaculo liberenta subito resiliant simulque vim suae elasticitatis integram corpori appellenti tribuant, quod facile concipi potest, si modo statuatur elastrum incomparabiliter celerius restitui, quam corpus movetur. Nunc in isto medio concipio corpus aliquod a minima vi qua nempe pollet unum elastrum moveri incipere; sic retenta vi primi elastri progrediens offendit secundum, cujus vim pariter recipit: postea retentis duobus virium gradibus, progressu suo accipit tertium, tunc quartum, quintum, sextum etc. et quidem hi gradus virium ex aequali intervallo non tempusculorum, sed spatiolorum superaccedunt: Dico hoc corpus in isto medio nihilominus secundum tempora uniformiter accelari, id est, ea lege, qua Galilaeus grave cadendo accelerari asseruit; id quod ex demonstratione superiori luculenter apparet. In tantum ut si nolis materiam gravificam juxta meam explicationem operari, tamen dicere tenearis, illam ita operari possibile esse, salva manente uniformitate accelerationis per tempora aequalia, nullamque rationem apparere, cur communis explicandi modus, qui et Tuus est, alteri meo sit praeferendus, cum satis supra ostenderim, quo modo fieri possit, ut particula materiae gravificae totam suam vim transferat in grave; et contra quam magnae incongruitates se prodant, statuendo ictus procedere secundum tempuscula. Sed haec Tuae attentioni commendo; forsan ex ipsis aliquid utilitatis capies, praesertim postquam mentem prae-

occupatam hactenus, quasi mea opinio opinioni ubique receptae de uniformitate accelerationis e diametro opposita fuisset, cum tamen illam mirifice confirmet; postquam, inquam, hanc praeconceptam mentem exueris, quae forte fecit, ut meas rationes hucusque allatas nunquam serio perpendisses.

De ictus quantitate nihil amplius urgebo, quia jam nihil facit ad controversiam. Nondum tamen clare patet, quomodo ejus vis aestimanda sit, si, ut innuis, impressio potentiae non sit proportionalis ictui. Memini me, apud Ignatium Gastonem Pardies in discursu De motu locali legisse, quod ex ictus quantitate regulas motus deducere conatur, ex principio quodam, quod mihi falsissimum videtur, scilicet ex indifferentia corporis ad motum et ad quietem; qua posita corpus maximum quiescens a minimo incurrente celeritate non imminuta abripi sequitur. Hanc indifferentiam, cui Te olim etiam addictum fuisse ex Actis superioris anni pag. 151 video, ipse ibidem explodis, ubi non male corporibus inertiam, seu ad motum resistentiam tribuis. Hoc autem non nisi incidenter innuere volui: principium illud est, quod Pardies in eodem discursu jam animadvertit contra Cartesianos, non semper eamdem quantitatem motus absolutam censervari, quod etiam ostendit ex incursu obliquo globorum; interim veram quantitatem motionis non determinat, nec dicit illam haberi ex ductu molis in quadratum velocitatis.

Altera Tua demonstratio propositionis de ratione actionum motricium, quam in prioribus allegasti, ingeniose pariter ac prior et, ut dicis, magis ad formam excogitata mihi videtur, quamvis in fundo rei ambae concidant. Nihil enim certius est, quam quod actiones motrices debeant mensurari per effectus suos immediatos; si itaque longitudines percursae et velocitates (nisi quis obstinate vellet velocitatem potius esse causam) sint effectus actionis immediati, et quidem soli, quorum unus ab altero non dependet vel in altero non includitur (secus ita ratiocinari non liceret, ex eo enim quod duae librae auri occupant spatium duplo majus quam una libra auri, et insuper duae librae sunt duplo plures quam una libra, non ideo sequitur duas istas libras fore quadruplo seu bis duplo graviores quam unam libram, quia una ratio dupla in altera jam includitur, seu posita una, ponitur et altera) erunt actiones motrices necessario in ratione composita longitudinum et velocitatum adeoque temporibus aequalibus in duplicata velocitatum. Caeterum egregie admodum in iisdem prioribus Tuis ostendis, inter

haec duo: A facere duplum, tempore simplo, itemque C facere simplum, tempore simplo, cadere medium minus priore et majus posteriore, scilicet B facere duplum tempore duplo. Fateor B manifeste (ex natura repetitionis perfecta) esse duplum ipsius C, et proinde demonstrative sequi, A esse plus quam duplum ipsius C; sed tamen ex eo nondum sequitur illud praecise quadruplo majus esse hoc, priusquam demonstratum sit A esse duplum ipsius B: et hoc, meo judicio, demonstratu non ita facile est, etenim inter facere duplum, tempore simplo, et inter facere duplum, tempore duplo, talis repetitio non percipitur; quin imo videtur primo intuitu illud hujus quadruplum esse; si enim A, tempore simplo, idem faciat quod B, tempore duplo, oportet ut A, sit duplo velocius quam B adeoque illius potentia quadrupla potentiae ipsius C. Vides exinde haec non ita procedere, quasi nullam amplius mereantur elucidationem.

Imo maxime indigeo Tuo testimonio in re, quae me non mediocriter angit, agitur enim de honore meo, qui eo magis periclitatur, quod a fratre ipso, o nefas! impetatur. Si omnibus aeque ac Tibi perspecta esset innocentia mea et mordax fratris aemulatio, haud dubie Tuum testimonium non implorarem, nec magis me moverent ejus insultus, quam canum latratus.

Tametsi replicationem Dn. Nieuwentitii non viderim, argui tamen in illo aut obstinationem aut indocilitatem, eo quod etiamnum in scirpo nodum quaerat; utrumvis sit, ejus commercium literarium, quod ipsi mecum ineundem suasisti, mihi non arridet. Nolim enim operam meam inutiliter collocare in convertendo obstinatum aut docendo indocilem. Frustra illum admoneri facis, ut mihi quoque respondeat; vides ex silentio nihil habere quod reponat. Demonstratio enim synthetica, qua responsionem meam ad ejus objectionem obfirmavi, adeo facilis, clara et ad veterum demonstrandi modum accommodata est, ut sese risui exponeret, si quid contra movere vellet, cum a quovis etiamnum Geometriae tyrone intelligi possit. Modus quem Tibi proposuisti notandi calculos, omnino commodus est pro typis; optandum foret ut jam diu introductus esset; revera enim haec innovatio aliquid laboris facesset iis magis, qui veteri notationi assueti sunt, quam iis qui recens Algebrae studio animum applicant.

En adjecta hic marginalia Dn. Hugenii, quae Te tantum concernunt; videbis ex iis non tanti esse momenti, quanti forsan cre-

dideras. Non e re judicabis, ut etiam reliqua Tibi transcribam, quae alios concernunt; si tamen illa desideras, lubenter faciam, erit enim inter semiquadrantem horae factum. Nondum nactus sum reliquos Actorum tomos; eorum tamen per primam occasionem mittendorum spem facit amicus. Memini quod mihi non ita pridem ultro promiseris excerpta ex literis privatis Dn. Hugenii ad Te datis, in quibus ipsum magnifice de nostra methodo sentire ais. Gratissimum foret, si eorum me compotem redderes. Vellem etiam mihi locum indicares Actorum *), ubi de eadem re mentionem facit. Nil novi hic ad nos pervenit, quocirca plane ignarus sum eorum quae in Republica Literaria peraguntur. Acta Lipsiensia non nisi annatim, vel ad plurimum singulis semestribus huc appellunt, loco quod illa Basileae menstruatim acceperam. Ideo rogavi Dn. Menckenium, ut si quid in illis singulare prodiret, illius me per literas redderet participem, quod et Te rogo, praesertim cum Dn. Menckenius ad me non scribat nisi rarissime, quando alia causa id postulat. Ante aliquod tempus ipsi misi quaedam Actis inserenda, ubi occasionem arripui nonnihil attingendi de iis, quae ultimo Actorum Novembri inseruisti, praecipue vero objiciendi modeste unum et alterum iis, quae Dn. Tschirnhaus ibidem publicavit, ubi inter alia modum tradit abscindendi ex curva parabolica portiones in data ratione, quod ego ostendo fieri non posse, quin habeatur quadratura absoluta Hyperbolae et proinde extensio curvae parabolicae. Rogavi simul Dn. Tschirnhausium, ut suam demonstrationem publicare haud gravare velit; promisi me ipsi pro lucro gloriam inventionis quadraturae Hyperbolae cessurum. Hisce adjeci aliquod curiosum problema, concesso toto quod currentis anni restat tempore, intra quod si nemo solutionem exhiberet, me meam exhibiturum dixi.

Cum nesciam an jam prodierit in Actis, vel propediem proditurum sit, illud libenter hic repetam, cui per otium Te applicare, rogo, haud graveris: Datis (fig. 57) in plano verticali duobus punctis A et B, assignare viam AMB, per quam mobile M a puncto A moveri incipiens et propria gravitate descendens, brevissimo tempore perveniat ad punctum B. Miror hoc problema hactenus nemini in mentem venisse. Misi illud in Galliam et Angliam, visurus num

*) Act. Erudit. 1693 p. 496.

heroes isti mathematici duarum harum nationum, qui olim soli sibi mutuo problemata proponentes et solventes neglectis aliis nationibus de palma mathematica certabant, num inquam et hujus legitimam daturi sint solutionem. Perspicis quod sit ex eorum numero, ubi ex lineis omnibus quaeritur una praestans aliquid in desideratis minimum; cujusmodi solutionem in exemplo catenariae per seriem investigare instituisti. Interim quantumvis arduum hoc problema videatur, illud tamen duplici modo, et quidem absque serie solvi, ubi egregias proprietates, quae in alia materia suum usum obtinent, observavi. Nulla hucusque sese occasio obtulit mittendi Bremam fasciculum corticis Peruvianae, in illam tamen invigilabo. Expendi 10 fl. Holland. Sed res non est tanti ut de restitutione sis sollicitus; sufficit si id quondam fiat bona cum commoditate. Optarim ut interea temporis alia quae magis interest sese praebeat inserviendi occasio, et experieris quam sim etc.

Groningae 9 Junii 1696.

XXIX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Non mirum est, si in iis nihil certe constitui inter nos potest, quae demonstratione definiri non possunt, quod usu venit in causa gravitatis, licet tamen in his quoque (si tanti videatur) deprehendere, quae sententia sit similior veri. Dominus Frater Tuus in suis ad me literis ex meo modo explicandi aestimationem virium per aliquot elastra, totam vim suam corpori alicui impendentia, conjecerat me credere, gravitatem tali elastrorum actione, ictibus repetitis vim in grave transferentium, oriri. Respondi, me elastris tantum in exemplum uti. Optime tamen notas, tali modo oritura esse eadem phaenomena, quae in gravibus explicuit Galilaeus; et manifesta sane res est attendenti; nam cum spatia, a gravi percursa, sint viribus a gravi acquisitis vel amissis proportionalia, necesse est utique, ut aequalibus spatiis aequales vires acquirantur ac perdantur a gravi; perinde ac si a talibus elastris vis ipsis fuisset data vel ademta. An vero reapse talis causa a spatiis petenda sit, altioris indaginis res est: quanquam sano sensu id semper dici possit, etiamsi explicatio per ventum vel per vim centrifugam

adhibeatur. Sane si fingeremus grave ascendens, velut retia aranearum aequabiliter diffusa perrumpere, explicari posset haec aequabilis virium amissio; sed activum aliquid sic moderari, ad modum elastrorum, non aeque facile puto; quod si possis invenire modum, qui naturae consentaneus videatur, applaudam lubentissime. Ais per Te licere mihi non agnoscere pro vera sententiam Tuam, si velim. Ego vero rogo, ut Tibi persuadeas, me ab hac arbitraria judicandi ratione esse alienissimum, et propensissimum esse ad audiendam vocem rationis. Verum est fieri posse et saepe debere, ut materiae gravificae particula in corporis poris haereat, et in iis etiam vim suam perdat; non tamen ideo vis illa in totum corpus transferetur aut ad descensum augendum serviet, sed in partium motibus absorbebitur. Ais: cum materia gravifica sit subtilissima et omnia sint plena, procul dubio unum continuum constituere et particulas non sequi ex intervalla. Ego vero putarim materiam gravificam nec subtilissimam esse nec omnia replere nec unum continuum constituere, sed tantum esse disseminatam in alia multo subtiliore. Addis: si hoc demus, tamen numerum ictuum spatio proportionalem fore; verum quomodo id consequatur, non ostendis; et agnosces, opinor, ventum in navem agere numero ictuum potius proportionali ad tempus, quam ad spatium. Caeterum disputatio nostra de hac quaestione ex eo orta est, quod videbatur Tibi, communi explicandi ratione non posse satisfieri cuidam objectioni contra virium aestimationem nostram: et ideo factum est, ut hactenus necessarium putarem hanc serram Tecum reciprocare. Sed nunc, opinor, agnoscis alterutro explicandi modo idem prodire. Itaque ex novissimis literis tuis demum, quis nunc sit Tibi scopus intelligo; nec repugno, modo (ut dixi) distincte explicari possit, qua ratione fiat, quod dicis. Haec tamen scribens incido in verba tua, quae me adhuc turbant; ais nimirum: magnas incongruitates sese prodere statuendo ictus procedere secundum tempuscula; quaenam sint illae incongruitates, fateor me non videre. Quod si adhuc objectionem illam in mente habes, quae Tibi negotium facessierat, optarem ut eam distinctius proponas, et velut in forma. Sane ubi nuper reciprocatis cum Domino Papino literis objectionem ipsius in formam redigi, deseruit eam ipse, et aliam novam jam fabricavit, cui nunc satisfacio, speroque, hac disputandi forma inter illum et me continuata, controversiam

terminatum iri; neque enim alter ab altero se non intelligi amplius queritur.

Spero et de ictus quantitate me Tibi alias satisfacturum. De Pardiesio optime judicas: Ejus de Motuum regulis Dissertatio non magni momenti est: bene quidem vidit difficultatem de incursu obliquo, sed non resolvit. Mea demonstratio a priori, pro nostra virium aestimatione, nititur utique aliqua suppositione, nempe: Actionem quae facit aliquid uniformiter, tempore simplo, esse duplam actionis facientis idem uniformiter, tempore duplo. Hanc suppositionem concedere debent Catelanus et alii, cum quibus disputaveram, qui falso sibi persuaserant, negligi a me temporis aestimationem, quae a nemine melius adhibetur, quam a me. Nondum quidem inveni modum a priori hanc propositionem demonstrandi per viam congruentiae; imo ne hanc quidem, quod actio idem faciens, breviori tempore, sit major; a quo esset incipiendum. Verum hoc admisso, utique eo ipso quod nulla amplius datur resolutio, seu quod nihil medium interponi potest inter A et B, ut B interpositum fuerat inter A et C; aliud dici nequit, quam actiones esse ut celeritates, A erat facere duplum tempore simplo, B facere duplum tempore duplo, et C facere simplum tempore simplo: Itaque actio A est major quam actio B, et quidem ita ut crescat actio, manente effectu et tempore decrescente. Itaque ex eo ipso, quod nullum est principium aliquid ultra determinandi, sequitur actiones esse reciproce ut tempora. Nimirum ubicunque nulla reperiri potest ratio proportionis compositae, necesse est simplicem locum habere. Operae tamen pretium est, ut objectio tua, quam alicui occurrere posse optime notas, resolvatur; quo facto, major (credo) lux accendetur, apparebitque discrimen inter potentiam et actionem. Objectio ita habet: A tempore simplo, idem facit quod B tempore duplo; ergo A est duplo velocius quam B. Ergo potentia ipsius A est quadrupla potentiae ipsius B. Respondeo concedendo totum argumentum, potentiam esse quadruplam, et tamen ajo actionem tantum hic esse duplam. Quod Paradoxum ita ostendo: nempe potentia ipsius A quadrupla est (hoc ipsum enim demonstravimus ex hoc ipso nostro) sed actio est tantum dupla, quia Actio est in ratione composita potentiae, quae exercetur, et temporis in quo exercetur; itaque potentia ipsius A quadrupla, simplo tempore exercita, dat actionem duplam ejus, quam dat potentia ipsius B simpla, exercita tem-

pore duplo; et quadruplam ejus quam dat potentia ipsius C simpla, exercita tempore simplo. Scilicet in A potentia 4, tempus 1 dat actionem 4; in B potentia 1, tempus 2 dat actionem 2; denique in C potentia 1, tempus 1 dat actionem 1. Vides quam haec pulchre quadrent, et quam parum distinctae notiones de potentia, actione et similibus vulgo habeantur. Complures jam anni sunt, quod haec explicui in Dissertatione conscripta in itinere Italico, et Florentiae apud amicum relicta, qui editionem in se receperat; sed ego postea in mora fui, dum plura subnata sunt, quae me adjuncturum scripsi, necdum tamen praestiti, non quod res desint, sed otium ordinandi. Caeterum ut actionem nunc, composita ratione suorum principiorum, potentiae et temporis, aestimo, ita eam paulo ante aestimaveram composita ratione eorum, quae praestat, effectus scilicet extensivi seu materialis, nempe longitudinis (quam κατ᾽ ἐξοχὴν effectum vocare soleo) et effectus intensivi seu formalis. Desideratum enim est, ut praestetur multum et cito. Ambae autem aestimationes consentiunt inter se, ut vides.

Vereor quidem et ego, ne Dn. Nieuwentiit non satis vel candoris vel dociliatis afferat; quod tamen vereri licet, imputare nondum licet. Et donec magis constet oleum et operam perdi, opus est condescensu quodam et longanimitate, quae fateor ab iis qui calent adhuc et animo vigent (quod in Te agnosco) minus expectari potest. Qua patientia Dn. Papinus et ego inter nos rationes hactenus contulerimus, mirareris, opinor, si videres. Interim facis ex decoro moderationemque ostendis Tuam, quod Dn. fratri non ita respondes, quemadmodum animum Tibi suggerere video. Ego vero occasionem non amittam sententiam dicendi meam, quando id non inutile futurum putas.

Pro Hugenianis notationibus marginalibus ago gratias singulares, rogoque ut caeteras quoque omnes communices. Indicant nescio quid morositatis, ne dicam malignitatis, sed quibus eo facilius ignoscendum, quod publice et per literas aequiora dixit, praesertim de Analysi nostra. Nam in Actis Eruditorum 1693 p. 476 (ubi solutionem suam problematis cujusdam Tui, puto, occasione constructionis Tractoriae excogitati exhibet) diserte commendat calculi differentialis (quo tunc feliciter usus erat) inventionem, absque quo (inquit) vix est ut ad has subtilitates admitteremur. Et

in suis ad me literis, biennio abhinc circiter scriptis, Calculum vocat admirabilem (vostre merveilleux calcul). Verba ipsa Tibi transcribam, ubi literae incident in manus: nunc enim se statim non offerunt, et quaerere non vacat.

Postremo accedo ad problema Tuum inveniendae lineae, quam vocare, opinor, liceat Tachystoptotam seu celerrimi descensus. Problema est profecto pulcherrimum, et me invitum ac reluctantem, pulchritudine sua, ut pomum Evam ad se traxit. Est enim ea mihi tentatio gravis et noxia, viribus affectis et incumbente aliorum mole; ut non facile amplius audeam, quae intensiorem postulant laborem meditandi. Itaque inposterum problemata a Te deprecor, maloque ab alio, et praesertim a Te docere solutiones, quam ex me sperari, Tibique debilior videri, quam fieri mihi. Nam sentio tali labore praesertim calculi (qui levis satis Tibi videri possit) non parum atteri vires meas, et phlogoses illas importunas excitari. Accipe interim quid tentarim, non per seriem quidem, haec enim tantum subsidialis est, si res ad triarios redierit; sed ea ratione quae ad aequationem differentialem ducat, quam et in istis ex visceribus problematis habere solemus. Ajo igitur eam esse naturam lineae Tachystoptotae AC (fig. 58) (in qua grave celerrime a puncto A ad punctum C descendit) ut positis abscissarum seu altitudinum incrementis constantibus, sint elementa ordinatarum seu latitudinum BC in ratione composita ex directa elementorum curvae, et reciproca elementorum temporis verticalium. Verticalia voco elementa temporum, quibus grave descenderet in ipsa verticali AB. Unde sequiter, elementa curvae itidem esse in ratione composita ex elementorum latitudinis directa simplice et ipsarum altitudinum reciproca subduplicata; itaque si AB sit x, et BC sit y, et assumatur constans quaedam b, res reducitur ad quadraturas, et erit $dy : dx = \sqrt{,,x :, 2b - x}$. Sit $dy : dx = v : b = \sqrt{(2bx - xx)} : ,2b - x$. Dico v, ipsis dy proportionales, esse ad meam Quadratricem, qua olim pro Tetragonismo meo Arithmetico sum usus, atque adeo curvam Tachystoptotam esse Quadratricem meae Quadratricis, et proinde a circulari dimensione pendere. Nam si (fig. 59) centro G, radio AG seu b describatur semicirculus AHM, et angulo AGH bisecto, ducta GT occurrat tangenti verticis in T, et sit AB, x, adeoque sit BH, $\sqrt{,2bx - xx}$, tunc AT erit v, seu erit ad b sive AG, ut BH seu $\sqrt{,2bx - xx}$ ad BM seu $2b - x$. Jam in BH (si opus

producta) sumatur BN aequalis AT, erit $\int v\,dx$ seu area ABNA aequalis duplo segmento circulari, cujus arcus AH. Itaque si area ABNA vel duplum hoc segmentum applicetur ad rectam b (ut fiat $\int v\,dx : b$) prodibit y seu BC, ordinata lineae quaesitae AC. Unde sequitur Tachystoptotam AC esse lineam segmentorum (quae scilicet ex eodem puncto, nempe vertice, abscindantur) seu lineam, cujus ordinatae sint segmentis circularibus proportionales, quorum tetragonismo supposito facile curva per duo puncta data describi potest.

Adjiciam theorema, ut puto, non inelegans, facile quidem, si quis animum advertat, Tibi tamen fortasse non displiciturum, quia Tui problematis occasione mihi incidit. Nempe si (fig. 60) triangulum rectangulum Pythagoricum (ut quidam vocant) seu cujus latera sunt ut 3, 4, 5, ita statuatur, ut perpendiculariter erectum sit latus minus; grave descendens per AB verticalem, et deinde concepto impetu pergens per BC horizontalem, eodem tempore perveniet ab A ad C per latera AB, BC, quo directe per ipsam hypotenusam AC. In praxi autem oportet angulum B nonnihil rotundari in portiunculam curvae, cujus tangentes sint AB, BC, ut grave sine repercussione aut impedimento transeat ex AB in BC; proderit etiam angulum ABC esse tantillum obtusum. Si AB minor sit tribus quadrantibus ipsius BC, citius absolvetur iter per latera, quam per hypotenusam; sin major sit, directum iter praestat. Et multa alia ejus generis constitui possunt, quibus immorari non vacat.

Et jam finis literis satis prolixis est imponendus. Quaerere tamen adhuc lubet, nihilne ex Gallia habeas a Dno. Hospitalio aliisque amicis? Quae apud vos vicinosque Batavos novitates Physico-Mathemicae? Superioribus jam scriptis, literas a Dno. Cluverio accepi cum inclusis ad Dominum Fratrem Tuum. Defendit semper, quae dixerat contra Quadraturam Parabolae Archimedis, et nostra quoque. Respondebo saltem nullam dari posse constructionem Archimedea meliorem. Puto habere eum meditationes profundas nec spernendas, sed non opus erat, ut iis uteretur ad bene constituta evertenda. Vale.

Dabam Hanoverae 16 Junii 1696.

P. S. .... Acta Eruditorum etiam ad me satis tarde perveniunt, negligentia Bibliopolae, qui curare in se recipit, ut nesciam an Tuum problema sit in Actis, cum monitis de Domini Tschirnhausii sectione Curvae parabolicae. Video eum saepe paulo promtius pronuntiare.

Beilage.

Invenire lineam Tachystoptotam: Datis in plano verticali duobus punctis A et B (fig. 57) invenire lineam AMB, per quam mobile M a puncto A moveri incipiat et propria gravitate descendat ad punctum B tempore omnium possibilium brevissimo.

Si grave M descendat ex A in recta inclinata AB (fig. 61) erit tempus, quo percurrit AB, ad tempus, quo percurreret AC perpendicularem usque ad horizontalem CB, ut AB ad AC, ut constat.

Rursus si ponamus CB esse duplum ipsius AC et grave ubi descensu pervenit ad C, pergere in horizonte concepto impetu ac tendere motu aequabili versus B, percurret CB tanto tempore quanto percurrit AC. Sin CB sit aequalis AC, percurret dimidio. Et in universum si tempus quo percurritur AC, sit t, erit tempus quo percurritur CB, ad t, ut est CB ad bis AC. Itaque tempus quo pervenitur ex A in B via ACB, erit $t + t \,.\, CB : (\text{bis } AC)$ seu $t\ ((\text{bis } AC) + CB) : \text{bis } AC$. Sed tempus quo pervenitur recta ab A ad B, est $t \,.\, AB : AC$, et $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}$, ergo fit tempus per $AB = t \,.\, \sqrt{AC^2 + CB^2} : AC$, ergo tempus per ACB est ad tempus per AB, ut $(\text{bis } AC) + CB$ ad bis $\sqrt{AC^2 + CB^2}$, et horum quadrata ut $4 AC^2 + 4 AC \,.\, CB + CB^2$ ad $4 AC^2 + 4 CB^2$, quorum illud potest esse majus quam hoc, quia demto communi $4 AC^2 + CB^2$ potest $4 AC \,.\, CB$ esse majus quam $3 CB^2$ ceu $4 AC$ potest esse majus quam $3 CB$. Itaque si recta $4 AC$ sit major quam $3 CB$, seu si AC sit major quam $\frac{3}{4} CB$, breviori tempore perveniet grave ex A in B per cathetum et basin simul, seu per latera trianguli rectanguli, quam via brevissima seu directa per hypotenusam.

Hinc sequitur, in triangulo rectangulo Pythagorico (ubi AC cathetus aequatur tribus quadrantibus baseos CB) grave aequali tempore descensurum ab una hypotenusae extremitate (A) ad alteram (B) sive oblique descendat seu per latera (AC, CB) sive directe per ipsam hypotenusam (AB), ubi tamen in praxi concipiendum est angulum C nonnihil rotundari seu constare ex por-

tiuncula curvae, cujus tangentes sint rectae AC et CB, ut sine reflexione vel impedimento motus gravis ex A per C ad B procedat. Sed portiuncula sufficit quantumvis parva, quae adeo calculum notabiliter non mutat.

Quomodocunque inter se et respectu perpendicularis sita sint duo puncta A et B (fig. 62), modo unum alteri perpendiculariter non immineat, potest inveniri punctum D tale, ut facilius seu citius perveniatur ab A ad B per D, quam recto itinere. Quin et, si data sit horizontalis DE, in eodem plano verticali cum punctis A et B inter quae jacet, inveniri in ea potest punctum B tale, ut via ADB sit omnium possibilium facillima seu promtissima.

Nempe tempus per AC sit t, et tempus per AE est ad tempus per AC, ut $\sqrt{AE}$ ad $\sqrt{AC}$, ergo tempus per AE est $t.\sqrt{(AE:AC)}$. Et tempus per AD est ad tempus per AE, ut AD ad AE, ergo tempus per AD erit $t.\sqrt{(AE:AC)}\,AD:AE$. Quaeramus jam et tempus per DB. Quod est ad tempus per DF vel EC, ut DB ad EC; tempus autem per EC est tempus per AC, demto tempore per AE, seu $t, 1-\sqrt{(AE:AC)}$; ergo tempus per DB est $t, 1-\sqrt{(AE:AC)}, DB:EC$. Ergo tempus per ADB seu tempus per AD + tempus per DB est $t,,\sqrt{(AE:AC)}\,AD:AE + (1-\sqrt{(AE:AC)})\,DB:EC$, quod sit $= m$ seu omnium possibilium sui generis minimo.

Ut ergo inveniatur DB, differentietur haec aequatio. Pro compendio prius $t.\sqrt{(AE:AC)}$ vocetur r, et $t, 1-\sqrt{(AE:AC)}$ vocetur n, et fiet $r\,AD:AE + n\,DB:EC = m$. Unde differentiando fit $dAD.r:AE + dDB.n:EC = 0$. Jam $AD = \sqrt{AE^2+ED^2}$, ergo $dAD = dED.ED:AD$; et similiter $DB = \sqrt{EC^2+FB^2} = \sqrt{EC^2+CB^2-2CB.ED+ED^2}$, ergo $dDB = -dED.FB:DB$. Ergo ex aequ. differentiata fit $r.ED:,AD.AE = nFB:,DB.EC$. Est autem r ad n seu $t\sqrt{(AE:AC)}$ ad $t, 1-\sqrt{(AE.AC)}$ seu ratio temporis per AE ad tempus per EC, et ED seu $CF:FB = n.AD.AE,:,r.DB.EC = (AD.AE:r):(DB.EC:n)$ seu $AD:DB = (r.ED:AE):(n.FB:EC)$ et $r:n = \sqrt{(AE:AC)}:((\sqrt{AC}-\sqrt{AE}):\sqrt{AC}) = \sqrt{AE}:,\sqrt{AC}-\sqrt{AE}$. Huic si AD, DB, FB explices per ED, res redit ad puram Geometriam seu aequationem, in qua sola incognita ED; sed hoc nunc omisso sufficit tale theorema, quod progressus in latitudinem (ED

seu CF, et FB) sunt in ratione composita ex rationibus directis descensuum verticalium seu progressuum altitudinis (AE, EC) et progressuum descensus obliqui (AD, DB) et reciproca accessionum temporis verticalis (1 : r et 1 : n). Tempora verticalia voco, quibus altitudines percurrerentur seu descensus verticales peragerentur, nempe per spatia AE, EC. Porro $r AD . ED :, AD^2 . AE = n DB . FB :, DB^2 . EC$ seu tempus per AD in $ED : AD^2 =$ tempus per DB in $FB : DB^2$. Ergo latera facillimi descensus sunt in ratione subduplicata, composita ex rationibus temporum, in quibus fit descensus per ipsa, et progressuum latitudinis.

Sumatur alia recta horizontalis infra CB, ut GL (fig. 63) et in ea sumatur punctum L, et quaeratur in horizontali CF, cadente inter ED et GL, punctum B tale, ut sit via per DBL omnium possibilium a D ad L facillima; habebit locum idem theorema. Ponamus autem L sic assumi, ut B sit illud ipsum punctum datum paulo ante positum. Eodemque modo, ut ex dato B invenimus punctum L in horizontali GL, ita ex puncto L inveniamus punctum P in inferiore adhuc horizontali MP. Itaque via facillima birectilinea ex A per ED ad B erit ADB, et ex D per CB ad L erit DBL, et ex B per GL ad P erit BLP, et ita porro. Esto autem aliqua via facillima trirectilinea ADBL ab A ad L per horizontales ED, CB angulis rectarum viae incidentes, patet et birectilineas trirectilineis contentas esse omnium possibilium facillimas, nempe ADB et DBL. Nam cum ex hyp. via facillima ab A ad B, angulis suis ...... in datas horizontales incidat per BL, necesse est viam ADB esse viarum ab A ad B facillimam, nam si detur facilior AQB, erit via AQB cum via BL facilior quam via ADB cum via BL, id est quam via ADBL, contra hypothesin. Et simili argumento res probabitur de trilineis in quadrilineo; et generaliter si via tota sit sui generis facillima, etiam partium viae sui generis facillimae erunt, verb. gr. bilineae et trilineae in quadrilineo contentae.

Quod si jam concipiamus viam polygonam facillimam ita continuari, ut constet ex angulis numero infinitis, qui incidant in horizontales infinitesime distantes seu vicinissimas, habebimus Lineam facillimi descensus, quam vocare liceat Tachystoptotam, modumque ejus proprietates investigandi. Hanc autem non esse Isochronam paracentricam, ut fortasse cuidam videri prima fronte possit, ex eo intelligi potest, quod nostra abit in rectam, tunc

cum unum ex duobus punctis (ut A et B, vel A et P) alteri imminet verticaliter; tunc enim omnia cadunt in rectam illam verticalem seu perpendicularem, rectus autem descensus nunquam est isochronus. Deinde nostra linea incipit a quiete, quod non facit isochrona.

Intelligatur jam descriptu linea facillimi descensus seu Tachystoptota AC (fig. 64) in qua mobile C transeat a puncto ${}_1C$ ad punctum ${}_3C$ via facillima, et quidem ab horizontali ${}_1B{}_1C$ ad horizontalem ${}_3B{}_3C$ per horizontalem ${}_2B{}_2C$, ita ut angulus in mediam borizontalem incidens sit punctis ${}_1C$, ${}_2C$, ${}_3C$ non nisi infinitesime distantibus. Describatur praeterea parabola quaedam AE, cujus vertex A et axis AB. Utique si AB sint descensus verticales gravis inde a quiete, erunt BE, ordinatae parabolae, ut tempora verticalia, et F(E), ut ${}_1F{}_2E$, ${}_2F{}_3E$ etc. ordinatarum parabolae elementa, erunt elementa temporum verticalium. Quodsi B(B) seu EF, elementa altitudinum seu abscissarum, sint constantia, erunt F(E) elementa temporum verticalium, ipsis temporibus BE reciproce proportionalia. Compleantur rectangula ${}_1C{}_1D{}_2C$, et ${}_2C{}_2D{}_3C$, ex natura viae birectilineae facillimae ex ${}_1C$ ad ${}_3C$ per ${}_2B{}_2C$ paulo ante demonstrata, erit ${}_1D{}_2C$ ad ${}_2D{}_3C$ $=$ $({}_1C{}_2C \,.\, {}_1B{}_2B : {}_1F{}_2E) : ({}_2C{}_3C \,.\, {}_2B{}_3B : {}_2F{}_3E)$ seu positis ${}_1B{}_2B$, ${}_2B{}_3B$ elementis altitudinum aequalibus, erit ${}_1D{}_2C : {}_2D{}_3C = ({}_1C{}_2C : {}_1F{}_2E) : ({}_2C{}_3C : {}_2F{}_3E)$, seu $(1 : {}_1F{}_2E) : (1 : {}_2F{}_3E) = {}_1B{}_1E : {}_2B{}_2E = \sqrt{(A{}_1B : A{}_2B)}$. Ergo ${}_1D{}_2E : {}_2D{}_3C = {}_1C{}_2C \,.\, \sqrt{A{}_1B}, :, {}_2C{}_3C \,.\, \sqrt{A{}_2B}$, seu elementa latitudinun sive ordinatarum sunt in ratione composita ex elementorum curvae simplice et ipsarum altitudinum subduplicata D(C) ut $C(C) \,.\, \sqrt{AB}$.

Unde more solito dy ut $dc\sqrt{y}$ seu assumta constante $2b$, fiet dy ut $dc \,.\, \sqrt{2bx}$ seu (1) $dy \,.\, 2b = dc\sqrt{2bx}$ seu $4bbdy^2 = 2bxdx^2 + 2bxdy^2$, vel (2) $2bdy^2 = xdx^2 + xdy^2$, vel (3) $dy : dx = \sqrt{(x :, 2b - x)}$. Fiat $dy : dx = v : b$, fiet (5) $v : b = \sqrt{(2bx - xx) :, 2b - x}$. Itaque ut exhibeatur quantitas v, in verticali AB (fig. 59) sumatur punctum G infra A, ut fit AG aequalis constanti b, et centro G radio AG describatur semicirculus AHM, et in axe sumto sinu verso quocunque ut AB seu x et sinu recto BH seu $\sqrt{(2bx - xx)}$, anguli AGH dimidio AGT ducatur recta GT et producta dum occurrat tangenti verticis in T, erit AT recta v quaesita. Hoc sic demonstratur: Ex diametri

AM puncto M educatur MH, erit angulus AMH dimidius anguli AGH, ergo aequalis angulo AGT. Ergo ob triangula similia GAT, MBH erit AT ad AG seu ad b, ut BH seu $\sqrt{(2bx - xx)}$ est ad MB seu ad $2b - x$, itaque AT est v. Cui sumendo aequalem BN in BH (si opus producta) et per puncta ut N ducatur linea ANN, quae est quadratrix mea arithmetica, qua olim sum usus, cujus quadratura dabit quaesitum. Nam per (3) et (4) fit (6) $\int \overline{v\,dx : b} = \int dx \sqrt{(x : 2b - x)} = y$ seu area figurae ABNA, applicata ad AG seu b constantem, dabit BC seu y quaesitam. Inveni autem jam olim hanc quadraturam a circuli quadratura pendere, seu aream ABN aequari duplo segmento AHA adeoque ipsas rectas BC seu y esse ipsis AHA segmentis circuli proportionales.

Datis igitur punctis A et L sibi verticaliter non imminentibus, si a puncto A ad L ducenda sit linea Tachystoptota, ducatur per A verticalis AB, et ex puncto L in ipsam normalis LK; inde quaeratur radius circuli b seu AG, qui ductus in ipsam KL aequetur duplo segmento AIA; inde inventis quotcunque rectis BC, quae ductae in eandem AG aequentur duplis segmentis respondentibus AHA, linea ducta per puncta C erit quaesita. Quanquam et sufficiat circulus quivis, modo diameter AM sit major ipsa AK; nam si hanc KL secet in I, et in ipsa KL sumatur KP talis, ut sit rectangulum sub AG, KI aequale duplo segmento AIA et in BH quacunque (si opus producta) sumatur BR quae ducta in AG aequetur duplo segmento AHA, fiatque BC ad BR ut KL ad KP, erit punctum C in curva ACL quaesita, quae basi per M occurret in Q, sic ut MQ sit semiperipheria circuli. [Linea segmentorum poterit continuari ope majoris circuli, ut parabola quae per chordas construitur; videndum, annon et ope circuli ejusdem continuata revolutione ipsius AC circa A, ultra semicirculum, imo ultra circulum, ita enim semper crescit quantitas segmenti, quod secus est in chorda, ubi prior redit].

Methodus hic a me adhibita etiam pro aliis lineis Maximum aut Minimum aliquid praestare debentibus est profutura; nempe si maximum vel minimum praecedentis sit pars maximi vel minimi sequentis. Ut invenire lineam maximi ambitus, quaeretur primum Monogonum BDC (fig. 65) datis magnitudine ipsis AB, AC radiis

seu emissis ex centro aequalibus inter se et ambitu ABDC vel quod eodem redit, BDC, sic ut area ABDC sit omnium possibilium maxima. Ubi invenietur BD, CD esse aequales et angulos B, C esse rectos. Sit jam Dyogonum BDCE omnium possibilium sui generis maximum data ambitus BDCE magnitudine. Resolvatur in duo Monogona ABDC et ACFE. Si jam ABCD sit ambitus sui maximum, dico et ACFE sui ambitus maximum fore; sit enim aliud majus ejusdem ambitus CFE, nempe H, erit ABCA + H majus quam ABDCFE, contra hypothesin. Itaque continua additione dyogonorum satisfacientium formabuntur polygona satisfacientia. Potuisset prius ostendi in dyogono, majus fieri, si AB, AC aequales, quam si inaequales.

Pro Curva Catenaria etiam procedet haec Methodus; nempe datis punctis A, B (fig. 66) et catenula trigona ACDB, quaeritur situs ejus, ut centrum gravitatis maxime descendat. Aliter si CD intelligatur esse pondus affixum in C et in B quomodocunque formatum, reperiatur ut maxime descendat centrum gravitatis, debere esse in concursu rectarum AC, BD.

Si quaeratur navis G (fig. 67) figura minime resistens aquae in data capacitate, incipiatur itidem a dyogono, inde pergatur ad aliud dyogonum, atque ita rem omnino puto fore in potestate. Est in his novae cujusdam Analyseos materies.

XXX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Cum nunc de mente mea Tibi constet, et quis mihi scopus sit in explicatione actionis materiae gravificae intelligas, ei diutius non immorabor; liceat tamen paucis perstringere ea, quae in postremis Tuis hac super re monuisti. Ergone tandem frater meus morositati suae vim intulit Tibique scripsit? nullamne aliam scribendi materiam habuit, quam quod de elastrorum actione ex me Tuisque ad me datis literis didicerat? Forsan et alia protulit tanquam in sua, revera tamen in aliena olla cocta; de his enim parum antea, me nondum monente, cogitabat. Sed dic, quaeso, notavit ne etiam ex tali elastrorum actione oritura esse eadem phaenomena Galilaei? Vix

puto, nam hoc ipsi non aperui, quia post discessum meum ex patria mihi demum incidit. Promittis Te meo explicandi modo lubentissime applausurum, si possim invenire viam naturae consentaneam, qua activum aliquid sic moderari liceat ad modum elastrorum, quemadmodum fingere possemus retia aranearum aequabiliter diffusa, quibus perrumpendis grave ascendens decrementa pateretur virium, spatiis proportionalia. Sane si mihi concedis, posse saltem sana ratione statui particulam gravificam totam suam vim transferre in grave, jam habemus quod petis; particulae enim gravificae si non continuum faciunt, saltem sunt aequabiliter dispersae, et sic quod in retibus aranearum fingis, passivum, hic revera ponitur activum; quippe cum quaelibet particula totam suam vim tranferat (per hypothesim, quia ad fieri posse jam in prioribus meis ostendi) et cum numerus particularum sit spatio proportionalis, patet utique virium accretionem fore aequabilem. Mentem meam clarius explicare non possum quam per aliquod simile. Pone navigium ferens hominem in puppi, quod primum sit quiescens in aqua stagnante nullius resistentiae, ipsum autem sit solidissimum, ita ut ejus partes tremoris omnis sint expertes, sed vim impressam toti navigio impertiant, abstracte etiam a materia ambiente. Nunc homo insidens percutiat malleo puppim secundum directionem horizontalem, quo totum navigium moveri incipiat; repetat ictus aequales non singulis momentis, sed singulis spatiolis, per quae navigium progreditur. Dico navigium eodem modo accelerari, quo grave descendens; recipit enim singulis spatiolis non solum ictus aequales (siquidem distinguis inter ictum et vim) sed etiam vires aequales, eo quod mallei vis, quae semper eadem supponitur, tota ad navigium promovendum impenditur, ipsi enim nil remanet, nisi quatenus pars est navigii; sic etiam quia materia gravifica est infinite velox, poterit unica ejus particula considerari quasi corpori gravi semper insideret, suosque inflictus singulis spatiolis reiteraret, loco quod singulis spatiolis nova adveniat, unicumque faciat ictum. Ais me non ostendere, quomodo consequatur numerum ictuum spatio proportionalem fore; sed puto id satis ostensum esse ex eo ipso, quod concedatur particulas gravificas aequiabiliter disseminatas esse per totam altitudinem descensus. Nam si numerus particularum percutientium sit spatio proportionalis, ergo etiam numerus ictuum eidem erit proportionalis, quia tot sunt ictus, quot sunt particulae quae faciunt ictus. Haud dubie agnosco ventum in navem agere numero ictuum

proportionali ad tempus (supposito ventum incomparabiliter rapidiorem esse navi) sed hoc minime evertit opinionem meam, imo maxime illam confirmat; est enim summa differentia inter utrumque agendi modum, et hinc non miror, quod cum nullam interesse credideris, meae opinioni hucusque assentiri nolueris. Navis propellitur a particulis venti a tergo continue subsequentibus et motum habentibus progressivum secundum directionis navis; hinc sive quiescat sive moveatur, semper novas et novas recipit impressiones, et quidem pro ratione quantitatis venti allabentis, id est, pro ratione temporis. Sed grave descendens non impellitur a materia quadam instar venti, quae a circumferentia versus centrum terrae flat, sed a particulis quidem rapidissimis, nullum tamen motum progressivum versus terrae centrum habentibus; hinc nisi grave moveatur, nullas novas recipit impulsiones. Si globuli (fig. 68) in aequali distantia sese subsequentes 1, 2, 3, 4 etc. motu parallelo impingant in corpus A, erit numerus ictuum in ratione temporis. Sed si particulae aequidistantes a, b, c, d etc. moveantur rapidissime, veluti in vorticulis α, β, γ, δ etc. circa centrum fixum primaque particula a propellat corpus B in vorticulum β, et particula b in vorticulum γ etc. tunc utique numerus ictuum erit in ratione spatii a corpore B percursi. Prior agendi modus est venti, posterior est materiae gravificae vel saltem analogus. Vides satis ex hac explicatione, quaenam sint illae incongruitates, quae sese produnt, statuendo ictus procedere secundum tempuscula; praeter illam, quod in hac hypothesi dicendum sit, corpus jam in motu majorem virium gradum recipere a particula gravifica utut incomparabiliter celeriori, cujus sane respectu corpus quiescere censendum, quam cum quiescit. Hoc si non sit incongruitas, saltem non est veritas adeo clara, quam adversarius minime negare possit.

Optime distinguis inter potentiam et actionem; adeoque argumentum Tuum a priori ostendit saltem actionem ipsius A esse quadruplam actionis ipsius C; volebas autem id demonstrare de potentia. Interim res plana fiet, dicendo actiones hic esse ut potentiae quia aequali tempore peraguntur. Bene se habet, quod agnoscas nondum potuisse demonstrari actionem A duplam esse actionis B: principium enim illud: Ubicunque nulla reperiri potest ratio proportionis compositae necesse est simplicem locum habere, obscurum mihi videtur, nec satis

hic probat quod probandum est; propositionem vero alteram, quod actio idem faciens breviori tempore sit major, a qua incipiendum dicis, ego pro axiomate assumerem.

Commercium meum parum sibi proficuum credet, opinor, Dn. Nieuwentiit, multoque minus indigebit mea scrupulorum suorum enodatione, sive quod me huic operi non parem putet, sive quod malit recurrere ad Te, tanquam ad fontem ex quo illos melius diluat. Ultra tres septimanas commoratus fui Amstelodami, quod ipse non poterat ignorare, ut amicus ejus Mackreelius mihi retulit; nec tamen eum videndi honorem habui. Interim non e re puto, nec mihi author eris, ut operam meam obtrudam ipsi nolenti forsan. Noli me adeo calere putare, ut omni longanimitate caream; si videres, quantum ego laboris susceperim pro Dno. Marchione, pro Varignonio, Fatio aliisque, quantum in illorum usus fecerim et scripserim, imo meum ipsum commodum illorum commodo postposuerim, diceres profecto contrarium. Agnoscis utique moderationem meam, dum fratri non respondeo uti meretur; quod autem id in Te suscipere offers, grata accipio mente, et quo citius, eo gratius erit, qualicunque modo id fiet. En reliquas Hugenii notationes marginales, quas in memoratis Tomis reperi; caeteros nondum habeo.

Mitto hic solutionem meam problematis mei de invenienda linea celerrimi descensus *), illis verbis conscriptam, quibus illam ante acceptas Tuas ultimas conceperam, ut si digna videatur simul cum Tua Actis inseri cures. Dederam lineae nomen Brachystochronae, ob rationem quam ibi videbis; sed si magis arrideat nomen Tachystoptotae, permitto ut hoc in illius locum ubicunque substituatur. Valdopere gavisus sum, cum intelligerem adeo Tibi placuisse hoc problema, ut Te invitum et reluctantem pulchritudine sua, ut ais, ut pomum Evam ad se traheret, si modo ego non pro serpente illo maligno habear, qui hoc pomum obtulit; sed gaudio meo multum accessit, cum viderim Tibi jam repertam esse solutionem, a qua tamen omnes quibus illud proponebatur, longe absunt, testibus literis Varignonii (De tous ceux, inquit, à qui j'ay annoncé vôtre problême, je ne sçay encore personne qui l'ait resolu: je l'ay tenté, mais la difficulté m'a tout aussy-tot rebuté). Etiam ipsi Hospitalio minime displicuit problema (ce

*) Siehe die Beilage zu diesem Briefe.

probleme, mihi scribit, me paroist des plus curieux et des plus jolis que l'on ait encore proposé, et je serois bien aise de m'y appliquer; mais pour cela il seroit necessaire que vous me l'envoyassiez réduit à la Mathematique pure, car la Physique m'embarasse etc.). Interim idem Tibi accidit, quod illis qui detegunt thesaurum, cujus tamen pretium nondum aestimare possunt, quod etiamnum inclusus est cistis et capsis, quibus vero reseratis, eum longe pretiosiorem deprehendunt quam sperabant. Revera enim et Tu reperisti solutionem problematis, in quam autem, quantum in recessu contineat, nondum introspexisti. Persuasus sum totus, quod longe majorem capies voluptatem, ubi noveris curvam quaesitam esse cycloidem, quam cum illam invenisses anonymam: illa, inquam, est cyclois, de qua in simili materia Hugenius aliam insignem proprietatem ostendit, isochronismum scilicet oscillationum. Quid, quaeso inexpectatius evenire potuisset? Ob hanc rationem puto ipsi nomen Brachystochronae non male convenire. Et sic Tua ope novae accesserunt proprietates Cycloidi, cum ostendas illam esse L i n e a m s e g m e n t o r u m et quadratricem tuae Quadratricis. Sciendi cupidus sum, qua via perveneris ad solutionem; praevideo Te alii alicui institisse, quae ab utraque mearum duarum diversa erit. Alter meus solvendi modus quidem est indirectus, sed quem directo praefero, quod una opera me deduxit ad solutionem problematis Optici elegantissimi de curvatura radii in medio variante, ubi mirum consensum detexi inter duas istas curvas. Tuam vero sententiam exopto, quid de utroque solvendi modo Tibi videatur. Constructionem etiam dedi curvae, quam voco Synchronam, quam ex occasione prioris problematis inveni; ostendo ibi, quod sit curva, quae omnibus cycloidibus ab eodem initio descriptis normaliter occurrit. Est sane mirabilis curva; ejus enim constructionem, posita extensione arcus circularis, ex contemplatione praecedentis materiae facile inveni: si vero illam in abstracto consideratam quaerere velim, ne quidem ad aequationem differentialem pervenire possum; in tantum ut, si hoc problema seorsim vel alio tempore proposuissem, invenire scilicet curvam omnibus cycloidibus perpendicularem, vix quisquam solutionem dare potuisset, dum contra ego me eam solus possidere jactare potuissem: sed magis publicae utilitati, quam suae gloriae litandum censeo. Memini me Tibi olim generaliter proposuisse, invenire curvam, quae aliis positione datis occurrat normaliter, quod ego in pluribus

solveram. Modum quidem Tuum generalem tradebas; sed si resumere placet, videbis illum plerumque locum non habere, quando curvae positione datae sunt transcendentes, ut in hoc ipso exemplo apparebit. Alterius exempli, quod in meo schediasmate propono de Logarithmicis per curvam normaliter secandis, nondum quidem constructionem, nec aequationem differentialem primi gradus inveni, sed tamen seriem quamdam simplicissimam pro illa exhibere possum. Caeterum egregium est, quod observasti de triangulo rectangulo Pythagorico. Ego sane etiam multa non contemnenda detexi ex occasione mei problematis; inter alia insignem quamdam proprietatem cycloidis, quae haec est: Super recta CD (fig. 69) descriptae semicycloides eaedem Ad, ad, ad etc. omnes normaliter secabuntur ab omnibus semicycloidibus iisdem Cb, cb, cb etc. super parallela Ab descriptis. Unde nescio quid peculiare accidit cycloidi; ejus enim evoluta est cyclois, ejus caustica est cyclois; nunc ejus normalis perpetua est itidem cyclois et quidem eadem. Haec vero omnia tria etiam conveniunt Logarithmicae spirali, quam Frater meus vocat Spiram mirabilem, in qua ego primus inveni, quod pro evoluta habeat spiralem eamdem. En igitur mirabilem affinitatem inter duas istas curvas. Si quis profundius perscrutari vellet, quae dico in schediasmate meo, amplam satis materiam pro hoc haberet. Curva nostra Brachystochrona infinitos habet casus particulares, ut si peteretur ex infinitis arcubus circularibus, qui per duo puncta data duci possunt, ille qui respectu reliquorum esset celerrimi descensus, id est, si eodem momento a puncto dato demitterentur gravia per singulos arcus, quinam ille esset, per quem grave citissime ad alterum punctum datum veniret: vel, si loco arcuum circularium substituerentur arcus aliarum curvarum determinatarum; vel etiam, si super linea recta duo data puncta conjungente erigantur infinita triangula isoscelia, vel triangula rectangula, vel aliae figurae rectilineares, semper posset quaeri casus citissimi descensus, adeo ut tot problemata particularia formari possent quot liberet, et sic nostrum problema generale consistere dici potest in inventione minimi infinitorum minimorum. Sed transeo ad nova quae sciscitaris.

Frater meus junior, nulla reperta statione Parisiis, reversus est in patriam, Dn. Hospitalius illum oneravit 3 vel 4 exemplaribus sui Tractatus novi de principiis calculi differentialis, quorum unum Tibi destinatur. Ex quo Dno. Haberstroh ad suas ad me

datas respondi, de illo nę γρὺ quidem audivi. Hactenus quidem nihil novi incidit de differentialibus ex analogia differentiarum et potentiarum, quia de eo de novo cogitare nondum vacavit: supersunt tamen nonnulla quae monebo, quando disputatio nostra fuerit finita.

Novitates Physico-Mathematicae quae ex Batavis ad me perveniunt, sunt oppido steriles. Audio Hugenium, praeter Volderum, constituisse Curatorem MSS. suorum Dominum Fullenium, Matheseos Prof. Franequeranum, destinatis pro labore utrique mille florenis Holland. de bonis suis.

Serione loquitur an jocatur Cluverius? Quidquid sit, non audiendus est? habeat meditationes quantumvis profundas, sane magno conatu magnas nugas dicit Act. 1687. pag. 586, quae nil conducunt, nisi ut matheseos imperitis contemtum inspirent contra scientias Mathematicas. Vereor ne sit ex eorum numero, qui vellent aliquid videri, sed cum nil habeant quod producant, in cortice misere haerent, nec tamen desinunt nucleum arrodere. Ego sic judico ex iis quae hucusque ab ipso vidi: quam enim dedit in Actis anni 1686 seriem pro quadratura circuli, non vacat examinare, qua lege progrediatur, et an sit justa; et si sit, nil novi, nil rari dedit; sed fallor, dedit utique aliquid insoliti, quadravit enim circulum saltem per seriem; ergo per seriem, ex data linea construxit Mundum Divinae menti analogum. O lepidum creatorem! sed joco id dixerim, animus non est offendere quemquam, forsan est Tuus amicus, forsan est Vir egregius; licet id nondum innotescat per scripta sua; nihil tamen laudi ejus detraham. Videtur ut dicam quod res est, easdem sibi quae Nieuwentitio minutias obstaculo esse, quominus nostra amplecti velit. Interim ex ejus ratiocinio quo evertere conatur quadraturam parabolae, liquido fluit, nec ipsum triangulum rectilineum habere rationem subduplam ad rectangulum circumscriptum, sed quis sanae mentis Geometra, praeter Cluverium, id negabit? Vale et ama etc.

Groningae d. 21 Julii 1696.

P. S. Nostine jam (quod aliquoties significare volui) quod Wallisius Opera sua universa duobus voluminibus contenta in folio cum argumentis de novo in lucem emiserit? Multa quidem habet, quae Te concernunt; sed calculum differentialem non ita laudat, uti decet. Suos Anglos, pro more suo solito, mirum quantum extollit. Prae illis nil fere est quod alii fecerunt.

Aegrotatne adeo Serenis. Tuus Elector, ut novellae nobis perhibent? Audio Electorem Brandeburgicum brevi in urbe vestra expectari; si hoc est, posses ex Ministris Ejus vel ipso illustrissimo Danckelmanno exsciscari, quid factum sit de sede mathematica Halensi. Dn. Ritmeyerus, quem mihi commendasti, retulit, illam etiamnum vacare; si nunc offeretur, sane non prorsus rejicerem. Ultimo cursore accepi literas a Dno. Menckenio, sed nullam facit mentionem prioris mei schediasmatis, adeo ut nesciam an problema meum jam sit impressum necne: scribit se accepisse aliquid a fratre meo Actis inserendum de curva Beauniana; subvereor fere ne iterum dentem suum caninum acuerit contra ea quae de ipsa hac curva proximo Februario a me prodierunt. Si quod vereor, verum deprehendero, ego Jovem lapidem jurare audeo, hac vice minime tacebo; alias putabit sibi omnia in me licere meamque moderationem et longanimitatem pro defectu responsionis interpretabitur. Nescio quid cavillari possit in iis, quae defensionis tantum loco protuli contra Nieuwentiitium, nisi forsan movebit curvam illam nihil aliud esse quam ipsissimam Logarithmicam, cujus applicatae ad axem non in angulo recto, sed semirecto insistunt; sed si hoc allegaret tanquam novum suum inventum, risui sese exponeret, cum et ipsi Cartesio jam innotuerit, ut ex Epistolis ejus apparet. Haec in antecessum moneo, ut si forte conjectura mea vera fiet, eorum recordari possis. Cures, rogo, ut inclusae ad manus Dni. Menckenii tuto perveniant. Schediasma vero retineas, donec Tuam] solutionem publicare animus sit, ut simul Lipsiam mittantur. Forsan nunc recepisti Acta, ut mihi dicere possis, an problema meum iu illis sit. Iterum Vale.

Beilage.

Joh. Bernoullii

Curvatura Radii in Diaphanis non uniformibus. Solutio Gemina analytice inventa et synthetice demonstrata Problematis a se in Actis 1696 *p.* 269 *propositi de invenienda Linea Brachystochrona, id est, in qua grave a dato puncto ad datum punctum brevissimo tempore decurrit, et Constructio Curvae Synchronae.*

Tot quidem hactenus apparuerunt methodi, quas Maximorum et Minimorum vocant, ut nihil fere tam subtile restare videatur hanc concernens materiam, quod earum acumine pene-

trare se posse non putent illi, qui se vel auctores ipsos vel autorum asseclas gloriantur. Interim jurent, quantum volent, in verba magistri; videbunt, si tentare velint, nostrum problema minime coërceri intra angustos methodorum suarum limites, qui eo usque tantum sese extendunt, si ex datis pluribus infinitisve quantitatibus invenienda sit una maxima vel minima. Verum ubi ipsae quantitates, quod in nostro contingit, ex quibus eligenda maxima vel minima, non magis sunt determinatae, quam id ipsum quod quaeritur, hoc opus, hic labor est. Prodeant Cartesius, Fermatius, Robervallius aliique qui olim ita acriter pro praestantia suae cujusque methodi, tanquam pro focis et aris militabant, et fateantur ingenue hic sibi aquam haerere. Non meum est nec etiam volo aliorum inventa explodere. Praestiterunt utique multa, et finem quem sibi proposuerant egregie consecuti sunt. Quemadmodum enim de hujusmodi Maximorum et Minimorum consideratione nil quicquam in eorum scriptis reperitur: ita pariter, pro aliis quam communibus resolvendis, suas methodas non venditarunt.

Non ego polliceor universalem methodum, quam quis frustra quaereret; sed peculiares modos, non solum quidem in hoc, sed in pluribus aliis succedentes, quibus problema hoc feliciter enodavi, solutionemque meam, dum alii alias quaererent, Celeb. Leibnitio statim submittere decrevi, ut illam quondam cum publico communicaret cum sua, si quam reperiret; de quo quidem non dubitabam, sagacissimi Viri ingenium plus satis compertum habens: et reapse, dum haec scribo, ex privatis ejus literis, quibus me crebro cohonestat, intelligo, supra spem ipsi placuisse problema meum, et (quod illum, ut dicit, pulchritudine sua, ut pomum Evam, ad se traheret) protinus solutionis factum esse compotem. Quid alii praestiterint, exitus monstrabit: dignum utique oportet sit hoc problema, cui solvendo aliquid temporis consecrent Geometrae, cum tanto viro, negotiis licet distractissimo, tale visum fuerit, ut horam suam non inutiliter collocasse existimaret. Et id ipsum illis satis lucri esto, quod si solverint ad secretissimas veritates, quas sine hoc vix est ut assequantur, aditum habituri sint.

Quidquod magis miramur, quam quod Hugenius primus invenit, in Cycloide vulgari grave facere descensus isochronos, a quocunque Cycloidis puncto incipiat moveri; sed nescio, an non obstupescas plane, cum dixero, hanc ipsissimam Cycloidem iso-

chronam Hugenianam esse nostram **Brachystochronam** quaesitam, ad cujus cognitionem duabus viis perveni, indirecta altera, altera directa. Insistendo priori, mirum consensum detexi inter curvitatem Radii luminis in medio continue variante et curvam nostram brachystochronam, aliaque observavi, in quibus nescio quid arcani subest, quod proderit in Dioptricis. Quamobrem verum erit quod in propositione problematis asserueram, non in nuda speculatione consistere, sed in aliis scientiis, in Dioptricis puta, usum habere quam maximum. Sed ut quae diximus re ipsa confirmentur, en priorem solvendi modum!

Fermatius in Epistola ad De la Chambre (Vid. Epist. Cartesii Edit. Lat. Tom. III. p. 147 et Fermatii opera Mathem. p. 156 seqq.) stabilivit, radium luminis ex medio rariori in densius transeuntem ita refringi ad perpendicularem, ut, habita ratione temporis, radius (qui a puncto luminante ad punctum illuminatum successive procedere supponitur) viam faciat brevissimam: ex quo principio ostendit, sinum anguli incidentiae esse ad sinum anguli refractionis in ratione data directa mediorum raritatum vel reciproca densitatum, id est, in ipsa ratione velocitatum, quibus radius media penetrat. Quod postea acutissimus Leibnitius in Act. Erud. 1682 p. 185 seqq. et Celeb. Hugenius in suo Tractatu de Lumine p. 40 succinctius demonstrarunt, ipsumque principium physicum vel metaphysicum potius, quod Fermatius sua demonstratione geometrica contentus, et facile nimis de jure suo decedens, Clerselerio urgente, deseruisse videtur, validissimis argumentis adstruxerunt.

Si nunc concipiamus medium non uniformiter densum, sed velut per infinitas lamellas horizontaliter interjectas distinctum, quarum interstitia sint repleta materia diaphana raritatis certa ratione accrescentis vel decrescentis; manifestum est, radium quem ut globulum consideramus, non emanaturum in linea recta, sed in curva quadam (notante id jam et ipso Hugenio in eodem tractatu de Lumine, sed ipsam curvae naturam minime determinante) quae ejus sit naturae, ut globulus per illam decurrens celeritate continue aucta vel diminuta, pro ratione graduum raritatis, brevissimo tempore perveniat a puncto ad punctum. Constat quoque, cum sinus refractionum in singulis punctis sint respective ut raritates medii vel celeritates globuli, curvam habere eam proprietatem, ut sinus inclinationum suarum ad lineam verticalem sint ubique in eadem ratione celeritatum. Quibus praemissis, nullo negotio per-

spicitur, Curvam Brachystochronam illam ipsam esse, quam formaret radius transiens per medium, cujus raritates essent in ratione velocitatum, quas grave verticaliter cadendo acquireret: sive enim velocitatum incrementa dependeant a natura medii magis minusve resistentis, ut in radio, sive abstrahatur a medio et ab alia causa acceleratio, eadem tamen lege generari intelligatur, ut in gravi; cum utroque in casu curva brevissimo tempore percurri supponatur, quid vetat, quo minus altera in alterius locum substitui possit?

Sic generaliter solvere licet problema nostrum, quamcunque statuamus accelerationis legem. Eo enim reductum est, ut quaeratur curvatura radii in medio secundum raritates, prout libuerit, variante. Esto ergo medium FGD (fig. 70) terminatum ab horizontali FG, in qua punctum radians A, verticalis AD axis curvae datae AHE, cujus applicatae HC determinant raritates medii in altitudinibus AC, vel velocitates radii seu globuli in punctis M; radius incurvatus ipse qui quaeritur, AMB. Vocentur AC, x; CH, t; CM, y; differentialis Cc, dx; different. nm, dy; diff. Mm, dz; constans quaedam ad arbitrium assumta, a. Erit accepta Mm pro sinu toto, mn sinus anguli refractionis seu inclinationis curvae ad verticalem, et proinde per ea, quae modo diximus, mn est ad HC in ratione constante, id est, $dy.t = dz.a$; quod hauc suggerit aequationem, $a dy = t dz$, seu $a a dy^2 = t t dz^2 = t t dx^2 + t t dy^2$, quae reducta generalem dabit aequationem differentialem $dy = \frac{t dx}{\sqrt{aa - tt}}$ pro curva AMB quaesita. Atque adeo una opera duo insignia problemata, opticum unum, mechanicum alterum, ultra quam ab aliis petebam, resolvi, ostendique, quamvis ex diversissimis Matheseos partibus sint desumta, ejusdem tamen esse naturae.

Sumamus jam specialem casum, et quidem hypothesin communem a Gallilaeo primitus introductam et demonstratam, quod velocitates gravium cadentium sint in ratione subduplicata altitudinum emensarum; in hoc enim proprie quaestionis tenor consistit. Quo supposito, curva data AHE erit parabola, id est, $tt = ax$ et $t = \sqrt{ax}$, quae si substituantur in aequatione generali, habebitur haec $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a - x}}$, ex qua concludo Curvam Brachy-

stochronam esse Cycloidem vulgarem. Si enim circulus GLK, cujus diameter $= a$, rotetur super AG et initium rotationis sit in ipso A, describet punctum K cycloidem, quae reperitur eandem habere aequationem differentialem $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, positis AC, x, et CM, y; potest tamen hoc a priori et analytice inveniri sic: $dx\sqrt{\frac{x}{a-x}} = \frac{xdx}{\sqrt{ax-xx}} = \frac{-adx+2xdx}{2\sqrt{ax-xx}} + \frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}}$ est autem $\frac{adx-2xdx}{\sqrt{ax-xx}}$ differentialis quantitas, cujus summa $\sqrt{ax-xx}$ seu LO; et $\frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}}$ est differentialis ipsius arcus GL; ideoque, summata aequatione $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, habebitur y seu CM $=$ GL $-$ LO, ergo MO $=$ CO $-$ GL $+$ LO; quoniam vero (assumta CO $=$ semiperipheriae GLK) CO $-$ GL $=$ LK, erit MO $=$ LK $+$ LO, et ablata communi LO, erit ML $=$ LK; quod docet curvam KMA esse Cycloidem.

Ecce jam alteram viam, qua directe ad solutionem perveni. Sit horizontalis, a qua grave descendit AL (fig. 71), quam oblique secent duae lineae MK, mK angulum facientes infinite parvum MKm; nunc ex omnibus arculis concentricis Ce, Mm, Ce etc. centrum habentibus in K quaero illum Mm, quem grave ex altitudine sua DM delapsum brevissimo tempusculo percurrat, quo cognito habebo relationem inter MN et NK; verum ex infinitis arculis Mm componitur ipsa curva brachystochrona quaesita AMB, cujus radius circuli osculatoris est MK, quo determinato determinatur etiam curva AMB.

Cum igitur secundum hypothesin communem Galilaeanam (generalem solutionem, quam quilibet ad hujus imitationem nullo labore adinveniet, brevitatis erga omittimus) celeritates in C, M, C sint ut $\sqrt{CG}$, $\sqrt{MD}$, $\sqrt{CG}$, seu ut $\sqrt{CN}$, $\sqrt{MN}$, $\sqrt{CN}$; ipsi vero arculi Ce, Mm, Ce ut radii CK, MK, CK; atque cum spatia divisa per celeritates dent tempora, erunt tempuscula per Ce, Mm, Ce ut $\frac{CK}{\sqrt{CN}}$, $\frac{MK}{\sqrt{MN}}$, $\frac{CK}{\sqrt{CN}}$, et quoniam tempusculum per Mm debet esse minimum, fiet (positis NK, b, et MN, s) $\frac{MK}{\sqrt{MN}} = \frac{b+s}{\sqrt{s}} =$

minimo, ejusque proin differentiale $\frac{-bds+sds}{2s\sqrt{s}} = 0$, unde $s = b$. Curva itaque quaesita ejus debet esse proprietatis, ut habeat utique radium circuli osculatoris vel ut Hugenio dicitur, radium evolutae MK duplum suae portionis MN inter axem et curvam interceptae. Verum ut ab ipso Hugenio aliisque demonstratum habemus et facile a priori, ut antea, nisi brevitati studeremus demonstrare possemus, proprietas haec cycloidis est. Unde et hac via directa rursus incidimus in identitatem Brachystochronae cum Cycloide, quod sane non exiguum pondus addit veritati eorum, quae de curvitura radii diximus, apud illos praesertim valiturum quibus hujusmodi indirecta ratiocinia suspecta habentur.

Sed ut illi quoque qui nostro calculandi genere minus versati sunt, habeant quod intelligant, dignentur attente perlegere demonstrationem syntheticam, quae utut facilis et cuivis obvia, meo tamen judicio insoliti quid et inexpectati in se continet, ut forsan curiosis penitius in haec mysteria inquirendi ansam sit praebitura.

Sunto duo puncta data A et B, per quae transeat cyclois AMB initium sumens a puncto superiori A, dico mobile M libere descendens gravitate sua ab A per cycloidem AMB breviori tempore perventurum ad B, quam si descenderet per quamcunque aliam curvam ACB supra infrave descriptam a puncto A ad punctum B. Sint MK, mK duae normales ad cycloidem quam proximae, secantes lineam ACB in punctis C, c, et concurrentes in K, quo centro describatur arculus Cc. Ducantur ad horizontem AL perpendiculares MD, CG, junctaeque DK secanti CG in H agatur parallela GJ, atque tandem sumatur ad MD, CH tertia proportionalis CF. Jam ex proprietate cycloidis $MN = NK$, ac proinde $CN = NJ$, et quia $\square CN + \square NK > 2 \sqsubset CNK$, erit $\square CN + \square NK + 2 \sqsubset CNK$ id est $\square CK > 4 \sqsubset CNK = \sqsubset MK \times CJ$, ergo $MK . CK < CK . CJ$; est autem $MK . CK :: MD . CH :: CH . CF$, et $CK . CJ :: CH . CG$, ideoque $CH . CF < CH . CG$, et per consequens $CG < CF$. Nunc per regulas receptas gravium descendentium patet tempusculum, quod grave descendens ex horizonte requirit ad percurrendam lineolam Mm, esse ad tempusculum, quod grave descendens ex eodem horizonte requireret ad percurrendum arculum Cc, in ratione composita ex simplici directa spatiolorum percurrendorum Mm, Cc et subduplicata reciproca

altitudinum MD, CG, id est tempus per Mm . tempus per Cc :: $\frac{Mm}{\sqrt{MD}}$ $\frac{Cc}{\sqrt{CG}}$ :: (ob Mm . Cc :: MK . CK :: MD . CH :: $\sqrt{MD} . \sqrt{CF}$) $\frac{\sqrt{MD}}{\sqrt{MD}} . \frac{\sqrt{CF}}{\sqrt{CG}}$ :: $\sqrt{CG} . \sqrt{CF}$; quoniam autem CG ostensa est minor quam CF, erit etiam tempus per Mm minus quam tempus per Cc, et potiori jure minus quam tempus per Cc hypotenusam trianguli rectanguli Cec. Ergo tempus per omnes Mm, id est per cycloidem AMB est minus quam tempus per omnes Cc, id est per lineam AcB. Q. e. d.

Ostendendum adhuc restat (ut problemati plenissime satisfiat) quomodo a puncto dato tanquam vertice describenda sit brachystochrona seu cyclois transitura per aliud punctum datum, quod sic facillime expeditur: Conjungantur duo puncta data A, B (fig. 72) per lineam rectam AB, et super horizontali AL describatur cyclois, quaecunque libuerit, initium sumens in A secansque rectam AB in R; quo facto fiat ut AR ad AB, ita diameter circuli genitoris cycloidis ARS ad quartam, quae erit diameter circuli genitoris cycloidis quaesitae ABL transiturae per B.

Antequam finiam, non possum quin iterum admirationem meam prodam, animo revolvens inexpectatam illam identitatem isochronae Hugenianae nostraeque Brachystochronae. Quod notabile praeterea existimo, illud est, quod haec identitas in sola hypothesi Galilaei reperitur, adeo ut vel eo conjicere liceat illam Naturae esse consentaneam, quod quemadmodum semper operari solet modo simplicissimo, ita et hic per unam eandemque lineam praestet duo diversa officia, cum in quavis alia hypothesi duabus ad id opus esset lineis, alia nempe pro oscillationibus aequediuturnis et alia pro celerrimo descensu. Ut si ex. gr. celeritates gravium cadentium essent non in subduplicata, sed subtriplicata ratione altitudinum, brachystochrona foret algebraica, isochrona autem transcendens; verum si celeritates essent ut ipsae altitudines, utraque fieret algebraica, illa quidem circularis, haec vero recta.

Non ingratum fore Geometris judico, si appendicis loco solutionem ipsis dedero problematis consideratione pariter dignissimi, quod ex occasione praecedentis inter scribendum in mentem incidit: **Quaeritur in plano verticali curva (fig. 73) PB (quam Synchronam appellare liceat) ad cujus singula**

puncta B grave ex A descendens per cycloides conterminas AB aequali tempore perveniret. Sit AG horizontalis et AP verticalis: sensus problematis talis est, ut descripta super AG cycloide quacunque abscindatur ex illa portio AB, ad quam percurrendam ex A descendens grave idem tempus requirat, quod requireret ad decidendam ex determinata altitudine verticali AP; quo peracto erit punctum B in curva synchrona PB quam quaerimus.

Si attente considerentur ea quae supra diximus de radio luminis, haud obscure patebit hanc curvam eam ipsam esse, quam Hugenius in suo tractatu de Lum. pag. 44 in schemate suo per lineam BC repraesentat vocatque undam, quae quemadmodum omnes radios ex puncto luminoso emanantes normaliter secat, ceu optime notat Hugenius, ita et nostra PB omnibus cycloidibus AB commune initium A habentibus ad angulos rectos occurrit. Quod si problema hoc modo in pure Geometricum reductum proponere libuisset, Invenire scilicet curvam quae omnes cycloides communis initii normaliter secat, profecto res magnae molis fuisset, Geometris ne dicam insuperabilis. Loco quod ex altera facie qua descensum gravium respicit, consideratum ita facillime construo: Sit Cycloidis ABK circulus genitor GLK, ejusque diameter GK; abscindatur arcus GL aequalis mediae proportionali inter determinatam assumtam AP et diametrum GK: dico ductam LB parallelam horizontali AG, secare cycloidem ABK in puncto B, quod erit in curva synchrona quaesita PB. Si quis methodum suam in aliis exercere velit, quaerat Lineam quae ordinatim positione datas curvas (non quidem algebraicas, quod haud arduum foret, sed) transcendentes ex. gr. logarithmicas super communi axe et per idem punctum ductas ad angulos rectos secat.

XXXI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Jucundum mihi fuit videre consensum nostrarum problematis a Te propositi solutionum, cum ejusdem lineae constructiones, licet diversas, dederimus. Ego contentus fui reperisse, quomodo

linea per tetragonismum circuli construi possit, non immoratus problemati, egregio licet, quod vix, ut aggrederer, a tempore meo impetrare poteram. Tu longius progressus cycloidem ipsam esse pulchre reperisti. Quod editionem attinet, consuluerim adhuc nonnihil expectari, ut appareat quid alii quoque praestent, inprimis Dominus frater Tuus, imo et Dominus de Tschirnhaus, praesertim cum terminum, ni fallor, assignaveris. Cum Dominus Marchio Hospitalius (a morbo gravi restitutus) etiam ad me nuper alia occasione scripserit, sese nunc a meditationibus ejusmodi abstinere debere, putem ipsi Solutionem posse communicari, si Tibi ita videtur, et posse inseri problematis propositionem in Diarium Eruditorum Parisinum, ut viri docti excitentur. Idem etiam in Italia faciendum puto. Spero Tua Mensi Junio inserta esse, etsi nec verbulo ad me attigerit Dnus. Menckenius. Necdum ego Junium accepi, negligentia libraria nostri, qui credo nundinas Brunswicenses mox instantes expectat. Interim monui Dnum. Menckenium, ut si nondum factum, mature Tua edi curet.

Caeterum ubi solutionis comprobationem edere vel communicare placebit, suaserim viam illam directam, quam vocas, seu posteriorem, non edi, cum prior sufficiat ad demonstrationem, et posterior praeter necessitatem aliis ante tempus viam aperiat. Praestat enim (ut puto) nonnihil adhuc suspensos alios teneri, ut vel ipsi inveniant aliquid fortasse a nostris diversum, quod augebit scientiam; vel agnoscant, non esse haec tam facilia, ut quidam putant, eoque diligentius has methodos aliquando meditentur. Methodus mea nonnihil a Tua diversa est, sed tamen eodem duxit, quam ut aequum est, et ut Tuo candori pari ingenuitati respondeam, sic paucis habeto. Concipiens scilicet pro curva polygonum infinitangulum, video id fore omnium possibilium facillimi descensus, si sumtis in eo (fig. 74) tribus punctis vel angulis quibuscunque A, B, C, sit punctum B tale, ut omnium punctorum in recta DE horizontali, hoc unum det viam ab A ad C facillimam. Res ergo redit ad solutionem problematis facilis: Datis duobus punctis A et C et recta horizontali inter ea cadente DE, invenire in hac recta punctum B tale, ut via ABC sit facillima. Ubi prodeunt, quae in novissimis literis notavi circa elementa abscissarum, ordinatarum et arcuum; si scilicet infinite parvum inter puncta A, B, C, ponatur intervallum. Nec opus est ut aliquid ultra apud Te addam, et transcribere calculum non vacat, nimis distracto.

Mitto ecce quae Dn. frater Tuus mensi Julio inseri curavit circa problema Beaunianum extensum, ut vocat, transmissa mihi a Dno. Menckenio, quia me tangunt. Videbis nihil ibi esse, de quo queri debeas. Vult in quibusdam a me dissentire, quorum aliqua non satis intelligo, tum quia figurae absunt in his quae misit Dnus. Menckenius, tum etiam quia nondum possum rem considerare et prioribus conferre. Ut ego rem capio de punctis aequidistanter assumtilibus non videtur esse difficultas. Quod deviationem navis attinet, fateor, si circumstantias practicas negligamus, et rem rudius concipiamus, posse dici eandem esse deviationem, quocunque vento; quanquam rem paulo accuratius adhuc examinare aliquando velim, sed majore otio. Dn. Frater Tuus proposuerat aequationem differentialem solvendam; eam redire ad aliam, quam non difficulter solvimus, notavi; et id nunc fassus dat hujus ipsius solutionem praeter necessitatem, cum mihi et Tibi quoque non possit esse ignota, et Domino Marchioni olim a me fuerit perscripta. Sed videtur quaesiisse ut primus ederet.

Mitto et quae Dn. Nieuwentiit petiit Actis inseri circa problema Beaunianum a Te solutum, quibus Tibi respondet. Mihi videtur non esse tanti quae dicit, cum problema hoc sit jam satis elaboratum, ut aliquid ultra addendum non videatur; et scripsi Dno. Menckenio, hortandum potius Dnum. Nieuwentiit, ut aliquid novum attingat, in quo suas vires experiri possit; praesertim cum Methodum, nescio quam Barrovianam, vel suam jactet, cujus utile est ut meliora det specimina. Misi tamen Tibi, ut cum judicio Tuo, si placet, remittas. Mea mens non fuit, ut Tu ad eum scriberes, sed potius ut ille ad Te.

Gratias ago pro reliquis excerptis Hugenianis. Videtur interdum paulo rigidius judicare. Ex. gr. cum de Weigelio, viro docto et bene animato, contemtim adeo loquitur; Matheseos imperitum dicere iniquum est, etsi non satis peritus sit artis Analyticae profundioris. Cum reliquos Tomos obtinebis, itidem excerpta rogabo.

Quod descensum gravium attinet, nondum agnoscere potui, quomodo fieri queat, ut materiae gravificae partes totam vim suam in grave transferant. Si homo malleo percutiat puppim, singulis aequalibus spatii intervallis, non tamen tota vis mallei potest in navem transferri. Et difficulter elici potest, ut quovis spatii intervallo fiat ictus, per quem aequalis vis navi accedat. Posita tamen tali hypothesi, omnia pulchre procedunt. Hoc dico, ut Tibi occa-

sionem dem perficiendi cogitata, praesertim cum mihi applicatio ad gravitatem difficilis videatur. Facile efficitur amissio virium aequabilis secundum spatium, acquisitio non item.

Quod attinet a me assumta, fateor propositionem illam, quod actio faciens idem, brevi tempore, sit major, posse assumi ut Axioma; sed scito apud me omnis Axiomatis adhibendi desiderari demonstrationem, alioqui imperfectam esse scientiam. Et qui hoc Axioma demonstrabit, simul credo et ad illud alterum, cujus desideratur demonstratio, viam aperiet. Minime tamen improbo, si quis talia sine demonstratione assumat. Caeterum sunt (opinor) quaedam, quae sine illo principio altero non demonstrabuntur. Obscurum non puto, si recte intelligatur. Nobis tamen suffecerit assumtum a me pro aestimanda actione adeoque et potentia, donec ejus quoque occurrat rigorosa quaedam demonstratio. Semper distinxi actionem a potentia, sed quomodo inferatur ab una ad aliam, in novissimis exposui, idque putavi Tibi placiturum.

Brachystochronae appellatio magis mihi placet pro generali significatione; Tachystoptotae vero nomen posset speciali accommodari, cum agitur de gravis descensu seu casu. Perpulchra mihi videntur, quae habes de linea radii in medio continue variante, et de linea alias infinitas normaliter secante, quod problema excoli meretur.

De Dn. fratre Tuo juniore, et libro suo etiam ad me scripsit Dn. Marchio Hospitalius. Miror quod frater non diutius haeserit Parisiis.

Wallisiana opera vidi, et quae in illis Newtoniana, in quibus sperabam reperire aliquid amplius pro Methodo tangentium inversa; interim virum esse egregium fatendum est. Wallisius antiquum obtinet cum multis aliis Anglis, ut de rebus aliorum loquatur contemtius. David Gregorius, in libro quodam optico novissimo, secundum consilium meum in Actis datum, pro sectionibus conicis substituit circulos osculantes; videbo aliquando, ubi ipsum librum videro, an sit professus per quem profecerit.

A Domino Fullenio, Professore Matheseos Franequerano, Hugenianorum Manuscriptorum curatore, non memini aliquid me videre. Puto neminem nunc esse in Batavis post Hugenii obitum (Huddenio demto, sed quem aliae jam cogitationes tenent), qui Tibi non cogatur submittere fasces.

Cum transiret Elector Brandeburgicus, nondum Tuas acceperam, et si accepissem, non habuissem occasionem colloquendi cum primo Ministro ob brevem hic moram. Spero in reditu diutius apud nos mansurum, et tunc inquiram. Cum ad novissima Dn. Fratris Tui respondere vacabit, potero me erga Te promisso defungi.

Dominus frater Tuus misit mihi quamdam suam disputationem De seriebus infinitis summandis, ubi tamen nihil notavi, quod novum mihi videatur. Item quasdam suas Notas in Geometriam Cartesii. Item quoddam scriptum Domini Hollanderi. Haec omnia Tibi visa puto. Misit mihi etiam pauculas quasdam Analyses suas datarum in Actis, quae possint aliquando servire additionibus pro ea quam molior Scientia infiniti. Sed a Te plura ejus generis spero. Vale, et has scientias praeclaris ingenii Tui foetibus ornare perge. Ita plurimum voluptatis capiet etc.

Hanoverae 31 Jul. st. v. 1696.

XXXII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

In eo eram, ut aestivis hisce feriis ad Te exspatiando ipse harum latorem agerem, quo viva conversatione Tua jam a longo tempore mihi desiderata ad satietatem frui potuissem; sed iter grandiusculum, oeconomia nondum constituta, et sanitas nondum restituta unici mei filioli per aliquot jam menses periculose aegrotantis, a proposito me abduxerunt et in aliam occasionem id differre me fecerunt.

Cum Tibi transmitterem solutionem meam problematis a me propositi, utique mens mea non fuit, ut illam statim publicares, sed expresse Te rogavi, ut quondam illam edas cum Tua; volui tamen in tempore Tibi mittere, ut si forte opus fuerit, testari possis, me non eum in finem proposuisse problema, ut aliorum Solutiones, si quae appariturae sint, mihi sub velata facie arrogare possem, id quod fratri meo admodum solemne est. Optime ergo facis, si exspectas terminum assignatum, nimirum anni hujus finem. Non puto Dn. Tschirnhausium hic quicquam praestiturum, cum

nequidem in Catenaria aliquid praestiterit, quia forsan sua applicatione haec non digna censet. Sed quantum ad fratrem, hic Rhodus, hic saltus! videbimus an iterum ova ante prandium appositurus sit. Communicabo Dn. Marchioni Hospitalio solutionem si illam petierit. Non displicet problematis propositionem inseri posse in Diarium Parisinum et Italicum: oportet autem ut Tute hoc cures, etenim cum Italis nihil mihi commercii est; Auctor vero Diarii Parisini adeo nostra vilipendit (quod saepius expertus sum) ut forsitan terminus prius elaberetur, quam problema lucem videret. Quod Dnus. Menckenius nec ad Te nec ad me verbulo attigerit, dubito an mensi Junio mea inserta sint, licet illum iteratis vicibus instanter rogaverim, ne de brevitate termini pro solutione problematis concessi conqueri liceat. Quod si finem hujus temporis expectaveris, non video quid impediat, quominus altera mea solvendi via, quam directam voco, simul cum priori edatur; tunc enim aliis non amplius ante tempus viam aperiet, sed bene lucem accendet pro aliis hujusmodi inquisitionibus instituendis, quibus Maximorum et Minimorum methodus mirifice extendi potest, ut ipse agnosces, si illam paulo penitius contemplari lubeat. Adde quod jam in propositione problematis innuerim, duobus diversis modis me ad eandem solutionem pervenisse. Tuus solvendi modus nihil fere diversus est a meo priori, concipiendo enim viam facillimam a puncto ad punctum per punctum quaesitum, jam involvis problema Fermatianum, illudque de novo calculas, quod a Fermatio aliisque et a Te ipso Act. 1682 p. 186 jam calculatum habemus, atque quod ego supposui.

Dicis Te mihi mittere, quae Frater meus mensi Julio inseri curavit, sed non misisti; haud dubie Schedam literis includere oblitus es; rogo ut illam mittas cum proxime Tuis futuris. Quam proposuerat aequationem differentialem solvendam, plane non aestimo; quid enim facilius est quam infinitas hujusmodi aequationes excogitare, quas ille qui illas proposuit semper nullo labore solvet, eo quod ipse illas per synthesin ita formaverit, loco quod alii forsan per totam vitam frustra insudarent. Non secus ac quivis in Algebra Tyro non difficulter aequationem vel viginti dimensionum componere iterumque solvere potest, quam tamen versatissimus Algebrista nequidem aggredi auderet.

En remitto Schediasma Dni. Nieuwentiit; gratias ago pro communicatione; meum judicium scripsi ad marginem, ut si forte Dn.

Menckenius hoc schediasma Actis inserere velit, simul responsionem quasi suo nomine adjicere possit. Sunt enim tam frivola, ut vel Geometriae imperitus paralogismos palpare queat, nec a me impetrare possum, ut illa formali responsione digner. Miror qui fieri possit, ut Dn. Nieuwentiit in re adeo levicula haerere possit; concedit bonitatem constructionis meae (quam tamen in suis considerationibus pag. 41 rite examinatam ad absurdum deducere diserte dicit) sed omnis ipsius objectio in hoc consistit, quod putet adhibendum esse $r\,d\,z = + z\,d\,y$, non autem $r\,d\,z = - z\,d\,y$; interim dormitans iste Homerus confundendo $d\,z$ affirmativum cum $d\,z$ negativo, non consideravit quod existente $d\,z$ ab una parte affirmativo, et ab altera negativo, $r\,d\,z = + z\,d\,y$ sit idem quod $r\,d\,z = - z\,d\,y$. Caeterum magnam habet farraginem solutionum problematis Beauniani, quarum operosus calculus et tot literarum confusio non permiserunt, ut illas examinarem. Quid tandem haec omnia contra me, qui volui probitatem constructionis meae unice defendere? Hoc autem feci et ille factum agnoscit; ergo nil amplius rei mihi est cum illo. Si quid scrupuli invenit in calculo differentiali, id jam Te illius Auctorem concernit. Desero ego palaestram. Interim rursus dico, Dn. Nieuwentiit aut pertinax est aut indocilis. Potitus sum tandem reliquis Actorum Tomis, sed marginalia Hugeniana exscribere nondum vacavit; ea Tibi prima scribendi occasione transmittam.

Cum nihil dicas de modo meo distinguendi inter actionem venti et illam materiae gravificae, puto ex silentio Te consentire, quod numerus ictuum sit spatio proportionalis. Quod de homine puppim malleo percutiente dixeram, mihi negare non debes, erat enim tantum hypothesis. Revera tamen necesse est, ut malleus totam suam vim in navem transferat, si dum percutit, incomparabiliter celerius moveatur quam ipsa navis; id quod facile possum demonstrare, nam post ictum malleus eam saltem retinet celeritatem, quam navis jam habet, id est infinitesimam partem celeritatis, qua malleus in navem impingit; ergo retinebit etiam tantum infinitesimam partem suae vis quam ante ictum habebat; et proinde tota mallei vis, demta infinitesima parte, id est nihilo, translata est in navem; abstraho enim hic a materia ambiente, in qua aliqua pars vis absorberi potest, et suppono navem esse solidissimam et omnis tremoris expertem. Hinc, ni fallor, satis perspicitur, quod etiam particulae materiae gravificae totam suam vim in grave

transferre debeat, si modo concedatur post ictum non statim repercuti, quod et ipse jam concessisti.

Oportet ut defiuias quid per actionem intelligas; alias nihil unquam demonstrari poterit. Omnis veritas aut est Axioma aut ex Axiomatibus derivata; oportet ergo ut ad demonstrandam illam in aliquo Axiomate subsistas, ne in infinitum progredi cogaris; miror itaque quod dicis, Te omnis Axiomatis adhibendi desiderare demonstrationem. Quidni et in dubium vocas, au Totum sit majus sua parte? Sed ut ad actionem redeam, da mihi definitionem nominis et facile difficultatem diluam. Si enim per actionem intelligas solum effectum non considerato quanto tempore sit productus, tunc utique actio A faciens idem brevi tempore, non erit major, sed aequalis actioni B facieuti idem longo tempore, quia effectus producti sunt aequales. Si vero per actionem intelligas compositum ex effectu producto et tempore, tunc actione A major erit quam actio B. Haec, ni fallor, nituntur sensu communi; sin minus, mentem Tuam non satis assequor.

Cum meam curvam appellarem Brachystochronam, id feci ex consideratione Isochronae Hugenianae, ut cum eidem curvae competant, habeant etiam nomina quam maxime affinia. Nihil dicis de curva, quam appello Synchronam, [quamque adeo simpliciter construo, etiamsi pro illa nullam invenerim aequationem differentialem, nec hucusque aliquam inveniendi viam perspiciam. Vellem novae huic speculationi otiosa aliquot momenta tribueres, ut et alteri illi exemplo, quod proposui de invenienda curva omnibus Logarithmicis communis axis et ex eodem puncto descriptis normali. Scire Te velim hujus mihi solutionem esse repertam, paulo post ultimas meas ad Te cursori traditas. Inveni quod sit curva ex Percurrentium genere, ut voco, quam proinde ope ipsius Logarithmicae facillime construo. Est sane exemplum, ubi calculi percurrentis usus insigniter elucet.

Wallisius Newtoni Methodum paucis quidem explicat; ex illis paucis tamen video quod in re neutiquam differat a calculo differentiali, ut ipse Newtonus fatetur in suis Princ. Phil. nat. p. 254. Quod in hoc dicitur differentiale, ibi est fluxio, et quod in hoc summa, ibi fluens. Et nervus hujus methodi, ut et calculi differentialis ad duo haec problemata redit: Datis quantitatibus fluentibus, invenire earum fluxiones; et vicissim: Datis fluxionibus, invenire earum fluentes. Loco

literae d ad designandam differentiam primam vel fluxionem utitur puncto supra scripto; pro differentia secunda vel fluxione fluxionis denotanda utitur duobus punctis, et in porro. Sic dx est $\dot{x}$, ddx est $\ddot{x}$, dddx est $\dddot{x}$ etc. Caeterum processus ipse operationis est utrobique idem, adeo ut nesciam annon Newtonus, Tuo calculo viso, suam demum Methodum fabricaverit, praesertim cum ex loco citato videam Te ipsi Tuum calculum communicasse, antequam ipse suam edidisset Methodum. De caetero Wallisius Tom. II. p. 394 modum explicat, quo utitur Newtonus ad radicem extrahendam ex aequatione fluxionem radicis involvente, et quidem per seriem. Sed universali meae seriei palmam non praeripiet. Est enim ille modus Newtonianus admodum operosus, et fere idem cum Tuo, quem vero longe succinctiorem et ad praxin aptiorem reddidisti in Act. 1693 p. 178. Legistine ultima verba explicat. method. Newton. p. 396? Quod agnitum est a quodam etc. Ille quidam quem ne nominare quidem dignatur, est frater meus; vides quantum ipsi obstrictus sis, quod Wallisio Author fuerit, ut tam honorifice de Tuo calculo sentiret, dicendo totum desumtum esse ex methodo Barroviana, excepta superaddita formularum analyseos brevium et commodarum adoptatione illius theoriae. Non dubito quin persuasus sis, Te habere in me aequiorem aestimatorem Inventorum Tuorum, quam in fratre, qui illa etiam subtilissima cum artificiolis Praestigiatorum comparat in Actis superioris anni p. 552.

Dn. Fullenium in Cartesiana quidem satis, sed non item in interiori Geometria versatum puto. Memini quod ante quindecim circiter annos, cum in utraque adhuc hospes essem, Frater meus Dn. Fullenium crebro consulebat per literas super ea, quae tunc temporis non probe intelligebat in Cartesii Geometria; me etiam non defugit, quod Dn. Fullenius ipsi roganti omnia fideliter et (quod miror) patienter explicabat: nescio unde hoc commercium ortum suum traxerat (forte cum frater paulo ante in Batavis esset) et nescio item quo facto iterum interciderit; forte etiam cum frater Fullenii opera non amplius indigeret, hoc enim omnes beneficiorum immemores faciunt. Cum et Tu primis literis ipsi, super suas difficultates satisfecisses, parum sollicitus fuit de actione gratiarum praestanda, ut abunde testatus est turpi suo silentio etiamnum forte duraturo, nisi illum in literis Tuis ad me datis quasi debiti postulasses. Quid Tibi videtur de scripto Hollanderi: habet

multa Astronomica, quae certis regulis coërcet, quae tamen humanitus pure fortuita videntur. Ex. gr. Regula ejus prima de invenienda obliquitate Eclipticae terrae aut non est exacta et observationibus non respondet, aut debet a priori posse demonstrari ex legibus naturae, Conditorem mundi non potuisse aliam obliquitatem Eclipticae Terrae efficere, quam quae ita sit, ut ejus secans complementi sit exactissime media proportionalis inter radium et peripheriam. Verum talia demonstrari posse geometrice ab humano ingenio non puto. Restat itaque, ut dicamus Dn. Hollanderum a posteriori rem aggressum esse, et tentando plures Regulas tandem in aliquam incidisse, quae cum observationibus quam proxime consentit. Sed si hoc est, quis genius illum duxit ad sumendum medium proportionale inter radium et peripheriam, ad habendam secantem complementi obliquitatis quaesitae? Cur non potius in alias incidit Regulas, quae forte magis obviae fuissent? Et ita in aliis?

Dn. Marchio Hospitalius mihi scripsit, se a Te intellexisse, me in Tuas partes transiisse circa aestimationem virium: an verum sit? se enim non posse credere, quod communem sententiam deseruerim. Rescripsi, imo maxime verum esse, et obtuli ipsi, si velit, excerpta quaedam ex mutuis nostris literis, ut plene videat rationes quae me eo adigerunt: me non dubitare, quin si illas serio sit perpensurus, mecum fiat transfuga et erroneam partem relinquat. Vale et Fave etc.

Groningae 15 Aug. 1696.

XXXIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Ex Tuis novissimis video me oblitum addere meis fragmentum Mensis Julii Lipsiensis; id ergo nunc mitto, et vel ideo respondere festino. Fragmentum hoc retinere potes, cum totum interim Julium una cum Junio in nundinis acceperim, et quia suspicor Junium nondum ad Te pervenisse, mittam plagulam ad Mathematica spectantem, ubi Hanoveram reversus fuero; nam inter schedas mecum huc allatas praeter spem non reperio. Videbis Dn. Menckenium desiderio Tuo satisfecisse.

Ubi primum problema Tuum acceperam, aliquam ejus mentionem injeceram in literis ad amicos Italos eo ipso tempore missis, sed postea rem distinctius illis exposui addidique recte facturos, si in Diario suo mentionem ejus fieri curarent. Idem apud Gallos faciam, quia probas. Video ex Junio Te pariter et Dn. Fratrem Tuum quaedam in nuperis Tschirnhausianis notasse, et Fratrem quidem, ita ut eum etiam provocare videatur, non tamen sine aliqua verborum humanitate.

De ambabus solutionibus Tuis edendis statues quod e re videbitur; nolim enim consilii mei rationem habeas, ultra quam Tibi commodum erit. Meritissimis laudibus Tuis ego nunquam intercedam, sed praeco semper ero maximus. Methodum illam posteriorem distulissem adhuc nonnihil, si Tuo essem loco, vel ideo, quia latius patet, ne scilicet statim fontes illis indicentur, qui postea supprimunt indicatos, aut in rivos suos avertunt. Ego mea solutione paucis verbis defungar; tantum enim dicam, insigni veritatis indicio nos eandem reperisse lineam, etsi ego constructionem ejus aliquam reperisse contentus. primariam a qua denominatur non animadverterim, quae Laus in solidum Tua est; quanquam si vidissem ego problematis Tui propositionem, qualis Junio fuit inserta, fuissem haud dubie ulterius progressurus, et fortasse etiam receptum nomen deprehensurus. Habebam eamdem, quam Tu ponis, aequationem differentialem, quam revocare poteram ad eam quam in Actis assignavi, olim Cycloidi; sed talia nunc animo minus observantur. Commune quidem hoc videbam optico et nostro problemati, quod utrobique quaeritur via facillima, sed cum in Optico motus uniformis per se a medio variationem acciperet, hic acceleratus esset, ego alioqui nihil aliud quam utcunque defungi cupiens, non ultra contuli. Caeterum calculum faciens ordine nactus sum eas proprietates, quas Tibi transscripsi, et putem similem viam et in aliis circa maxima profore.

Non memini amplius, quid Tibi scripserim olim de Methodo mea pro invenienda perpendiculari ad curvas ordinatim positione datas, quam pro transcendentibus valere negas, rogoque ut mihi indices, in quo consistat. Saltem accommodari poterit ad transcendentes curvas aequatione exponentialiter percurrente datas. Et sane has earum expressiones semper pro perfectissimis habui. Expressiones p e r c u r r e n t e s apud me sunt ut genus; e x p o n e n t i a l e s vero sunt perfectissima earum species. Ad synchronam

Tuam et omnibus Logarithmicis perpendicularem non est quod me voces; perpulchras esse non nego et Te dignas speculationes, sed cogor eas a Te potius quam a me sperare. Scis me, nonnisi vi quadam pellaci problematis Tui prioris coactum, ad ejus solutionem tentandam accessisse; sed saepe hoc facere non possum; quod agnosceres, credo, si coram videres, quae mihi sunt agenda toto caelo diversa ab istis. Et nunc etiam plura accessere, ex quo Serenissimus Elector me inter Consiliares status, quos vocant Conseillers privés, recipi jussit, quia saepe ad me deferentur quae pertinent ad jura domus aliaque publica negotia.

De Nieuwentitio ex vero, opinor, judicas, melius facturum, si agnoscat candide in quo peccavit, quam si palliando errorem utriusque laudis jacturam faciat, recti judicii et animi boni. Sperabam de eo meliora; eo enim sum ingenio, ut de omnibus, qua licet, optima sentiam. Libertatem mihi sumsi quaedam in Tuis molliendi, ne nimium offendatur, v. g. pro „futilis" methodus posui „inutilis"; pro „turpiter" contradicis posui „fortiter"; pro „ridicula" aequatio posui „inanis", sed ita ut mutatio mea non appareat.

Quoniam spem excurrendi ad nos facis, spero nos aliquando coram facilius defuncturos toto illo negotio de explicanda gravium acceleratione; id enim per literas praestare laboriosius esse video, dum saepe ad priora recurrere necesse est; et subinde alter ab alterius sensu aberrat, ut solet fieri in talibus, ubi nondum satis stabilitas habemus formulas loquendi. Summae mihi voluptati erit Tuus ad nos accessus, nec magnum adeo locorum intervallum est. Illud peto, ut antea consilii Tui certiorem me facias, ne tunc forte domo absim; saepe enim cogor excurrere in vicinas praesertim aulas, Cellensem et Guelfebytanam, cum subinde agenda sunt mihi, quae ad totam Domum Brunswicensem pertinent. Quod si praemonitus sim, nihil conspectu Tuo antiquius habebo.

Quaedam in Wallisio a Te notata non animadverteram, cum omnia attente satis legere non vacarit. Verum est me Dn. Newtono ante viginti annos meae Methodi differentialis fundamenta communicasse, antequam ille mihi quicquam de suis huc spectantibus. An nonnihil inde profecerit, haud satis scio, neque ideo dicere ausim: interea praeclara illum jam tum habuisse facile crediderim, procedente tempore, ut fieri solet, magis expolita.

Grata sunt, quae Dn. Fullenio indicas; unde judicere licet, virum esse non tantum doctum, sed et bonum. Verum esse fateor quod notas, Dn. Fratrem tuum facilius quam credideram qualiscunque studii erga se mei oblitum fuisse et opus habuisse Te admonitore, et sua illa frigidiuscula sententia Wallisianae consimili vel causam vel praetextum dedisse.

Tractatum Davidis Gregorii Catoptrico-Dioptricum accepi; totus initur principio a me indicato de Circulis osculantibus in locum curvarum (ut ita dicam) appropiatarum substituendis. Et tamen vel mei ea in re vel etiam circulorum osculantium mentionem nullam fecit. Id moneri aliquando in Actis non inutile erit, sine ulla tamen displicentiae significatione, et malim ab alio fieri, quam a me ipso.

Quod dixi, omnis Axiomatis a me demonstrationem desiderari, non temere dictum est; idque animadvertes, opinor, si quando vacabit inspicere meditationes quasdam meas de ideis, quae exstant in Lipsiensium Actis. Excipio tamen Axiomata illa, quae sunt indemonstrabilia, ipsas scilicet identicas propositiones. Caetera omnia, quae scilicet possunt demonstrari, etiam utile est demonstrari, cum aliqua magni momenti theoremata in iis fundantur. Idque etiam Veteres viderunt. Unde Apollonius (in scriptis deperditis) et Proclus et alii Axiomata ab Euclide assumta demonstrare sunt conati. Eamque rem fructu non carere facile opinor concedes, quem tamen non vident, qui scientiarum utilitatem vulgari modulo metiuntur. Interim vides, ea limitatione, quam addidi et quam addendam esse praevideri poterat, non esse cur progressum in infinitum vereare in demonstrando.

Unum addo multum apud me interesse inter haec duo: in dubium vocare propositionem et demonstrationem ejus expetere, quod dum a Te hic pro eodem habetur. Hinc jam video, cur quae dixeram de Axiomatibus demonstrandis mira Tibi sint visa. Si Cartesius, cum de omnibus dubitandum dixit, hoc tantum voluisset, quod ego desidero, nullo jure reprehenderetur; sed ille dupliciter peccavit, nimis dubitando, et nimis facile a dubitatione discedendo. Illud ipsum, quod objicis axioma: Totum esse majus parte, opportune a Te affertur. Id certe nunquam in dubium vocavi, et tamen aliquando demonstrationem ejus expetii, imo inveni, uno syllogismo comprehensam, innixo definitioni minoris et majoris et Axiomati identico: Minus enim definio, quod alterius (majoris) parti

aequale est. Axioma autem identicum quod adhibeo est: Unumquodque aequale esse sibi ipsi, seu a = a. Hoc enim tanquam indemonstrabile sumo. Sic ergo argumentor in syllogismo primae figurae:

Quidquid est aequale parti totius, id toto minus est, per definitionem Majoris.

Pars totius est aequalis parti totius, nempe sibi ipsi, per Axioma identicum.

Ergo pars totius toto minor est. Quod erat demonstrandum. Ita vides, quomodo omnium demonstrationum a priori duo sint principia ultima: definitiones, et propositiones identicae; quod etiam alibi a me notatum est. Atque haec paulo latius deducere operae pretium putavi, ut pro aequitate Tua facilius me absolvas imposterum, si qua forte dicam obiter, quae primo aspectu insubidiora videbuntur, aut speciem supterfugii habebunt, cum nihil sint minus.

Dn. Hollanderum (vel ut Dominus Frater tuus suspicatur Dn. Spleissium) a posteriori ut vocant, illum mirabilem obliquitatis Eclipticae terrae cum tetragonismo consensum animadvertisse nullus dubito. Si idem esset in caeteris planetis, major spes foret rationis aliquando deprehendendae. Interim pulcherrima illa, et, ut sic dicam, fortunata animadversio est. Nam quantacunque sagacitas, nisi a fortuna adjuta, hoc non dedisset. Puto numeros varios tractantem casu aliquando consensum inter haec tam remota notasse.

Problematis circa aequationem differentialem a Dn. Fratre Tuo propositi solutionem statim dedi, et Te quoque posse non dubito, si quod inutile est, actum agere velis.

Perplacet, quod Dno. Marchioni Hospitalio respondisti, Te castris receptae in Dynamicis sententiae desertis ad meam transiisse. Ea enim res ipsius curiositatem haud dubie excitabit, praesertim cum ἀκρίβειαν Tuam in aliis jam sit expertus; in Tua etiam potestate est communicare ipsi, ex nostris amoebeis, quae voles. Si vis ut Italis Gallisque aliquod spatium relinquatur examinandi problematis Tui, ne ansam habeant excusandi sese, prorogandus nonnihil terminus erit. Nam in Gallia vix ante Novembrem problema inseri Diario poterit, quia nunc sunt vacantiae, quas vocant, sive feriae Vindemiales. Quid ergo, si expectes usque ad finem anni a prima publicatione Lipsiensi computati, id est ad

Junium anni sequentis? Ego interim a Dn. Fratre Tuo petam, ut si forte inveniat, nonnisi nobiscum publicet, ut appareat quid aliorum Methodi possint.

23 August 1696.

XXXIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ex quo nuperas (ad quas responsionem expécto) ad Te dedi, venerunt mihi posteriores Actorum menses, usque ad Junium inclusive, a Dn. Menckenio transmissi, quos perlustrando occurrerunt et Tua et Fratris, quem de suo problemate (quod ob rationes in nuperis meis allatas hucusque attingere nolueram) non parum superciliose sentire video, quasi vix quisquam existeret praeter ipsum qui illi solvendo par esset, dum aperte satis Dn. Tschirnhausium et sub hoc omnes Geometras certamen cum ipsis initurus provocat. Sed iniquum est pariter et absurdum, tentare velle Dn. Tschirnhausium aliosque, quibus nihil rei est cum calculo differentiali. Tanta fratris arrogantia, praeprimis vero cum videam Te ipsum non dedignatum fuisse Fraterno Problemati vacare, effecit ut et ego tentarem quid humeri valerent, et ecce intra semiquadrantem horae nodum hunc Gordium solvi, pro quo dissecando se solum putabat Alexandrum frater et quidem illico perveni ad formulam Tuam, ad quam aequationem propositam Te reduxisse ais in Mense Mart. Ut enim potestas n deprimatur, ponendum est $y^n = v^{\frac{n}{1-n}}$, unde proposita $ady = ypdx + by^n . qdx$, mutatur in hanc $\frac{1}{1-n} adv = vpdx + bqdx$, quae Tuae formulae omnino respondet, et quae adhuc resolvenda est. Interim hac depressione potestatis non opus habeo: immediate enim attingo scopum, ponendo $y = mz$, ideoque $dy = mdz + zdm$, quibus substitutis in aequatione proposita habebitur $amdz + azdm = mzpdx + bm^n z^n qdx$. Nunc ut haec aequatio quatuor terminorum ad duos redigatur, pono $amdz = mzpdx$, id est $\frac{adz}{z} = pdx$;

unde potest haberi z per x aut algebraice aut saltem transcendenter; esto itaque $z = \overset{1}{X}$ (per majuscula $\overset{1}{X}$, $\overset{2}{X}$, $\overset{3}{X}$ etc. intelligo quantitates diversas utcunque datas per indeterminatam x et constantes). Quoniam vero destructis $a\,m\,d\,z$ et $m\,z\,p\,d\,x$ in aequatione transmutata, remanet $a\,z\,d\,m = b\,m^n z^n q\,d\,x$ seu subrogato valore ipsius z, $a\overset{1}{X}d\,m = b\,m^n\overset{1}{X}{}^n q\,d\,x$, id est $m^{-n}d\,m = \frac{b}{a}\overset{1}{X}{}^{n-1}q\,d\,x$, unde etiam habetur m per x, nimirum $\frac{1}{-n+1}m^{-n+1} = \frac{b}{a}\int\overset{1}{X}{}^{n-1}q\,d\,x$. Sit igitur $m = \overset{2}{X}$, adeoque $y = (z\,m) = \overset{1}{X}\overset{2}{X}$ et sic habetur y vel algebraice, vel transcendenter per x. Sunt enim $\overset{1}{X}$, $\overset{2}{X}$ quantitates pure dependentes ab x et constantibus. Q. E. D.

En totius arcani solitionem; nescio quidem quousque cum Fraterna conspiret, ideoque schediasma illud, quod jam in ultimis Tuis mihi debebat esse transmissum avide exspecto. Optarim, ut excerpta ex his literis cum Tuis, quae forte edenda habes, Lipsiam mittas Actis inserenda, partim ut Frater videat, talia mihi non minus quam sibi in potestate esse, si modo citius tentare voluissem; partim etiam et quidem praecipue, ne praetexere possit se nolle aggredi, si forsan non poterit, meum problema de curva descensus priusquam ego suum solverim.

Super alia, quae in hisce Actorum mensibus observavi, proxime scribam; nunc plura adjicere non vacat, nisi ut Te valere jubeam quam optime et amare quem nosti ex mente et manu etc.

Groningae raptim d. 25 Aug. 1696.

XXXV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Unde melius exordiar quam statim a limine Tibi gratulando insignem, qua mactaris a Serenissimo Tuo Electore dignitatem? ita tamen ut Te moneam nostrorum Mathematum non penitus oblivisci, ut fere in postremis Tuis insinuare videris, ne nobis ansan praebeas indolendi potius quam Tecum laetandi. Non nego, licet

non coram videns multorum et gravium Te subiisse negotiorum jugum, in quorum minime plus situm est quam in solutione omnium problematum Catenariorum, Isochronorum, Tachystoptotorum etc. sed quid est, quod magis recreabit animum seriis occupationibus et innumerarum rerum agendarum molestiis tantum non succumbentem, quam jucundae meditationes mathematicae. Siste Tibi ipsius Julii Caesaris exemplum, quem media inter praelia semper Stellarum caelique plagis superisque vacasse Lucanus refert.

Gratias ago pro transmisso Fragmento Julio Actor. Lips. Literae Tuae (quod miror) cum illas acciperem erant vetustae 12 dies. Non est quod mittas mihi plagulam ex Junio; accepi enim hunc mensem ut vidisti ex ultimis meis, in quibus mittebam solutionem meam Problematis fraterni, quam Actis inseri desidero, eoque magis quod nunc fratris solutione visa, quae nimis quantum perplexa est, meam analytice expressam longe simpliciorem et concinniorem deprehendam. E re autem fore puto, ut addatur de fratris solutione nihil mihi constitisse, cum meam Tibi transmitterem, alias causabitur me suae constructioni tantum meam analysin accommodasse, quale quid olim ausus fuerat aggerere solutionibus nostris curvae paracentricae. Dicit in hoc suo schediasmate, se posterioris solutionem hac vice cum publico communicare, prioris enodatione Lectori relicta: sed monendus esset ut proxime ipse hanc enodationem exhiberet, vereor quippe ne alteram vicem ad calendas Graecas differat. Quam misere impotentiam suam palliare satagit! Caeterum dicit se tres quatuorve habere vias ducentes ad solutionem suam, sed si haec quam tradit brevissima est ut praesumitur, bone Deus! quousque ducent reliquae? Tantam universalitatem hujus problematis quam neminem non videre asserit, ego sane non video, cum tantum unicum sit ex infinitis aliis, ad quae se non extendit. Modus ejus construendi transcendentes mens. Jun. expositus, quodammodo simplex est, sed non est cur adeo exultet; Tuus enim quem in Actis exhibuisti 1693 p. 385, in eo praevalet, quod ope curvae algebraicae quaesitam statim per tractionem describis sine interventu logarithmicae alteriusve cujusdam curvae; alter vero ille fratris, praeterquam quod praerequirit logarithmicam jam descriptam, non nisi inventione plurium punctorum curvam quaesitam format; hujusmodi modos et ego complures exhibere possem, si vellem actum agere et quod a

Te jam diu multo ingeniosius praestitum est. Optime ipsi objecisti, dari curvas in se redeuntes algebraicas, quae rectificationem admittant, et praeter illas ex Cycloidalium genere reperio ego infinitas alias, ex. gr. omnes causticae et omnes evolutae curvarum algebraicarum in se redeuntium, et ipsae semper sunt algebraicae in se redeuntes, et simul rectificabiles. Putat quidem Frater se causam sui erroris quem agnoscit detexisse, sed minime. Ego quidem me determinare posse credo, quando possunt esse rectificabiles et quando non possunt; dico enim curvas illas in se redeuntes, quae nullum habent punctum, quod ego voco reflexus (point de rebroussement) non esse rectificabiles, ut curva (fig. 75) A; illas vero quae habent unum plurave puncta reflexus, posse interdum rectificari, ut B. Ratio prioris est, quia evolvendo lineam A progeneratur spiralis infinitorum circuituum, quae quia a linea recta in infinitis punctis secari potest, semper erit transcendens, et proinde ipsa linea A non poterit rectificari; alias Spiralis illa, quae ex evolutione describitur, foret algebraica, quod est impossibile; ratio vero posterioris est, quia, licet curva B sit etiam in se rediens, curva tamen, quae ex evolutione provenit, non est spiralis, sed ob punctum reflexus etiam in se redit; hinc cum nihil impediat, quominus haec possit esse Algebraica, etiam nihil impedit quominus curva B possit esse rectificabilis. Et revera hoc ita se habere in Circulo et Epicycloide, per se patet; illum enim evolvendo describitur spiralis infinitorum gyrorum, haec autem sui evolutione dat aliam Epicycloidem, sed inversam; quod utrumque hic per curvas punctatas notavi. Et ob hanc rationem puto, cur circulus aliaeque curvae in se redeuntes, quae nullum habent reflexum, non sint indefinite rectificabiles. Dic quaeso an aliquid in contrarium habeas. Addo indefinite, nam ut ipse contra Dn. Tschirnhausium perbene notasti, dari aliquas figuras quoad certas partes quadrabiles, indefinite tamen inquadrabiles; idem et ego de rectificatione curvarum statuo, quanquam hucusque talis curva nondum inventa fuerit, quae tantum unam pluresve habeat partes rectificabiles. Animadvertit quidem Dn. Tschirnhaus, et quidem recte in exemplo, quod ipsi in eam rem proposueras, praeter illam figurae partem, quam Tu observaveras quadrabilem, infinitas alias esse partes, quae admittant quadraturam, sed ut ipse fatetur, infinitum non est indefinitum; habet enim infinitas partes quadrabiles, sed etiam infinitas non quadrabiles. Miror autem, quod exinde inferre voluerit Dn.

Tschirnhaus, omnes figuras algebraicas aut nullam aut infinitas habere partes quadrabiles; omnes figuras autem transcendentes aut nullam aut unam aut duas aut tres etc. non vero infinitas (nisi ipsa sit indefinite quadrabilis) habere partes quadrabiles; quod utrumque veritati adversatur; possum enim exhibere figuras algebraicas, in quibus ostendo praeter unicam quadrabilem partem, nullam aliam esse, et contra habeo figuras transcendentes, quae utut indefinite non quadrabiles, infinitas tamen habent partes quadraturam admittentes, in quarum censu est ipsa Cyclois primaria, quam ille in exemplum adhibuit, in qua methodum habeo determinandi infinitas partes, meris rectis et portione curvae cycloidalis comprehensas, quadrabiles; id quod hactenus nemo praestitit. Duae enim hactenus tantum innotuerunt, una Hugeniana, quae aequalis est semihexagono circulo genitori inscripto; et altera, nescio a quo inventa, quae aequatur semiquadrato radii.

Caetera quae frater habet in suo schediasmate, non satis capio ob defectum figurarum, sed quomodo bene ratiocinari potest circa vires motrices, si quidem novum nostrum principium nondum amplectitur? Quod vero Tu mense Martio agnoscis, navem quiescentem ab eodem vento fortius impelli quam procedentem, et ego agnosco, si venti celeritas finitam habeat rationem ad celeritatem navis; alias si ratio statuatur infinita, dico ego semper aeque fortiter navem impelli; sed secundum Tuum materiae gravificae actionem explicandi modum, procedens navis fortius impellitur quam quiescens. Quid quaeso scrupulisatur frater de lucrificatione unius leucae in quadringentis deflectendo parum per proram a recto tramite? Nae si Hugenius adhucdum in vivis esset, locum hunc censoria sua exclamatione O Nugas! maximis literis perstringeret. Video ubi sibi quam maxime placuit, ibi plerumque Hugenio risum excitasse.

Mitto ego Notas Hugenianas, quas in reliquis Actorum Tomis reperi; videbis ab initio Hugenium idem quod olim a Te petebam sciscitari, compendium scilicet summandi progressionem harmonicam terminorum numero finitorum; mihi quidem roganti rescripseras nec Tibi hoc compendium notum esse; quia autem tum temporis hujus loci in Actis non recordabar, nunc commode incidit, ut instantiam faciam, quomodo ergo interpretanda sint haec Tua verba, quotcunque terminorum numero finitorum progressionis harmonicae summa compendio aliquo in-

ire potest. Occurrerunt quaedam partim plumbagine confuse scripta, partim a Bibliopega a margine resecta, quae non probe legere poteram. Non ubique eum candorem spirant, quem in Authore cum ipsius Eruditione certasse nupero Martio dicis. Nonnunquam alios reprehendens ipse maxime fallitur; ex. gr. cum contra D. T. asserit non solum infinitarum, sed omnium Lunulae Hippocraticae partium haberi quadraturas; falsissimum est: haberetur enim quadratura ipsius circuli, si omnes partes Lunulae essent quadrabiles. Videbis etiam, quem in Tuis castris totum putabas, quousque novae opinioni de aestimatione virium astipulatus fuerit: tunc tantum scilicet, quando agebatur de viribus, ut vocat, ascensionalibus: sed quis tam absonam limitationem a tanto viro profectam putet?

Verum est Fratrem et me eadem fere in Tschirnhausianis notasse; non tamen animadvertit ille quod ego, quod scilicet modus abscindendi portiones a curva parabolica in data ratione dependeat a rectificatione ipsius curvae parabolicae. Quam prospere mihi cessit, quod mea saltem non tardius comparuerint, quam fratris, alias de tarditate quae utique non mea erat, sed unice a Dn. Menckenio dependebat, consimilem forsan tragoediam adornasset, ut solutioni meae paracentricae accidit.

Quid Tibi videtur de curvis illis, quas neque per Cartesianam, neque per infinitorum Geometriam determinari posse ostendo? Habebunt hic vulgaris Geometriae amatores novam speculandi materiam.

Recte sentis, posterior mea Methodus Brachystochronam solvendi, quam latius patere dicis, non statim vulganda est, donec Mathematici suas solutiones exhibuerint, aut haec non adeo levia esse ingenue professi fuerint. Nun dubito, quin si vidisses problematis mei propositionem, ut in Actis extat, statim fuisses nomen curvae deprehensurus; quod enim dixi esse curvam Geometris notissimam, hoc illis, qui soluturi sunt problema, quousque Tu solvisti, ansam praebebit ulterius inquirendi in nomen curvae. Non ita mihi sum ignotus, ut non intelligam aliena maxime et diversissima Tibi agenda esse, quae prohibeant, quominus problematibus meis vacare possis; sed nec etiam adeo iniquus sum, ut id a Te exigam, nisi vacuo omnibus negotiis gravioribus.

En, quia petis, propria verba, quae mihi olim scripseras de methodo pro invenienda perpendiculari ad curvas ordinatim posi-

tione datas; tenta an quid faciant pro synchrona, et omnibus Logarithmicis perpendiculari. D. $\frac{6}{16}$ Decembris 1694: „Pene exciderat problema inveniendi curvam, quae ordinatim positione datis „occurrat ad angulos rectos. Cujus methodus, meo judicio, consistit in duabus aequationibus, una continente relationem inter „x, y et constantem quandam in curva positione data, sed pro „diversis talibus ordinatim datis variabilem b; altera continente valorem ipsius dy:dx in curva quaesita, expressam ex proprietate „perpendicularium in curva positione data, cujus aequationis ope datur ipsius b valor per dy, dx, y, x, pro re nata; quarum duarum aequationum ope tollendo b, habetur aequatio differentialis „primi gradus pro reliquis inter x et y."

Gratum fecisti, si duriora contra Nieuwentiit a me scripta molliisti, sed non eum in finem scripsi, ut vel publicentur vel meo nomine ipsi communicentur, verum tantum materiam suggerere volui Collectori Actorum velut ex se ipso respondendi. Lubentissime in me suscipiam quod moneri velles in Actis circa Tractatum Davidis Gregorii Catoptrico-Dioptricum: sed cum Tractatum hunc non viderim, nec forte videre contingat, explicari mihi vellem principium illud a Te indicatum de circulis osculantibus in locum curvarum appropriatarum substituendis, et quid proprie monitum cuperes; facit utique mentionem circulorum osculantium, ut videre est ex excerptis, quorum portio quaedam extat ad finem Schediasmatis Fraterni mihi transmissi.

Et ego ita putavi Dn. Hollanderum (Virum sane eruditum et generosum, in quem iniquissimus est frater meus pro more suo suspicax, quod eum alienis inventis superbire suspicetur) a posteriori incidisse varios numeros tractantem in consensum circuli tetragonismi et obliquitatis Eclipticae. Sed hoc non unicum est: complura hujusmodi alia habet, quae omnia forte fortuna tantum detexisse, vix est ut dici possit.

Jure distinguis inter in dubium vocare propositionem, et demonstrationem ejus expetere. Credo et Cartesii sensum ita fuisse, quamvis non ita expresserit: non enim dubitavit de Dei existentia, sed supposuit non existere. Speciose quidem Axioma, Totum majus esse sua parte, demonstrare conaris; sed annon aliquis syllogismi, quo uteris, primae figurae probitatum esse demonstrandam urgere posset? Omnes enim syllogismi rite concludentes eo nituntur principio, ut minor terminus alligetur vel se-

paretur a majori, ope medii termini ad minimum semel universaliter sumti. Unde tritum illud, Quae eidem tertio conveniunt, illa inter se conveniunt, quod idem est, quam illud apud Geometras usitatum, Quae eidem sunt aequalia, illa inter sunt aequalia: hoc ergo axioma, vel huic affine supponendum est, ut syllogismus legitime concludere dicatur. Quaero autem an hoc clarius sit, quam illud quod demonstrandum suscipis.

Ecce quid ad oblationem meam Dn. Marchio Hospitalius responderit in literis hesterno cursore acceptis. „Je vous suis, ait, obligé de l'offre que vous me faites de me donner part de vos objections au système de Mr. Leibnits, pour l'estime de la force et de ses réponses; cependant je vous prie de reserver cette bonne volonté pour un autre temps, lorsque j'examineray cette matiere à foud qui me parait des plus importantes pour la Physique" etc. Et paulo post subnectit haec: „Je donnay trois exemplaires de mon libre à Mr. Vôtre frere le cadet lorsqu'il passa par icy dont l'un etoit destiné pour Mr. Vôtre frere de Bâle, et les deux autres pour Mrs. Leibnits et Menkenius. Si vous avez occasion de leur écrire, ou à l'un des deux, vous me ferez plaisir de leur demander s'ils les ont reçûs, car je n'en ay aucune nouvelle, Mr. Vôtre frere le professeur m'a mandé qu'il les leur avoit envoyés." Mihi ergo respondebis, an acceperis necne.

Consentio ut proroges terminum pro solutione problematis mei concessum ad finem sequentis semestris. Vale etc.

Groningae 12 Septembr. 1696.

XXXVI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Pro communicatis reliquis Hugenianis maximas ago gratias. Non is sum qui negem mea aliquando posse emendari. Interim, ni fallor, interdum judicavit festinantius. Quae ipsi displicuit demonstratio meae Isochronae, ejus me eo minus poenitet, quod, quantum ex Domini fratris Tui schediasmate intelligo, ejus occasione calculi differentialis verum usum perspexistis. Et ipse, studio, Analyseos filo accommodaveram. Etiam amicus quidam Florentinus ejus auxilio nonnihil in nostra penetravit.

Quia approbas, scripsi ad Italos et Gallos, ut Pascha proximum pro termino solutionum statuatur.

. . . .

Vellem Methodum tractoriam applicari potius ad inversa tangentium, quam ad Quadraturas, ubi jam habemus.

Non displicet limitatio Tua, et in universum videtur dici posse, omnem lineam, quae a linea algebraica in infinitis punctis secari potest, non esse algebraicam.

Exemplum, quod Domino Tschirnhausio proposueram pro instantia, sumpseram ex Lunula Hippocratis, ordinatis ejus ad axem applicatis, ubi prodibit curva, cujus aequationem notaveram. Haesit diu, donec multo post tempore Lunulam forte tractans, ut apparet ex ejus schediasmate, rem deprehendit*); ex Analysi credo non facile detecturus. Illum manifestum puto, nondum nos ex eo quod curvae algebraicae segmentum vel semisegmentum (id est portio curvae arcu uno et recta vel rectis comprehensa) quadrari potest, concludere posse, quod curva indefinite quadrari potest. Imo ne illud quidem confectum puto, quod Dominus Tschirnhausius sui excusandi causa attulit, ubi datur una talis quadratura, dari infinitas. Et fortasse excogitari possent instantiae, ubi sudandum esset pro tali infinitorum segmentorum quadratura invenienda.

Circa summam progressionis harmonicae vereor ne sim deceptus.

Quod illas attinet curvas, quae ex plurium punctorum curvae inter se relatione determinantur, notavi ex Cartesii literis idem etiam movisse Fermatium, sed Cartesium in responsione rem non attigisse. Ego nonnihil de talibus, sed alio quodam modo cogitavi, de quibus alias; nunc festinantissimus ista scribo currumque inscensurus. Nolui autem differre hanc scriptionem, ut Menckenianam mature exciperes. Nescio an curvam determinaveris, quam aliis relinquis determinandam.

Placet, quod scribis Dominum Hollanderum eo esse ingenio, ut illa pulchra inventa ab ipsomet profecta censeri possint.

Syllogismi primae figurae probitas demonstrari omnino potest, independenter a veritate hujus Axiomatis, quod totum sit majus sua parte, ut in ea re nullus sit circulus timendus.

---

*) Siehe Act. Erudit. 1687 pag. 526.

Domini Marchionis Hospitalii Opus expecto, sed a Te, Lipsiensibus credo nundinis, demum habebo. Nunc vale et literis deproperatis ignosce.

Hanoverae 6. Octobr. 1696.

XXXVII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Non est cur Te moveat Hugenii festinatum judicium; non enim statim emendanda sunt, quae ipsi displicuerunt; ipse potius multa multis in locis habet, quae correctionem admitterent. Nuper Wismariensis quidam hac transiens promisit, se mihi missurum aliquod Manuscriptum Hugenii, in auctione ipsius librorum coëmptum, cum Newtoni Tractatu, cui manuscripto titulus esset Newtoni Errores. Quod si obtinuero, Tibi, si illud desideras, transcribi curabo, aut si nimis fuerit prolixum, principaliora mittam excerpta.

Quod ad Italos et Gallos scripseris propter problema meum, gratias ago magnas; per hasce inclusas rogo Dn. Menckenium, ut prorogationem termini etiam in Actis publicet, nisi, Te monente, id jam fecerit. Scire percuperem, quid Frater meus de hoc problemate statuat, et an illud solverit. Dominus Menckenius scribit, se quid in Actis inserendum ab ipso accepisse, de complanatione superficierum conoidearum et sphaeroidearum *), conferendum cum meis nupero Junio exhibitis; gratum esset mature intelligere quid id sit. Addit Dn. Menckenius se hactenus neque ab ipso, neque ab alio problematis solutionem accepisse. Nihil attigisti in novissimis Tuis, an penultimas meas acceperis, per quas Tibi miseram solutionem aequationis differentialis a Fratre propositae, et quomodo Tibi satisfecerit.

Miror Dn. Tschirnhausium diu haesisse in solvendo exemplo, quod ipsi pro instantia proposueras, cum tamen olim Parisiis ego semihora, postquam illud mihi proposuisset Dn. Marchio Hospitalius, eodem praesente, quadraturam principalem caeterasque pos-

---

*) Jac. Bernoulli Complanatio superficierum Conoidearum et Sphaeroidearum. Act. Erudit. 1696 p. 479.

sibiles ex sola analysi determinaverim, idque sine interventu Lunulae Hippocratis, de qua ne cogitabam quidem. Atque illa occasione jam tum reperi, quod in ultimis meis ad Te notavi, dari curvas, in quibus Tschirnhausii excusatio plane nullum locum obtinet, utpote in quibus, praeter unicum spatium quadrabile, nullum aliud esse demonstro. Et sic jam excogitavi instantias, quas excogitari posse dicis.

Non animadverti ego locum in Epistolis Cartesii, ubi Fermatium de curvis illis, quae ex relatione punctorum in curva determinantur, aliquid habere dicis. Si id mihi innotuisset, procul dubio mentionem injecissem, eoque magis quod, ut ais, Cartesius in responsione rem non attigerit, unde ipsius methodi infirmitas luculentius constitisset. Gratissimum erit locum hunc mihi indicari, et Tua quondam cogitata de hisce percipere. Curvae, quam aliis determinandam relinquo, memet ipsum nondum satis applicui; si non aequationem finitam, saltem seriem pro illa me exhibere posse puto.

Cum Te continuis negotiis obrutum videam, quae impediunt quominus vacare possis problemati de invenienda curva omnibus Logarithmicis normali, lubens nunc Te hoc labore levabo. Esto (fig. 76) AB axis communis omnium logarithmicarum CD, Cd, ex puncto C eductarum; determinanda est curva Dd omnibus CD, Cd normalis. Positis coordinatis AB, BD, x, y, et CA, a. Concipiatur ad lubitum determinata quaedam logarithmica CE, ad quam caeterae referendae sunt. Sit illa facilioris calculi gratia talis, ut ipsius subtangens sit aequalis ipsi CA seu a. Jam ex puncto quovis curvae quaesitae D ductam intellige DE parallelam BA, quae secet assumtam Logarithmicam in E, ex quo si ducatur EF, designabit AF Logarithmum ipsius EF seu DB seu y. Nunc ob normalitatem Dd ad CD erit generaliter $dx . -dy :: BD . BG$, subperpendicularem curvae Dd, ideoque $BG = \frac{-ydy}{dx}$. Est autem ex proprietate Logarithmicarum subtangens Logarithmicae CE ad subtangentem Logarithmicae CD, id est CA ad BG, ut AF ad AB, quod hanc suppeditat propositionem $a . \frac{-ydy}{dx} :: ly . x$, unde habetur $axdx = -yly . dy$. Potest autem, si memineris eorum quae olim inter nos agebantur, $-yly . dy$ summari hunc in modum : $-yly . dy = -yly . dy - \frac{1}{2}yydly + \frac{1}{2}aydy$ (quia

$dly = \frac{ady}{y}$) sumtis itaque summis per partes, erit $\int -yly.dy = -\frac{1}{2}yyly + \frac{1}{4}ayy$, et per consequens $= \frac{1}{4}axx$, id est $x = y\sqrt{\frac{a-2ly}{2a}}$, vel, si mavis aequationem percurrentem, sit b numerus ipsius a, seu $lb = a$, tunc erit $2yyly = yylb - 2xxbb$, adeoque $y^{2yy} = \frac{b^{yy}}{b^{2xx}} = b^{yy-2xx}$ vel etiam $b^{2xx}y^{2yy} = b^{yy}$.

Si limitatio mea non displicet, pro demonstratione legitima valebit, circulum, ellipses aliasque curvas in se redeuntes nullumque punctum reflexus habentes, neque rectificari neque quadrari posse indefinite. Plura scribendi impraesentiarum Tuae praeter solitum steriles non suggerunt occasionem. Hisce igitur, Vale et fave etc.

Groningae 27. Octobr. 1696.

XXXVIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Literas ad Dn. Menkenium Tuas rite curavi. Si quid ipsi significas novum in republica literaria, fac quaeso ut nec a me ignoretur.

Gratissimae erunt censurae Hugenii in opus Newtoni rogoque ut si obtinere potes, totum mihi cures describi. Et hos et caeteros pro me sumtus reddam lubens merito.

Putabam me in respondendo etiam illa Tua attigisse, in quibus problema solveras a Dno. Fratre Tuo propositum. Non est quod quaeras qui satisfacias; nunquam enim credidi, quod mihi facile successit in hoc genere, Tibi negotium magnum facessere posse, idque statim significaveram.

Accepi librum Dni. Marchionis Hospitalii et prima quaque die ipsi gratias agam. Multa illic praeclara reperio, etsi nondum licuerit meditari attentius. Pulcherrima inprimis ratio est, qua ex focis determinat tangentes, dum observat punctorum, in quibus circulus assumtus secat rectas ex focis ad curvae punctum ductas, distantias a normali ad curvam esse ipsis rectarum differentiis propor-

tionales; atque adeo ipsam normalem transire per centrum gravitatis, si puncta in ratione quam exhibet differentialis aequatio, onerata intelligantur. Quae Dn. Facius et ego dedimus, non nisi initia quaedam fuere. In meo id peculiare est, quod ex ipsa tensionis seu compositionis motuum natura deduxi transitum per centrum gravitatis. Vellem autem hanc motuum rationem huc applicari, remque ad fila deduci posse, tunc quoque cum ad emissarum ex focis versus punctum curvae potentias ascenditur, ut scilicet parallelismus ille elegans Mechanicae et Calculi continuaretur. Dn. Tschirnhaus in prima editione suae Medicinae mentis lapsus erat, idque ipse ei subindicaveram per literas etiam ante Italicum iter, et innueram esse mihi viam corrigendi; sed a Dno. Fatio in edendo sum praeventus. Ipse Dn. Tschirnhaus correxit sua in secunda editione Medicinae mentis, sed quae exhibet theoremata nullo modo accedunt ad pulchritudinem et generalitatem Methodi Hospitalianae. Interim ipse nuper inspecto Domini Marchionis Hospitalii Libro ad me scribit, tametsi parum temporis sibi in nundinis superfuerit ad ejus lectionem, credere tamen pauca in eo fore, quae sibi non sint nota. Nec dubito, quin inspexerit, quae hoc negotium concernunt, quod ipsum potissimum tangit. Quodsi haec jam tum noverat, vellem in Operis sui editione novissima non dissimulasset rem tam utilem et elegantem.

Mitto hic ex Actis Lipsiensibus mensis Octobris, quae Dn. Frater Tuus de superficiebus Conoeidum dixit. Mihi nondum vacavit respondere iis, quae in Actis ad me pertinentia dixit; faciam tamen primo otio, eaque occasione etiam candori Tuo atque inventis, quanquam non necessarium, testimonium perhibebo.

Transscribo hic verba Fermatii, in appendice ad Epistolam Mersenni, quae est 67ma in Tomo Tertio Cartesianorum. „Je puis, „dit-il, donner la resolution de cette question: Trouver autant de „lignes courbes qu'on voudra, en chacune desquelles prenant tels „nombres des points qu'on voudra, tous ces points ensemble pro„duisent un même effet.“

Non invenio Cartesium, Mersenno haec mittenti respondentem, hunc locum attigisse.

Fac quaeso ut sciam quis ille Wismariensis, quorsum ierit, et an nostris sese studiis cum successu applicuerit, ut Tuae literae innuere videntur.

Gratias ago pro Tua communicatione lineae ad Logarithmicas ordinatim datas normalis. Fateor me ita distractum, ut talia attentare vix amplius ausim; nolim tamen hoc ita accipias, quasi eo praetextu velim me, si potuissem aggredi, statim fuisse praestiturum.

Circa summam harmonicorum nondum mihi satisfeci, et vereor ne sim deceptus. Interim circa cognata proponam quae olim in mentem venere, ubi et judicium Tuum et auxilium desidero. Quaeritur summa horum numerorum $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ etc. Fingo esse casum specialem hujus: $\frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{9} + \frac{x^5}{16}$ etc. $= y$, cum scilicet fit $x = 1$. Quod si ergo semper haberi posset y, haberetur et summa quaesita. Ergo fiet $\frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$ etc. $= \frac{dy}{dx} = \log \overline{1-x}$, seu $\frac{ddy}{dx} = x^0 + x^1 + x^2 + x^3$ etc. $= \frac{1}{1-x}$ seu $y = \iint \frac{1}{1-x}\, dx\, dx$. Res ergo pendet a quadratura figurae Logarithmicae, quae datur. Eademque methodus ad alia id genus porrigitur, ad quae non alius facile aditus patet. Quare cogita quaeso de perfectione et prosecutione.

De Te iterum Berolini mentionem injeci, et aditum adhuc apertum apud Halenses intellexi, magnamque superesse de Te existimationem. Itaque constituere atque etiam amplius deliberare potes. Quid si aliquando excurrere in has oras liceat appetente vere, et coram in omnia accuratius inquirere? praesertim si Lipsiam usque perrexeris, ubi Hala transitur. Vale et fave etc.

Dabam Hanoverae $\frac{6}{16}$ Novembr. 1696.

P. S. Grata erit instantia curvae ordinariae, in qua Dn. Tschirnhusii excusatio non habeat locum. Memini in aliqua praecedentium Te quadraturam obliqui Cycloeidis segmenti tribuere nescio cui; scito eum quem nescieras me esse. Multi sunt anni, quod curavi inseri Diario Parisino. Nonnihil adhuc scrupuli mihi subest circa demonstrationem irrectificabilitatis ovalium puncto reversionis carentium, de quo alias amplius; nunc enim tempore meditandi excludor.

XXXIX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Literis ad Te dimissis mox in mentem venit oportere, ut error in illis admissus fuerit. Nam area illa, quam aequalem feceram seriei de qua agebatur, infinita est. Re ergo resumta, vidi sic procedendum: $\frac{1}{1} + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \text{etc.} = dy$. Unde $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \text{etc.} = y$; ergo $dy = \frac{\log \overline{1-x}\, dx}{x}$ seu $y = \int \frac{\log \overline{1-x}\, dx}{x}$. Sed cum $\log \overline{1-x}$ sit infinitus, eo casu quo $x = 1$, ideo putavi commodius rei accedi posse, si adhibeamus $\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \text{etc.}$ Nam reperio hac summa data, etiam haberi summam $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$ Itaque assumo $\frac{1}{1} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \text{etc.}$ $= dy$, unde $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \text{etc.} = y$, cumque $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$ etc. sit $\log \overline{1+x}$, utique patet fore $dy = \frac{\log \overline{1+x}\, dx}{x}$ seu $y = \int \frac{\log \overline{1+x}\, dx}{y}$. Reperio autem generaliter esse $\int x^e \log \overline{1+x}\, dx$ $= \frac{1}{e+1} x^{e+1} \log \overline{1+x} - \frac{1}{e+1} \int \frac{x^{e+1}}{1+x} dx$; et tamen singulari naturae cautione accidit, ut in unico nostro casu res non succedat, cum scilicet fit $e = -1$, tunc enim $\frac{1}{e+1} = \frac{1}{0}$, quae est quantitas infinita; unde subsidia summationis evanescunt.

Nondum hactenus occurrit mihi alia ratio quaesitam y inveniendi. An aliunde pateat aditus, Tu optime dispexeris.

Si summa haec dividatur per x, et quod provenit rursus summetur, prodit summa cuborum; et si cum hac procedatur eodem modo, prodit summa biquadraticorum, et ita porro. Habemus ergo reductionem serierum ad suas quadraturas: sed ipsae hoc loco quadraturae adhuc desiderantur. Interim ipsam methodum aggrediendi series non displicituram puto, cum saepe res ad quadraturas

quae in potestate sunt reduci possit. Ex. causa series $\frac{1}{1+e}$ $- \frac{1}{2,1+e} + \frac{1}{3,2+e} - \frac{1}{4,3+e}$ etc. semper haberi potest, modo e sit numerus major unitate, quod ex praecedentibus patet, quia fit

$$\int x^{e-2} l\overline{1+x}\,dx = \frac{x^e}{1e} - \frac{x^{e+1}}{2,e+1} + \frac{x^{e+2}}{3,e+2} - \frac{x^{e+3}}{4,e+3} \text{ etc.}$$

quod semper haberi potest, excepto casu quo $e = 1$, quanquam fortasse et in hoc casu habebitur, Tua ope accedente. Haec raptim prioribus submittere volui, ne Tibi error calculi a me dormitante nescio quomodo commissus frustra negotium facesseret. Vale.

Dabam Hanoverae 9. Novembr. 1696.

P. S. Cum reperiam semper esse $\int l\overline{1+x}^n x^e\,dx =$ $l\overline{1+x}^n\,\overline{1+x}\,x^e - n\int l\overline{1+x}^{n-1} x^e\,dx - e\int l\overline{1+x}^n x^{e-1}\,dx$, hinc patet potentias superiores reduci ad inferiores, x^e ad x^{e-1}, si e sit affirmativus numerus, vel contra x^{e-1} ad x^e, si e sit numerus negativus; idemque est de $l\overline{1+x}^n$ et $l\overline{1+x}^{n-1}$. Unde possent haberi haec omnia, nisi obstarent illi casus, ubi ob 0 vel infinitum evanescunt subsidia. Speciatim reperio $l\overline{1+x}^2\,\overline{1+x},:x =$ $2\int l\overline{1+x}\,dx:x - \int l\overline{1+x}^2\,dx:xx$. Fortasse si omnia ordine examinare liceret, lux aliqua affulgeret.

XL.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Utrasque Tuas uno eodemque cursore accepi; in posterioribus recte correxisti, quem in prioribus commiseras lapsum. Olim eram, Te non invito id dixerim, in similibus fere speculationibus: hanc autem materiam jam a longo tempore deserui, ut pene exciderit, quid super ea praestiterim. Adversaria mea discutiens hoc repe-

rio. In Hyperbola (fig. 77) ABCD, si $AB = BC = Ba = 1$, fiat $EM = \frac{\text{spatio hyperb. EBCF}}{BE}$, et sic ubique; em vero $= \frac{\text{spatio hyperb. eBCf}}{Be}$, et sic ubique: erit spatium $ABLN = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ etc. spatium vero aBLn erit $= \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$ etc. Praeterea spatium ABLN erit duplum spatii aBLn, et per consequens, quod probe notasti, data summa $\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$ etc. habetur etiam summa $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ etc. Haec enim illius dupla est. Quod si ulterius spatia BLME et BLme applicentur ad BE et Be, prodibunt nova spatia pro cubis $\frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64}$ etc. et $\frac{1}{1} - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64}$ etc. et ita porro pro biquadratricis. Quamvis autem omnes istae series sint insummabiles, possum tamen, non ineleganti quodam artificio, illas dispescere in partes datam habentes rationem; sic series generalis potestatis numeri n est haec $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}$ etc. multiplicatis numeratoribus et denominatoribus per datum numerum ad n elevatum, ex. gr. per 2^n, erit $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.} = \frac{2^n}{2^n} + \frac{2^n}{4^n} + \frac{2^n}{6^n} + \frac{2^n}{8^n} + \text{etc.} = 2^n \times \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} \text{ etc.}\right)$. Est ergo summa terminorum imparium $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n}$ etc. ad summam parium $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n}$ etc. ut $2^n - 1$ ad 1: et proinde $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}$ + etc. ad $\frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n}$ etc. ut 2^n ad $2^n - 2$. Hinc patet quod supra innui (existente scilicet $n = 2$) summam $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ etc. esse duplam summae $\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$ etc. Hinc etiam ultro sequitur summam harmonicorum esse infinitam; est enim eo in casu $n = 1$, et proinde 2^n ad $2^n - 2$ ut 2 ad 0, id est, summa $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ etc. infinities major est summa $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ etc. quod hic obiter dictum velim, ideo praecipue quod memini Fratrem olim id ipsum longa et operosa via apodictice demonstrare instituisse, postquam ego antea illud apagogice demonstrassem, ut videre poteris ex ejus Dissertationibus de Seriebus. Jam si facimus $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.} = \frac{3^n}{3^n} + \frac{3^n}{6^n} + \frac{3^n}{9^n} + \frac{3^n}{12^n} \text{ etc.} =$

$3^n \times \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{12^n} + \text{etc.}\right)$ habebitur ratio, quam habet series tota ad terminos suos omnes tertianos. Pari modo invenire licet rationem inter seriem et suos terminos quartanos, et ita porro. Atque adeo summa, licet ignota, habet tamen partes cognitae rationis; quemadmodum et Circulus et Hyperbola sunt inquadrabiles, possunt tamen secari in ratione data, quod hic idem in serie annotasse non injucundum erit.

Quantum vero ad reductionem serierum ad quadraturas, vides ex iis quae supra de spatiis ABLN et aBLn protuli, me jam diu talia meditatum fuisse: omnes quidem quadraturae facile ad series revocantur, sed vicissim series ad quadraturas reducere artis foret non mediocris. Ex occasione eorum quae perscripsisti, negotium resumsi, et quantum per otium licuit, unum alterumve Tibi forte non ingratum annotavi. Primo statim animadverti, Te praecipue eo attendisse, ut series Tuas ope differentiationis reduceres ad seriem harmonicorum, quae utique quantitate finita, sed logarithmica exprimi potest. Ego exinde cogitare coepi, annon series proposita per differentiationem bis, ter, pluriesve repetitam eamque multiplicando vel dividendo per x, xx etc. prout res id postulat, tandem reduci posset ad seriem identicam, unde prodiret aequatio differentialis primi, secundi, altiorisve gradus, quae explicaret summam seriei. Et quidem spe concepta non omnino excidi: in nonnullis enim quas hic apponam, talis summandi modus commode succedit. Quaeritur summa hujus seriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}$ etc. Scio equidem aliunde, si unitas est logarithmus, hanc seriem esse numerum unitatis, sed idem a priori per methodum ita invenio. Fingo ad Tui imitationem esse casum specialem hujus speciei $\frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4}$ etc. $= y$, quando scilicet x fit $= 1$; hinc fiet, differentiando seriem $\frac{1}{1} + \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3}$ etc. $= \frac{dy}{dx}$; ablato itaque primo termino $\frac{1}{1}$, provenit series identica $\frac{dy}{dx} - 1 = \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4}$ etc. et consequenter $= y$, et proinde $dy = ydx + dx$, quae aequatio ostendit y seu potius $y + 1$ esse numerum ipsius a seu unitatis.

Caeterum reperio seriem $\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}$ etc. esse aequalem huic alteri $\frac{1}{1.2}+\frac{4}{1.2.3}+\frac{9}{1.2.3.4}+\frac{16}{1.2.3.4.5}$ etc. Esto jam quaerenda summa hujus seriei $\frac{1}{2}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{2.4.6}+\frac{1}{2.4.6.8}$ etc. fiat $\frac{xx}{2}+\frac{x^4}{2.4}+\frac{x^6}{2.4.6}$ etc. $= y$, ideoque $x+\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2.4}+\frac{x^7}{2.4.6}$ etc. $=\frac{dy}{dx}$: transposito x, et divisa aequatione per x, habetur $\frac{dy}{xdx}-1=\frac{xx}{2}+\frac{x^4}{2.4}+\frac{x^6}{2.4.6}$ etc. $= y$, id est $dy = yxdx + xdx$, quae aequatio (posito $xx = z$) reducitur ad praecedentem: quod etiam alia via invenitur faciendo $xx = 2t$, unde $\frac{xx}{2}+\frac{x^4}{2.4}+\frac{x^6}{2.4.6}$ etc. $=\frac{2t}{2}+\frac{2.2tt}{2.4}+\frac{2.2.2t^3}{2.4.6}$ etc. $=\frac{t}{1}+\frac{tt}{1.2}+\frac{ttt}{1.2.3}$ etc. quae series utique similis est praecedenti. Quando vero denominatores componuntur ex numeris imparibus, aequatio prodit omnino diversa ab illa praecedenti, ut si proponatur $\frac{1}{1}+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{1.3.5.7}$ etc. proindeque fiat $\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1.3}+\frac{x^5}{1.2.3}+\frac{x^7}{1.3.5.7}$ etc. $= y$, et $1+\frac{xx}{1}+\frac{x^4}{1.3}+\frac{x^6}{1.3.5}$ etc. $=\frac{dy}{dx}$ seu $\frac{dy}{xdx}-\frac{1}{x}=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1.3}+\frac{x^5}{1.3.5}+\frac{x^7}{1.3.5.7}$ etc. $= y$, habebitur haec aequatio $dy = xydy + dx$, quae cum sit specialis casus aequationis a Fratre in Actis nuper propositae et a Te et a me solutae, potest per nostras methodos ulterius reduci ad aliam, cujus indeterminatae separari possunt. Videamus jam quid proveniendum sit ex hac generali serie $\frac{1}{a}+\frac{1}{a.a+b}+\frac{1}{a.a+b.a+2b}+\frac{1}{a.a+b.a+2b.a+3b}$ etc. (intelligo per a et b numeros quoscunque, ita ut a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$ etc. faciant progressionem quamcunque arithmeticam) faciamus ergo $\frac{x^a}{a}+\frac{x^{a+b}}{a.a+b}+\frac{x^{a+2b}}{a.a+b.a+2b}$ etc. $= y$, unde $\frac{dy}{dx}$

$= x^{a-1} + \frac{x^{a+b-1}}{a} + \frac{x^{a+2b-1}}{a.a+b} + \frac{x^{a+3b-1}}{a.a+b.a+2b}$ + etc. et transposito x^{a-1}, et divisa aequatione per x^{b-1} erit $\frac{dy}{x^{b-1}dx} - x^{a-b}$ $= \frac{x^a}{a} + \frac{x^{a+b}}{a.a+b} + \frac{x^{a+2b}}{a.a+b.a+2b}$ etc. $= y$, id quod hanc suggerit aequationem $dy = yx^{b-1}dx + x^{a-1}dx$, quae sane ipsissima est Fratris satis generaliter proposita; unde praeter spem incidi in modum solvendi hanc aequationem per seriem simplicissimam, quam forsan Frater non ita facile reperiret, si sollicitaretur propriam suam aequationem vel saltem hanc per seriem solvere. Sumamus jam aliud exemplum, ubi proveniat aequatio differentialis secundi gradus. Quaeritur summa hujus seriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{1.4}$ $+ \frac{1}{1.4.9} + \frac{1}{1.4.9.16}$ etc.; ponatur $\frac{x}{1} + \frac{xx}{1.4} + \frac{x^3}{1.4.9} + \frac{x^4}{1.4.9.16}$ etc. $= y$, differentiando fiet $1 + \frac{x}{1.2} + \frac{xx}{1.4.3} + \frac{x^3}{1.4.9.4}$ etc. $=$ $\frac{dy}{dx}$, multiplicetur per x et erit $\frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.4.3} + \frac{x^4}{1.4.9.4} +$ etc. $= \frac{xdy}{dx}$: differentietur iterum et habebitur $1 + \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.4} + \frac{x^3}{1.4.9}$ etc. $= \frac{dxdy + xddy}{dx^2}$; ablato 1, provenit tandem series identica $\frac{dxdy + xddy}{dx^2} - 1 = \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.4} + \frac{x^3}{1.4.9} + \frac{x^4}{1.4.9.16}$ etc. $= y$, quae reducta dabit $xddy = ydx^2 + dx^2 - dxdy$ pro aequatione quaesita, quae an ad aequationem differentialem primi generis possit reduci, vellem ut dispiceres. Si quaeratur summa seriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{1.8} + \frac{1}{1.8.27} + \frac{1}{1.8.27.64}$ etc. obtinebitur aequatio differentialis tertii gradus; ponendo enim $\frac{x}{1} + \frac{xx}{1.8} + \frac{x^3}{1.8.27} +$ $\frac{x^4}{1.8.27.64}$ etc. $= y$, post alternatim institutas tres differentiationes, totidemque multiplicationes per x, pervenitur ad seriem identicam, unde elicitur aequatio quaesita haec $xxd^3y = ydx^3 + dx^3$ $- 3xdxddy + dx^2dy$. Atque hac ratione in altioribus gradibus operari licet.

Multa alia, quae olim circa hanc materiam observaveram, omitto; lubet tamen attingere paucis aliud serierum genus, quod ante decennium, ut puto, primus ego consideravi, quodque cum Fratri aperuissem, protinus ipsi ansam dedit problemata solida et hypersolida, ope circini et normae construendi, per approximationem Geometricam. Hujusmodi enim serierum summa vel potius valor perpetuo aequatione algebraica finita exprimi potest, idque eodem fere modo, quo serierum jam prolatarum summas indagavimus, procedendo scilicet donec ad seriem identicam perveniatur. Quaeritur ex. gr. valor hujus seriei,

$\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}}$ etc. Pono illum $= x$, sumendo utriusque quadratum erit $xx = 2+\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}$ etc. seu $xx - 2 = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}$ etc. quadrando iterum provenit $x^4 - 4xx + 4 = 1 + \sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ etc. ablato 1, habetur series identica $x^4 - 4xx + 3 = \sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}}$ etc. $= x$. Hinc $x^4 - 4xx - x + 3 = 0$: cujus proinde aequationis radix ostendet verum valorem seriei propositae. Ex hisce paucis facile intelliguntur omnia, quae de constructione solidorum problematum exhibuit Frater meus. Non dubito quin haec et Tibi jam aliquando considerata fuerint, quamvis apud authores de seriebus tractantes hactenus tale quid non repererim. Hac methodo invenitur $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ etc. $=2$, et $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}$ etc. $= 3$, aliaque id genus multa inveniri possunt, quae nemo Te melius perscrutabitur. Quod superest, vix putem alio modo quam fecisti inveniri posse summam seriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$ etc. saltem ad aliam expressionem quam logarithmicam non reducetur. Quod reperisti $\int x^e \log \overline{1+x}\, dx = \frac{1}{e+1} x^{e+1} l\, \overline{1+x} - \frac{1}{e+1} \int \frac{x^{e+1}}{e+x} dx$, verum est. De hoc autem, ni fallor, jam tum agebamus, cum de exponentialium seu percurrentium Calculo sermones sereremus; interim non magis miror rem in nostro unico casu non succedere, quam mirarer Hyperbolam communem non esse quadrabilem: eadem enim naturae cautione accidit, ut ex infinitis

Hyperboloidibus haec sola quadraturam non admittat. In postscripto facis $\int l\,\overline{1+x}^n\, x^e\, dx$, nescio cui prolixae quantitati aequalem; rogo ut revideas; forsan lapsus irrepsit; invenio enim simplicius sic $\int l\,\overline{1+x}^n\, x^e\, dx = \frac{1}{e+1} x^{e+1}\, l\,\overline{1+x}^n - \frac{n}{e+1}\int \frac{x^{e+1}}{1+x} dx$. Speciatim Te reperisse ais $\frac{\overline{l\,\overline{1+x}}^2\,\overline{1+x}}{x} = 2\int \frac{l\,\overline{1+x}}{x} dx - \int \frac{l\,\overline{1+x}^2\, dx}{xx}$: ego vero reperio $\frac{\overline{l\,\overline{1+x}}^2\,\overline{1+x}}{x} = 2\,lx - \int \frac{l\,\overline{1+x}^2\, dx}{xx}$. Sed de hac materia haec sufficiant impraesentiarum; plura tempus dabit. —

Gratias ago, quod literas meas ad Dn. Menckenium rite curasti; mittebam ipsi modum generalem Actis inserendum construendi tetragonismum cujuscunque figurae curvilineae in plano descriptae per approximationem Geometricam, nulla adhibita expressione Analytica; quem modum ob infinitatem adjungere volui seriei meae universali pro quadraturis jam ante biennium in Actis propositae.

Ex quo Wismariensis iste, nomine Groningius, hinc discessit, nihil de eo amplius inaudivi; procul dubio in patriam migravit; in transitu hic se Doctorem Juris creari fecit. Amator apparuit studiorum nostrorum, videtur tamen historicam magis quam solidam eorum habere notitiam; decrevit enim ut dixit, historiam edere Cycloidis, ad imitationem alterius illius Paschalii; quapropter nostra petiit inventa super illa. De omnibus loqui novit, sed sine fundamentis. Sueciam, Daniam, Germaniam et Italiam peragravit; jam diu in patria officio quodam fungitur.

Nondum obtinui, sed propediem obtinebo, librum Dn. Marchionis Hospitalii; interim ex illis quae refers, video bonam partem ejus et forte integrum conscriptum esse ex occasione eorum quae ipsi Parisiis communicaveram: non dubito tamen, quin pro suo, quo pollet, ingenio auxerit multis, perpoliverit et vernacula sua lingua nitide concinnaverit.

Mutilum misisti schediasma Fratris mei et sine figuris, unde non bene capio quid velit. Gratias tamen ago. Dicit se jam diu

meditatum fuisse, sed contemsisse, quae ego dignatus sim publicare: interim cur jam ex destinato dignatur, quae olim contemserat, et cujus ego non nisi in transitu occasione ita ferente mentionem feci? Certe nihil aliis, quod sibi non prius notum putat: suam tamen infirmitatem egregie prodit circa problema celerrimi descensus per schedulam aliquam Dn. Marchioni cum Actis missam et quam hoc ipso momento cum literis a Dn. Marchione accipio et quidem ipsum autographum, in cujus fine habentur haec verba: Curva p. 269 proposita videtur esse circulus fig. 5. cujus centrum est in intersectione horizontalis per punctum A transeuntis et alterius rectae ipsam rectam AB ad angulos rectos bisecantis. Hem, quam bene rem acu tetigit! Audi et Marchionis verba: „Mr. Leibnits a „fait mettre dans le Journal du 19. Septbr. Vôtre probleme de la „courbe de la plus vite descente, il prolonge le temps que vous „aviés donné jusques a Pasques prochain. Je vous avoue que ce „probleme me paroist tres beau, jusques icy je ne m'imagine point „de voye pour y parvenir etc." et inferius: „Je crois pouvoir „vous asseurer par avance, que nos Geometres ne sont pas en „état de resoudre ces sortes de questions, je ne doute pas que „Mr. Vôtre frere ne s'y soit appliqué de toutes ses forces. Il m'a „envoyé depuis peu les Actes de Leipsic, parmi lesquels j'ai trouvé „un petit papier, que je vous envoye, vous me ferez plaisir cependant de n'en rien temoigner de me le renvoyer dans Vôtre „réponse etc."

Verba Fermatii, quae notas, latiori sensu intelligi possunt, quam ut praecise ad curvas meas applicentur.

En quandam instantiam contra Dn. Tschirnhausii excusationem. Sit (fig. 78) curva quaecunque ABC, quae secetur in puncto C a recta AC faciente angulum semirectum CAE cum axe AE. Erecta normali AF, ducatur et producatur applicata DBH secans AC in G, agaturque GF parallela ipsi AD, secans curvam in L; deinde sumatur BH aequalis ipsi LF, et hoc fiat ubique; generabitur inde nova curva AHI, cujus spatium determinatum AEI, qualiscunque sit curva ABC, semper aequatur quadrato AE vel EC; ipsum vero spatium ADH indefinite nunquam erit quadrabile, nisi et ipsum spatium ADB sit indefinite quadrabile. Praeterea si spatium ADB sit tale, ut etiamsi inquadrabile, ab eo tamen possint algebraice secari segmenta aequalia, vel in ratione data, qualis est

Circulus vel Ellipsis vel Hyperbola (nescio an aliae curvae etiam hac proprietate gaudeant) tunc spatium indefinitum ADH erit quidem inquadrabile, sed praeter quadrabile AEI infinitas alias habet partes quadrabiles, et hoc est quod imposuit Dn. Tschirnhausio animadvertenti id accidere in Lunula ad axem applicata, et perperam universalitatem inde inferenti: dico enim, si spatium ADB non solum sit indefinite inquadrabile, sed etiam si non possint algebraice ab eo abscindi segmenta aequalia, vel in data ratione (haec enim divisio in segmenta aequalia in plerisque curvis dependet ab ipsa quadratura indefinita spatii curvilinei) dico, inquam, tunc praeter spatium AEI in curva AHI plane nullum aliud esse quadrabile.

Groningae d. 1. Decembr. 1696.

P. S. Grata sunt quae scribis de negotio Halensi; in eadem utique persevero intentione, praesertim si non cum detrimento hinc evocarer. Notum est Tibi, quanto hic fruor; si in antecessum indicarei posses, quantum ibi sperandum esset, ut eo tutius deliberare possem, pergratum mihi foret. Quod de excursione in oras vestras ineunte vere suscipienda scribis, vix est ut quid promittam, nisi id fiat feriis canicularibus: tanto enim temporis spatio absque singulari Curatorum venia abesse non auderem. Complicaturo hanc mihi affertur, nescio a quo nec per quem, novus tractatulus Bernardi Nieuwentitii quem inscribit: Considerationes secundae circa calculi differentialis principia, et responsio ad virum Nob. G. G. Leibnitium. A me impetrare minime possum, ut illas legendo tempus perdam. Ex fortuita inspectione pag. 7. 8. video eamdem semper crambem recoquere et ei unice studere, ut verborum Tuorum sensum detorqueat. Oportet, ut tandem serio et rigide respondeas, ne iste Pan, Tibi Apolloni obstrepens, unum alterumve inveniat Mydam sinistre judicantem. Hisce vale et favere perge.

XLI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.*)

Vellem diligentiae saltem Tuae paria facere posse, quando acumine per aetatem obtuso aciem vigentis in Te animi aequare non possum. Sed neutrum licet, quod velim non ignaviae aut etiam affectatae occupationum venditationi tribuas, sed necessitati. Nam in minimis fere calculis omnes pene passus cespito, quod animus nimis in alia distractus ad haec morosiora non satis attendit. Ubi vero acrius animum intendere volo, ut errores calculi tollantur aut caveantur, subito excitantur importunae illae phlogoses caloresque. Quam multa autem sint in quae distrahar, pene supra fidem tuam erit. Nam ut officii curas taceam, quae ad jura nostrorum Principum monumentaque et Historiam Brunsvicensem pertinent, et res Ratisbonensis Diaetae, literasque subinde commutandas cum Ministris, quos Viennae et alibi habemus; et ut praeteream quotidianum laborem digerendarum Notitiarum Historicarum ad nos spectantium, quarum gratia eruditum juvenem in auxilium advocavi, et elaboranda subinde quaedam scripta, quibus justitiam causae nostrae tueamur, volo aliqua tantum attingere, quae extra ordinem quotidie obveniunt. Scripsi hodie longissimam Epistolam ad Virum insignem, qui tractatus quosdam irenicos jussu Imperatoris cum Theologis nostris habitos et morte missi olim magnae dignitatis viri interruptos, Caesareis auspiciis resumere jussus sese ad me convertit, quod sciret priora per meas manus ivisse. Nam ego a puero controversias cum pontificiis tractavi omnibus pene cum pulvisculo excussis. Scis quam multa egerim cum Pelissonio et Episcopo Meldensi, ut facile integra volumina vel solis commutatis de his rebus literis conficerentur. Juvenis quaedam de ordinanda emendandaque jurisprudentia in lucem dederam, et promiseram plura. Videbam rationem ad pauca principia vastam molem quaestionum exigendi. Nunc sunt qui haec velut debita pene convicio efflagitant. Itaque ne pereant quae fortasse non facile cuivis in mentem venirent, vetera subinde recogito et nova addo, ut De-

---

*) Leibniz hat auf dem Entwurf dieses Briefes bemerkt: nicht abgangen; dies bezieht sich indess nur auf den ersten Theil, der seines interessanten Inhalts wegen hier eine Stelle finden mag.

finitiones quasdam atque Elementa perpetui juris formem; quibus Romana accommodando selectiora praesertim ex Pandectis, libro augeo et quo nescio an quisquam alius ad Mathematicam nervositatem propius accedat. Porro ne me rerum Chemicarum Medicarumque exortem putes, scito non exiguam me partem hujus aestatis cum Francisco Mercurio Helmontio consumsisse, quamquam ille mallet de rebus philosophicis sermones caedere. Interim nunc aliquot viri docti a me vellent expiscari arcana ejus, quod me familiariter ipso dudum usum nossent; cum tamen ego multa non sim assecutus, et quae percepi nolim spargere invito amico. Nuperrime princeps ex Belgio foemina, quae illum aliquot menses nobiscum fuisse intellexit, cum secretorum quorundam notitiam hinc petiisset, ad me quasi conscium itum est, dicentique ex eorum me esse numero qui parum tribuunt secretis, non creditur. Praeterea domi habeo opificem, qui jam tertium meae Machinae Arithmeticae exemplum elaborat. Puto Te aliquid de illa dudum intellexisse. Maximas illa multiplicationes et divisiones pene momento efficit rotis, principio a Neperi baculis pariter et Logarithmis prorsus diverso. Viginti quatuor fere anni sunt, quod inveni et prima rudimenta Anglicae Societati, mox et Gallicae monstravi. Hugenius, Arnoldus, aliique qui Parisiis viderant, aliquoties quaesivere, cur paterer rem talem intercidere. Itaque tandem devoravi laborem sumtusque feci; idque saltem assecutus sum, ut duabus Machinis absolutis, in quibus ad duodecim usque notas iri potest, inventio perire amplius non possit. Alias Machinas de aliis rebus mente agitatas jam non tango; vix enim dici potest, quam multa tentarim partim ingenio partim etiam operum ipsorum rudimentis, atque etiamnum quotidie tentem. De philosophicis nunc dicere malo. Scis systema me novum moliri et ni fallor problema de Unione animae et corporis explicuisse. Multa alia satis mira mihi videor in metaphysicis demonstrasse, quorum aliqua etiam attigi in Actis vel Diariis, sed nondum fontibus satis apertis. Nuper ad magnam Principem scripsi de natura animarum, et visus ipsi sum non tantum profunda, sed et lucide dixisse. Mea autem sententia est, omnia, ut sic dicam, plena esse animarum vel analogarum naturarum, et ne brutorum quidem animas interire. Est de his rebus mihi concertatiuncula cum Cl. Sturmio per literas, quemadmodum diu fuit cum Arnoldo, ambobus Cartesianismo praeoccupatis. Mittendae jam sunt literae ad Sinas, ut R. P. Grimaldo respondeam, cui Romae multum lo-

cutus sum. Is nunc Mandarinum in Sinensi aula agit, reique mathematicae praefectus est. Ex itinere ad me Goa scripsit. Si quid rerum mathematicarum aut physicarum illinc quaeri velis, indica quaeso. Etiam ad Suecos et Moscos misi nuper quaestiones de linguis Scythiae interioris a Lappis et Moschis usque ad Tartaros Sinenses. Magni haec nosse momenti foret ad origines nationum, nam Germani, Poloni, Hungari, Turci, Persae, ne quid de aliis dicam, ex Scythia prodiere.

Praeterea hac hyeme volumen Autorum medii aevi ineditorum, qui Historiam tractavere, edi curo, quae res nonnihil habet molestiae, diligenti enim recensione typorum est opus, quam aliis penitus confidere non ausim. Sed et materiam alteri volumini Codicis Diplomatici conquiro digeroque. Nunc cum Tenzelio, Colloquiorum menstruorum Germanicorum autore, doctissimo Viro, disputo de quibusdam rebus literariis; atque inter alia de Etymo vocis Germanorum, quod ille a Romanis inditum putat ex latino significat ad fratres relato; mea suspicio est Germanos eosdem esse qui Herminones, pars nationis Tacito Plinioque memorata; nam frequenter pars notior dat toti nomen, quemadmodum omnes hodie Germani Gallis Alemanni dicuntur, cum olim ea vox solis Helvetiis Suevisque tribueretur, qui ducatu Alemanniae comprehendebantur. Porro Herminones et Germani pene solo differunt aspirationis gradu, prorsus quemadmodum Hispani dicunt Hermanos quos Latini Germanos scil. fratres. Dies me deficeret, si inspecto literarum hujus anni cumulo vellem recensere acta mea literaria; nam et versus subinde extundendi fuere in gratiam poscentium, interdum tamen et non poscentium, nam Hugenium Epicediolo honorandum putavi, cujus copiam hic facio:

Quantumcunque decus dederit doctrina Batavis,
  Hactenus Hugenio non habuere parem.
Sint Patri et Fratri, Guilielmi ingentia fata
  Resque hominum curae, sidera noster habet.
Ejus ad adventum supremo cedit ab orbe,
  Et Jove contentum se Galilaeus ait.
Mox sua Saturnus tradit pater aurea regna,
  Munereque Hugenii se videt esse novum.
Dum radiis, prius ignotis, micat annullus ingens
  Inque ministerium stella novella venit,

Se gratum autori cupiens praestare vicissim
  Cuncta sub orbe suo tempora clausa dedit,
Nam Cronon et Graji Saturnum nomine dicunt
  Omnia quod curva tempora falce metit.
Machina jam longi moderatrix prodiit aevi,
  Quae jubet astrictos legibus ire deos.
Et nunc aligeras nova sub jugo mittimus horas,
  Certus et in mediis navita fertur aquis.
Sol quoque miratus spatia intercedere discit
  A medio ad medium non satis aequa diem.
Cernite mortales, quo vestra potentia surgat!
  Possumus aetheriis jam dare jura polis.

Guelfebyti nunc novissime hortatu Sern. Ducis dissertationem conscripsi de Restauratione Linguae Germanicae, et novo quodam ordine fundando, cujus opera vindicetur Lingua in pristinam dignitatem, et tria dictionaria condantur, Lexicon Vocabulorum usitatorum, Cornucopiae technicorum, et Glossarium Etymologicum, quo vocabula obsoleta et provincialia originesque explicentnr. Haec Tibi scripsi (alteri non facile scriberem) ut distractionibus meis lubentius agnoscas.

Nunc ad Tuam Epistolam venio. Verissimum est quod scripsi (nisi quis in describendo commissus est error) esse $\int l\,\overline{1+x}^n x^e\,dx = l\,\overline{1+x}^n\,\overline{1+x}\,.\,x^e - n\int l\,\overline{1+x}^{n+1} x^e\,dx - e\int l\,\overline{1+x}^n x^{e+1}\,dx$, quod reperies differentiando, si ut oportet ponas $d\log\overline{1+x}$ esse $\frac{dx}{1+x}$, neque iste valor altero, de quo mox, nisi uno membro est prolixior. Sed annotavi eum ob rationem non spernendam, quam adjeci. Tuus ejus loco substitutus errore non caret, quem descriptioni tribuo. Ais enim esse $\int l\,\overline{x+1}^n x^e\,dx = \frac{1}{e+x} x^{e+1}\,l\,\overline{1+x}^n - \frac{n}{e+1}\int \frac{x^{e+1}\,dx}{1+x}$, cum sit $= \frac{1}{e+1} x^{e+1}\,l\,\overline{1+x}^n - \frac{n}{e+1}\int \frac{x^{e+1}\,l\,\overline{1+x}^{n-1}\,dx}{1+x}$. Neque mi-

nus verum est, quod dixi esse $l\overline{1+x}^2 \frac{1+x}{x} = 2\int \frac{l\overline{1+x}\,dx}{x} - \int \frac{l\overline{1+x}^2\,dx}{xx}$ (⊙). Sit enim $l\overline{1+x} = f$ et $\frac{1+x}{x} = g$, foret $l\overline{1+x}^2 \frac{1+x}{x} = ffg$; jam $df = \frac{dx}{1+x}$, et $dg = -\frac{dx}{xx}$, ergo $2fgdf = 2l\overline{1+x}\,\frac{dx}{x}$, et $ffdg = -l\overline{1+x}^2\,\frac{dx}{xx}$. Jam $ffg = 2\int fgdf + \int ffdg$, ergo explicatione facta seu substitutis valoribus prodibit aequatio (⊙). Quodsi jam etiam verum esset, quod ais, esse $l\overline{1+x}^2\,\frac{1+x}{x} = 2lx - \int \frac{l\overline{1+x}^2\,dx}{xx}$, haberemus quaesitum, nam foret $\int \frac{l\overline{1+x}\,dx}{x} = lx$, quod locum habere non potest. Itaque suspicor Tibi hoc loco contigisse, quod mihi nimis saepius solet, calculi errorem.

Quae de seriebus ad quadraturas reducendis habes, optima sunt et meis consentanea, qui methodo quidem ista, ut vides, sum usus subinde, sed non omnia observavi, itaque ex tuis fio doctior. Nonnulla hujus generis latent dispersa in meis schedis, sed quae facilius, ubi opus, denuo eruo, quam in illa chartarum indigesta mole quaero. Haud dubie regressus a seriebus ad summas vel per quadraturas vel sine quadraturis pendet a quibusdam aequationibus finitis, quae ex ipsa serie oriuntur, varie tractata, sic ut ipsa series tandem ex calculo possit tolli. Neque hoc in seriebus tantum verum est, sed et in aliis expressionibus in infinitum tendentibus, quae seriem proprie dictam non constituunt, qualis est tua, quam refers $\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}}$ etc. ope extractionis, qualis est [etiam ista mea] ope divisionis

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}}$$

per quam secatur linea in extrema et media ratione. Et generaliter pro tali divisione si scribas

$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+}}}}$ etc. erunt a, b, c etc. quotientes, qui prodeunt quaerendo maximam communem mensuram inter duas quantitates, quae si sint commensurabiles, finitur progressio; sin minus, pergit in infinitum. Vice-Comes Brounkerus apud Wallisium in Arithmetica infinitorum dedit talem expressionem pro circulo, ubi pro a, b, c, d, e etc. proveniunt, si bene memini, unitates; sed ubi ego hic pono unitates, ibi ipsi proveniunt numeri quadrati. Sed mallem progressionem pro circulo dari, qualem hic designo, ut haberi posset series quotientium in infinitum provenieus operatione, qualis adhibetur, quaerendo maximam communem mensuram. Etiam extractionibus radicalibus continuatis exhibetur latus polygoni circularis, ut constat. Sed magnitudo circuli inde non derivatur, nisi multiplicando per numerum infinitum. Circa continuatas quotientium investigationes multum meditatus est Dn. Lalovera, autor Itinerarii Siamensis, etsi istam expressionem continuatae in infinitum divisionis non adhibuerit. Continuatae istae in infinitum expressiones etiam adhiberi possunt in tangentium inversis ad quadraturas revocandis. Nam tangentium inversae similes se habent quodammodo ad quadraturas, ut radices affectae ad puras seu absolutas, ut si sit $dy = xdx + ydx$ seu $y = \frac{1}{2}xx + \int ydx$, ubi in $\int ydx$ substituendo valorem ipsius y inventum, fit $y = \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3 + \int\int ydxdx$, ubi rursus in $\int\int ydxdx$ valor ipsius y repertus substitui potest. Galli quidam, ni fallor, Dn. Roolle et Dn. Lanion*) appropinquationes quasdam pro aequationibus dedere, quae hoc fonte implicationum, ut voco, nitebantur, dum scilicet valor semirepertus in parte sua nondum reperta substituitur. Memini et Angli cujusdam, cujus nomen non succurrit, scriptum Anglicum vidisse in Anglia, qui similia quaedam adhibebat pro aequationum radicibus, sed in numeris magis quam in constructionibus linearibus, quas a Te et Dn. Fratre Tuo ex hoc

---

*) In Betreff dieses Namens, der Lagny heissen muss, siehe die folgenden Briefe.

fonte ductas libenter intelligo, et gratias pro indicio ago, etsi enim viderim quae Dn. Frater Tuus de talibus in Actis dederat, non potui tamen considerare attentius.

Dn. Groningius etiam ad me nuper scripsit et de Historia Cycloeidis consuluit; indicavi ipsi me esse autorem quadraturae segmenti obliqui, quam et olim publicavi in Diario Parisino ante multos annos; sed suasi, ut ne nimis immoretur leviculae controversiae inter Torricellium et Robervallium de primo autore quadraturae Cycloeidis, cum ipsa sit perfacilis. Exponenda potius inventa Wrenni et Dettonvillaei seu Pascalii, et ipsius imprimis Hugenii de Cycloeidis usu ad pendula sane pulcherrimo, de Tuo novo Cycloeidis usu nihil adhuc dicere licuit.

Rogo ut mihi folium de mense Lipsiensi novissime missum remittas, ut scilicet mensem alias mutilem futurum redintegrare possim. Mitto nunc folium novum cum dimidio, in quo videbis, quae vir egregius*), cui ambo quaedam objecistis, respondeat. Vellem venisset ad rem et locutus fuisset paulo apertius directiusque, ut Tibi mihique mos est. Ego quoties lapsus sum, id libenter et sine circuitione fateor. Miror quid hoc sit, cum dicit, Methodum Tangentium inversam non amplius a se magni fieri. Habetne pro parum utili, an pro parum difficili? Nam si utilis et difficilis est, utique magni facienda est. Utilem esse ad magni momenti problemata, experientia, ni fallor, docet. An igitur ipse eam facilem reddidit? Hoc non puto, alioqui dixisset. Nam quod ait, sibi successisse, quando inquisivit, fortasse indiget multa limitatione; certe ipsi ego talia aliquando in Actis proposueram, quae non attigit, nescio an in ea inquisierit, quemadmodum quidem verisimile videri posset. Est Vir magni ingenii, sed tamen hanc in eo observo Hypocrisin, ut sic dicam, philosophicam, quod vult videri spernere gloriam, quando eam maxime affectat. Quando Hanovera transibat, mihi nescio quae exposuit theoremata de circuli inscriptis et aliis, quorum non satis memini, ex quibus se magna ducturum augurabatur, quod ego animadvertere satis non poteram. Habet haud dubie multa egregia, quae si candide proferret, plus obtineret verae gloriae et magis prodesset Reipublicae. Quod ait, se a figura data contenta duabus rectis et una curva ordinaria abscindere posse partem imperatam

*) Es ist Tschirnhauss.

ductu alterius curvae ordinariae, id est facillimum; tantum enim oportet constituere in data figuram datae similem, quod fit emittendo rectas ex puncto in figura sumto ad quodlibet punctum ambitus, et eas in ratione constante minuendo. Sic habebimus figuram datae similem et similiter positam, fiant autem latera homologa in subduplicata ratione rationis datae, quam pars imperata ad totum habere debet. Pro solido seu corpore latera homologa seu emissarum imminutiones esse deberent in ratione subtriplicata. Sed si methodus ejus daret simul quadrationem, quando est possibilis (ut verba innuere videntur) maxime utique momenti foret; verum hoc difficile puto. Praeclara est Tua contra ejus excusationem instantia. Inter inquisitione dignissima foret in Geometria producere, quod in Circulo, Hyperbola et Ellipsi quodammodo incipitur. Nam Circulus sectorum magnitudine exhibet sectionem anguli, Hyperbola sectionem rationis seu logarithmi; non dubito jam, quin porro certo ordine exurgant altiores lineae alias sectiones exhibiturae.

Dic quaeso distincte, quaenam sint tua emolumenta praesentia, ut possim significare; aequum enim est, quod ais conditionem non debere fieri deteriorem. Utinam adjiceres denuo pretium corticis, ita enim me onere inquirendi levares, alioqui cogar chartarum massam percurrere, in quibus latere tuas oportet, quod nondum facere licuit. Nolim enim talia a me oblivioni tradi posse arbitreris. Si Dn. Nieuwentiit non vult aut non potest capere meliora, et tamen pervicacem sese ostendit, tractandus est instar Haeretici, quem post unam alteramve admonitionem devitandum esse scriptura docet. Vellem ipsi responderet Dn. Cluverius, jucundum id futurum esset. Vale etc.

Dabam Guelfebyti 28. Decembr. 1696.

XLII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ad novissimas Tuas nudius tertius acceptas ita statim respondeo. En exemplar programmatis *) per quod prorogationem ter-

*) Joh. Bernoul. opp. Tom. I. pag. 166.

mini mathematicis significo. Neuter nostrum erravit in summanda $l\overline{1+x}^{n}x^{e}dx$; quin egregiam potius logomachiam commisimus, dum alter alterum non intelligebat; Tibi enim $l\overline{1+x}^{n}$ erat logarithmi potestas, mihi autem potestatis logarithmus. Hinc deliberandum do, annon satius esset ut ad evitandam confusionem illud ita scriberetur $l^{n}\overline{1+x}$, hoc autem sic $l.\overline{1+x}^{n}$, necdum tamen bene se habet $\int l^{n}\overline{1+x}.x^{e}dx = l^{n}\overline{1+x}.\overline{1+x}.x^{e} - n\int l^{n-1}\overline{1+x}.x^{e}dx - e\int l^{n}\overline{1+x}.x^{e-1}dx$, videtur loco ultimi membri poni debere $-e\int l^{n}\overline{1+x}.\overline{1+x}.x^{e-1}dx$. Videbis si denuo ultimas meas examinare placeat, hoc sensu mihi nullum, ut suspicaris, contigisse calculi errorem.

Optime dicis expressiones illas in infinitum tendentes non esse series proprie sic dicendas; aptius ita scriberentur etc. $\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{a+\sqrt{b}}}}$ procedendo a dextra ad sinistram; unde ridicula comparatio olim mihi venit in mentem, quasi hujusmodi series aeternitatem ut ita dicam praeteritam, vulgares vero futuram repraesentarent. Cum Parisiis degerem, memini aliquid vidisse a Dn. Roolle et Lagny (nescio an sit idem qui Tuus Lanion) circa appropinquationes radicum, quod nitebatur fonte ut vocas implicationum, sed Roolle pro cubicis absurdos committebat paralogismos, quos etiam correxi et methodum correctam Dn. Hospitalio exhibui *). Jucundum erat videre ut hi duo, Lagny puta et Roolle, diris invectivis misere adeo se mutuo proscindebant pro re nihili et alter alterum plagii insimulabat; ridebam, cum viderem unum post alterum saepius in hospitio meo, ut uterque meum suae causaei patrocinium ambiret.

Cum Groningius ad Te scriberet, nihilne attigit de Msptis. Hugenianis mihi promissis? Potuisses ipsi indicare me infinita spatia cycloidis vulgaris quadrabilia invenisse praeter illa duo a Te et Hugenio reperta, quod forte etiam in Actis ostendam. Non erat, cur Groningium celares novum meum cycloidis usum pro celerrimo

*) Joh. Bernoull. opp. Tom. III. p. 529. sq.

descensu, hic enim illi ipse ego rem aperui, persuasus scilicet ejus historiam ante terminum elapsum lucem non aspecturam.

Legi et relegi schediasma*) Dn. D. T. sed, fateor, nulli ex nostris objectionibus satisfacit; multa dicit sed nihil dicit; affectat nescio quam obscuritatem qua errores suos palliare satagit, et simul sua mysteria pomposis verbis ut Alchymistae solent usque et usque promittit, nihil tamen unquam producit. Si planam adeo habet methodum tangentium inversam, ut ipsi jam sit ludus puerilis, quidni se accingit problemati celerrimi descensus? Sub finem loquitur de quodam specimine, quod jam ante biennium Tecum, ut dicit, communicavit; gestio scire quid sit et an inde probabile videatur rectangula rectarum se intersecantium non solum in circulo et illis curvis quas ego determinavi, sed in omnibus omnino curvis esse aequalia; interim falsum hoc esse perfacile demonstrarem, nisi id velit intelligere de duabus tantum rectis, uti innuere videtur quando ait certissimum id esse in tribus sectionibus conicis; hoc autem cum hic nihil faciat ad rem facile largior, non enim duabus duntaxat, sed infinitis, imo omnibus ex eodem puncto prodeuntibus rectis aequalitatem rectangulorum competere requirimus. Vellem D. T. solveret problema, quod in hoc programmate super hac materia propono, ut et illud quod jam in Actis proposui, sed altum silentium de hoc in sua responsione.

Mitto ecce (rogo ut remittas) scriptum**) certi cujusdam Mathematici Parisiensis Salvatoris, quod Dn. Marchio mihi communicavit, ubi Auctor erroneam quandam solutionem mei problematis exhibet. Nihil magis miror, quam quod Dn. Hospitalius eam cum plane nihil valeat adeo laudavit, et crassos errores quibus evidenter laborat non animadverterit: quaerit enim primo quod non est in quaestione, curvam scilicet de qua non est sermo, et deinde peccat in principia calculi differentialis, quando considerat duas lineas angulum infinite parvum constituentes ut absolute parallelas. Falsitas hujus solutionis vel ex eo solo patet (ut rescripsi Dno. Marchioni) quod juxta determinationem Geometricam tangentis curvae quaesitae pag. 3. hujus scripti traditam sequeretur dari quosdam casus, in quibus problema esset impossibile, facile autem percipitur

*) Responsio ad Observat. DD. Bernoulliorum. Acta Erudit. 1696. p. 519.

**) Siehe die Beilage zu diesem Briefe.

in omni casu esse possibile. Hic idem Salvator fuit qui proposuit problema aequilibrii, non tamen, licet 27 analogias instituerit, ad solutionem pervenit.

Jam olim ni fallor dixi distincte, quaenam siut mea emolumenta praesentia; salarium, ut ajunt, fixum est 1250 fl. Holland. seu 500 talerorum imperialium, praeter emolumenta academica quae vocant accidentia, quae ad 150 imperiales praeter propter ascendunt. Corticis jam diu oblitus sum; vellem ut etiam Tu reculae hujus oblivisceréris et illam ut munusculum a me Tibi factum considerares.

Dn. Nieuwentiit utique responsione non dignus est; ipsi tamen forsan respondebo circa aequationes saltem exponentiales, quia ibi etiam mea res specialiter agitur, non tam illius in gratiam quam publici, quod hactenus exponentialium tractationem nondum satis vidit. Cur dicis, quod velles ipsi responderet Cluverius, quod jucundum id foret? cum tamen Cluverii nullam mentionem faciat; an forte olim hi duo se mutuo elogiis sc. exercuerunt. Vale et cum novo anno fruere sanitate etc.

Groningae 19. Jan. 1697.

Beilage *).

Probleme.

Estant donné les points A, B (fig. 79) trouver la Courbe AB, telle qu'un corps pesant la parcurant arrive de A en B dans le moindre temps possible.

Lemme.

Si un corps pesant descend par AB (fig. 80), et un autre par ADB, trouver le rapport du temps par AB à celuy par ADB.

Tirez les horizontales BC, DF, prenez AG moyenne proportionelle entre AF, AB, tirez l'horizontale GE. Je dis que le temps par AB est au temps par ADB comme AB est à AE + HB. (Nota que $\overset{\smile}{AB}$ signifie le temps par AB et $\overset{AD}{\underset{DB}{\smile}}$ signifie le temps par DB apres avoir parcouru AD).

---

*) Nach einer von Leibniz revidirten Abschrift.

$$
\begin{array}{rl}
\text{Car} & \overset{\smile}{AB} : \overset{\smile}{AC} :: AB : AC \\
\text{et} & \overset{\smile}{AC} : \overset{\smile}{AD} :: AC : AE. \quad \text{Donc ex aequo} \\
\hline
 & \overset{\smile}{AB} : \overset{\smile}{AD} :: AB : AE \; * \\
\text{de plus} & \overset{\smile}{AB} : \dfrac{AF}{\overset{\smile}{FB}} :: AB : BG \\
\text{et} & \dfrac{AF}{\overset{\smile}{FB}} : \dfrac{AD}{\overset{\smile}{DB}} :: BG : BH. \quad \text{Donc ex aequo} \\
\hline
 & \overset{\smile}{AB} : \dfrac{AD}{\overset{\smile}{DB}} :: AB : BH \; * \text{ en prenant la somme de } * \\
 & AB : \overset{\smile}{ADB} :: AB : AE + BH.
\end{array}
$$

Il suit 1.° si BF est infiniment petite, $DE = EC$, $DH = HB$, de sorte qu'il ne s'agit plus alors que de couper les lignes DB, DC en deux egalement en H, E.

2.° si BC est infiniment petite, alors DC est parallele à FB.

Proposition.

Soit la ligne donnée AB (fig. 81), l'horizontale BL, la perpend. FL. Soit coupé FB egalement en G, tirez GL. En suite tirez AC, DB, l'horizontale EH. D'une autre part tirez A(C) infiniment pres de AC, B(D) et l'horizont. (E)(H). De plus tirez les perpendiculaires HP, DR, ES. Enfin je suppose DF et BC infiniment petit du 1er degrè. Il s'agit de trouver la situation de AD, DB, la plus avantageuse pour estre parcourue dans le moins de temps.

Pour cela il s'agit de trouver $AE + HB$ le plus petit qu'il est possible.

1.° La difference des obliques AD, A(D) à la perpend. AF est infiniment petit du 2me degré par rapport à AB, et par consequent à negliger par rapport à DE et HE qui sont du 1er degrè.

2.° DC, (D)(C) sont paralleles à FB, donc elles sont coupées egalement en E, (E) et par consequent DB, (D)B en H, (H) et BR en P, donc $P(H) = \frac{1}{2}R(D)$.

3.° Lorsque AC est transportée en A(C), alors DE diminue en (D)(E), et sa differentielle est $-$ SE, et BH en B(H) et sa differentielle est $P(H) = \frac{1}{2}R(D)$; pour trouver la situation de AD la plus avantageuse il faut que ces differentielles soient egales.

4.° Les triangles ES(E), LFG sont semblables, aussi bien que les triangles DR(D), BFD.

Donc (E)S : SE = D(D) :: GF : FL, de mesme
D(D) : R(D) = 2 P(H) :: BD : DF, en multipliant
(E)S : 2(PH) :: GF × BD : FL × DF, c'est à dire
(E)S : PH :: BF × BD : FL × DF,
mais les differentielles (E)S = P(H),
donc BF × BD = FL × DF,
donc FL : BF :: BD : DF, ce qui doit arriver, pour avoir la situation de AD la plus avantageuse et alors BD sera la tangente de la Courbe requise.

5.° Pour avoir geometriquement cette tangente BD (fig. 82) sur AB decrivez un demicercle, tirez la verticale BT et AT perpend. sur BA, inscrivez dans le cercle AV = AT, tirez BV, elle sera la tangente requise.

Car prenant BF infiniment petite, tirant la perpend. FL qui coupe BV en D, les triangles LFB, BAT sont semblables, aussy bien que BDF, BAV, donc LF : FB :: BA : AT = AV :: BD : DF comme cy dessus.

6.° Pour avoir les soutangentes, tirez l'horizontale XAZ, ou la verticale AP, les soutangentes seront AZ, ou AS, en prenant A pour point fixe, et AX = x, BX = y. L'on trouvera successivement AB, AT = AV, BV et enfin AZ.

Ensuite on trouvera PS et AS.

Par le moyen des soutangentes l'on trouvera le rapport des differentielles dx, dy, et par les integrales l'on trouvera la nature de la courbe; mais les occupations que j'ay ne me permettent pas de donner plus de temps à cette matiere.

à Paris le 26. Decemb. 1696. Sauveur.

Der Marquis de l'Hospital hatte folgende Bemerkung hinzugefügt:

Je remarque qu'on peut se passer dans la proposition precedente des lignes A(C), B(D), ES etc. ce qui la rend beaucoup plus simple. Car puisque AE + BH doit être un plus petit et que l'angle BAC est supposé infiniment petit, il s'en suit que DE + BH = BF et prenant les doubles DC + BD = 2BF, et partant BD — BF = BF — DC. Si donc l'on decrit des centres A, B (fig. 83) les petits arcs CN, FM, il faudra que DM

soit egale BN, d'ou l'ou tire à cause des triangles semblables BCN, BLF et FDM, BDF la meme proportion que ci dessus que sert à determiner la position de la tangente BD.

XLIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Schedam Domini Salvatoris, Mathematici Parisiui, cum gratiarum actione remitto. Placet in specimen elegantis et subtilis aberrationis. Nam, ut saepe dicere soleo, Egregiorum Hominum etiam errata docent. Inter alia autem hinc disciuus, quam lubricum sit uti infinitesimalibus, nisi nostri Calculi filo dirigantur. Pro certo habeo Illustrem Dominum Marchionem Hospitalium, si rem voluisset ad calculum redigere, statim errorem fuisse deprehensurum. Credo etiam, si valetudo ejus nondum plane confirmata intentiores istas meditationes pateretur, ipsius Problematis solutionem non esse ingenium ejus effugituram.

Quod attentatam a Domino Salvatore solutionem attinet, equidem concedi potest, non tantum mediam geometricam et mediam arithmeticam duarum quantitatum infinitesimaliter, seu per inaccomparabile, differentium coincidere, sed et duas rectas angulum infinite parvum facientes haberi posse pro parallelis, cum de alia recta eas secante quaeritur, et (quantum judicare possum) Dominum Salvatorem his regulis male usum non esse. Sed alia sunt, quae solutioni ejus obstant; nam (ut differam infra notanda, quod rem aliam plane indagat, quam quae desideratur) reperio tum neglectum verae methodi infinitesimalis, tum insufficientem enumerationem eorum, ex quibus aptissimum est eligendum. Neglectus Methodi infinitesimalis in eo consistit, quod re eo reducta, ut (fig. 81) AE + BH sit omnium minima, et inde inferendo dAE = dBH, necesse est dBH esse infinities infinite parvam, atque adeo et dAE, quorum tamen neutrum in processu hujus solutionis observatur.

Nam omnis quantitas differentialis est utique uno minimum gradu inferior sua integrali. Cum igitur BH, vel ejus dupla BD, sit infinitesimalis primi gradus, utique dBH seu P(H) aut ejus

dupla dBD seu R(D) non possunt non esse infra primum gradum, seu erunt differentio-differentiales ad minimum. Ergo etiam dAE infra gradum primum seu minimum differentio-differentialis esse debebit. Sed hoc non fit in isto processu, et dAE seu S(E) est differentialis primi gradus, quod ex ipsomet processu sic colligitur: Triangula ES(E) et LFG sunt similia. Jam hujus trianguli LFG latera sunt accomparabilia, seu inter se comparabilia, cum omnes angulos habeant assignabiles, ergo et trianguli ES(E) latera sunt accomparabilia; jam recta E(E) est primi gradus, ergo impossibile est ut S(E) sit gradus secundi, alioqui foret ipsi E(E) incomparabilis. Interdum quidem fieri potest, ut differentiae quantitatum ordinariarum sint secundi gradus, ut ipsarum AD vel A(D), quippe angulum ad FD(D) facientium a recto inassignabiliter differentem, sed ipsarum AE differentiae sunt gradus primi, cum tamen, ut dixi, deberent esse secundi. Imo quod amplius est, ex figura inspecta, processuque solutionis, video ne ipsas quidem dBH esse secundi gradus, sed primi; quod utique prorsus incongruum est, differentias seu elementares quantitates esse homogeneas ipsis terminis seu quantitatibus integralibus. Id autem sic esse ita patet. Nam R(D) dupla ipsius dBH seu ipsius P(H) est primi gradus, ergo et ipsa dBH. Ipsam autem R(D) primi gradus esse eodem modo probo, ut ante. Nam, per ipsum solutionis processum, triangulum DR(D) simile est triangulo BFD; hujus autem anguli sunt assignabiles; ergo latera accomparabilia. Itaque et trianguli DR(D) latera sunt accomparabilia. Jam unum hujus latus D(D) est primi gradus, ergo et R(D) est primi gradus, non secundi; alioqui ipsi D(D) inaccomparabile foret. Patet ergo neglectus verae Methodi infinitesimalis.

Quid vero, si quis dicat, C(C), D(D), E(E) esse secundi gradus? Respondeo hoc esse contra mentem autoris, qui simpliciter dixit C et (C) infinite vicinas esse, quod utique intelligitur de primo gradu; alioqui admonuisset de secundo, ut alio loco fecit. Si quis tamen ad secundum gradum confugiendum jam putet, ne sic quidem effugiet, incidetur enim in defectum imperfectae enumerationis, de quo jam dicendum. Nam si (D) esset vicinum ipsi D per intervallum secundi gradus, novus esset in enumeratione defectus, tantum enim ex sic vicinis, non vero ex aliis innumeris inassignabilitate primi gradus vicinis aptissimum eligeretur.

Insufficiens quoque enumeratio eorum, ex quibus eligendum

est aptissimum, ex eo patet, quod in solutione non eligitur aptissimum ex omnibus punctis D possibilibus, sed ex iis tantum, quae cadunt in rectam FD, nam et alterum (D) assumitur non ubicunque, sed in recta FD ad AB angulum rectum faciente; ergo si proba essent caetera, sequeretur tamen punctum D non esse electum ex omnibus possibilibus aptissimum, ut desideratur.

Sed si nullum in his omnibus peccatum esset, tamen, ut jam dicere occupavi, id quod indagandum sibi sumit solutio, scopum non ferit, alienumque est a Problemate proposito. A nobis enim quaerebatur, ut curva AD una cum sua productione infinite parva DB daret descensum brevissimum; hic vero indagatur modus efficiendi, ut chorda curvae AD, nempe recta AD, cum dictae curvae productione DB sumta, descensum brevissimum praebeat, quod est diversissimum.

Quanquam etsi omnia sese bene haberent et ad desideratam curvam pertinerent, tamen Problema non esset solutum; tantummodo enim reperta esset aliqua curvae quaesitae proprietas secundum suas tangentes, quod quidem non esset contemnendum, saltem enim Problema physicum reductum esset ad Problema purae Geometriae; sed non ideo esset solutum, nisi hoc geometrico Problemate soluto. Constat autem, quam difficile sit invenire curvas ex datis tangentium proprietatibus, quod Methodum tangentium inversam vocare solitus sum; et licet possit inveniri valor differentialium, seu ratio dy ad dx in ordinariis, non tamen inde semper calculum summatorium instituere, seu terminorum integralium relationes invenire in potestate est. Et quanquam concedi possit haec Problemata aliquo modo pro solutis habenda esse, quando redacta sunt ad quadraturas, cum scilicet demonstratum est, esse transcendentalia, constat tamen rationem haec praestandi nondum extare. Itaque hanc solutionem a Domino Salvatore tentatam a vera multis modis abesse fatendum est. Agnosco tamen non contemnenda nec vulgaria eum specimina etiam hic dedisse ingenii et acuminis, ac non procul abesse a regno coelorum Mathematicorum, si ita de nostris rebus jocari fas est. Non memini me quicquam vidisse ab eo editum: obversatur tamen animo nescio quid, ut videar mihi characterem manus ejus agnoscere.

Cum Parisiis essem, videbam subinde juvenem Lugdunensem peringeniosum, et singulari acumine in interiora etiam Analyseos et Geometriae penetrantem; sed ille ni fallor discesserat, dum ad-

huc essem Parisiis. Vix tamen mihi tunc occurrerant in Gallia, qui aptiores quam ille viderentur ad haec studia excolenda. Nominis non memini, ac proinde dicere non possum, an sit hic ipse Dominus Sauveur. Nosse etiam velim, an sit in Academia Scientiarum Regia, aliudve munus gerat. Sed quicunque sit, certe insigne aliquid praestare posse videtur. Memini legere olim in Diario Eruditorum Parisino, ipsum circa ludum Basettae aliquid mathematice fuisse meditatum *), quod tamen non vidi. Optarem vel ipsum vel alium aliquem ludos omnis generis mathematice tractare, et tam regularum sive legum rationem reddere, quam artificia primaria tradere. Dici non potest, quam multa ad Artem inveniendi utilia lateant in Ludis. Cujus rei ratio est, quod homines in jocosis ingeniosiores, quam in seriis esse solent, cum magis nobis succedant, quae cum delectatione peragimus. Vale etc.

Dabam Hanoverae 29. Januar. 1697.

P. S. Habes sententiam meam de solutione a Domino Salvatore tentata. Putem cavendum Tibi esse, ne dum defectus ejus indicas, veram solvendi rationem invitus demonstres. Et quidem quod Dominum Marchionem Hospitalium attinet, putem optime Te facturum, si solutionem veram ipsi communices, siquidem eam ipse desiderat; praesertim cum ipsi a morbo gravi restituto, ne suadendum quidem sit ut haec meditetur. Puto vere a Te dici, nomen illi Appropinquatori cum Dn. Roolle concertanti non esse Lanion, sed Lagny, et a me vicina nomina fuisse confusa. Vellem Dominus Tschirnhausius excitari se pateretur, ad edendum aliquid in nostris studiis se dignum; habere enim talia non dubito. Sperabam objectiones vestras hunc effectum habituras, sed hactenus declinavit. Fortasse dabit tandem manus. Non memini distincte Theorematum, de quibus loquebatur cum hac transiret. Quae elegantiora mihi videbantur, pertinebant ad Polygona circulo inscripta et circumscripta. Nihil mihi scripto consignatum dedit, unde miror, quod in schediasmate suo, de nescio qua communicatione mihi facta mentionem facere voluerit. Talia sic dicere, perinde est ac si non dicas. Certe aliquid inde duci posse ad solvenda Problemata, qualia a Te novissime proponuntur, non puto. Etiam Domino Hugenio talia quaedam exposuerat (nam hac transiens ad Ba-

*) Journal des Sçavans 1679. 4. Journ. du 13. fevr.

tavos tendebat); sed is mihi scripsit, sese magnas consequentias, quas exinde deducere vellet Dominus Tschirnhaus, non videre.

Dominus Groningius nihil vel de Te, vel de Manuscriptis Hugenianis: unde ego quoque dissimulavi talia mihi ex Te esse nota, quae ipse attingere noluerat, praesertim cum sese novam Newtoniani Operis editionem moliri scripserit: quam tamen dissuasi, quod de ea cogitare Newtonum ipsum intellexissem. Et suspicor Hugeniana ibi adjicere voluisse. Quod si iterum scribat, videbo an commode efficere possim, ut haec nobis communicet; praesertim si editionis cogitationem deposuerit. Etsi autem scribas, potuisse me significare ipsi usum Cycloidis ad Problema Tuum, ego tamen si fecissem, Te inconsulto, putassem fecisse me reprehensibiliter: cur enim arcanum tuum ipsi crederem, quod si ipsius neglectu, vel studio, ad alios emanaret, merito de me queri potuisses. Nec refert quod ille Librum suum tam subito editurus non est; potuisset enim rem aliis communicare aliter quam per librum, nec mihi ille satis est notus.

De emolumentis tuis proxime ad Berolinenses scribam. Sane Halis salarium eousque ascendere non puto. Privatae tamen informationes si quidem Te illis dare velis, hoc poterunt supplere atque etiam vincere.

Nieuwentiitius contra Cluverium in primis suis opusculis scripsit. Id puto Domino Cluverio non satis esse exploratum; alioqui fortasse respondisset. Idque non injucundum esse futurum, si modo acerbitas absit.

XLIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Non improbavi quod Dn. Salvator duas rectas AC, A(C) (fig. 81) angulum infinite parvum constituentes assumserit pro parallelis; hoc enim non concesso, pleraque nostra caderent; sed illum falsum puto quod quasi absolute parallelae essent, inde conclusit duarum illarum linearum partes DC, (D)(C) bifariam divisas esse in E, (E) per lineam GL, cum tamen differant divisiones istae a veris bisectionibus, quantitate quidem incomparabili cum

DC, sed tamen comparabili cum $\frac{1}{2}$ P(H) vel R(D); ita ut non legitime inferri possit: ergo P(H) = $\frac{1}{2}$ R(D), quamvis alias hoc verum sit, si (non attendendo ad lineam GL, ut ipse Salvator in processu non amplius attendit) modo supponantur DC, (D)(C) exacte bifariam divisae in E, (E). Quantum ad Tuas objectiones, in eundem fere modum ego objeceram; et quidem primo intuitu videbam Salvatorem quaerere aliquam curvam quae non est in quaestione, quod Dno. Marchioni eadem hora qua accepi solutionem Salvatorianam rescripseram, ut et ni fallor Tibi in praecedentibus meis. Sed ecce quid Dn. Marchio ad hanc objectionem reposuit: „Lorsque Mr. Sauveur m'apporta la solution, j'étois sur le point de sortir et ainsi je n'eus pas le loisir de l'examiner. Le lendemain matin l'ayant parcourue je me fis à moi meme une partie des difficultés que vous me marquez, et il me sembla d'abord (comme vous dites) que quoique le temps par la souteudante AC et par la petit coté BC fût un plus petit par rapport au temps par AB, il ne s'ensuivait pas que le temps par le polygone ou la courbe AEDCB (fig. 84) fût aussy plus petit que par tout autre polygone. Cependant je me repondis en cette sorte: Puisque le temps par AC, CB est un plus petit par rapport à AB, celuy par AD, DC un plus petit par rapport à AC, celuy par AE, ED un plus petit par rapport à AD etc. il s'ensuit que le temps par le polygone AEDCB est un plus petit que par tout autre polygone et sans y faire davantage de reflexion, je passay au reste m'imaginant que Mr. Sauveur avoit examiné à fond cette difficulté etc. Mais je vois bien à present que ce n'est point la courbe de question dont il determine les tangentes, mais bien d'une autre courbe dont la soutendante avec la particule de la courbe voisine soit parcourue dans le moins de temps. Ainsi je vous accorde que Mr. Sauveur s'est fort trompé lorsqu'il assûre que cette courbe est celle la même qui étoit en question, mais je crois en même temps qu'elle satisfait à cet autre probleme etc.“ Hactenus Hospitalius.

Eandem insufficieutem enumerationem eorum, ex quibus aptissimum est eligendum, etiam a me fuisse animadversam in Salvatoris solutione, colligere poteris ex iis quae Dno. Hospitalio respondi, quorum studio descriptionem retinui, ne forte alia quam quae revera objeci, mihi affingi possent. En autem propria mea verba, ut videas an quid insit veritati non consentaneum: „Je soutiens encore que les lignes que Mr. Sauveur suppose coupées

en deux egalement ne le sont pas absolument: Car soit A D O (fig. 85) un angle quelconque, B O perpendiculaire à A D, D A H un angle infiniment petit, C O tirée du milieu C de la ligne B D, coupant la ligne E H en n; je dis que E n ne sera pas egale à n H contre ce que suppose Mr. Sauveur; car ayant tiré E G parallele à B D, il est manifeste qu'elle sera coupée en F en deux parties égales E F, F G; et partant ayant mené F m parallele à D O, ce seront E m, m H, et non pas E n, n H, qui seront égales; or la difference en est m n qui est comparable ou P (H) ou $\frac{1}{2}$ R (D) dans la figure de Mr. Sauveur, c'est donc mal raisonner que de supposer E n = n H pour en tirer P (H) = $\frac{1}{2}$ B (D) etc. Au reste vous croyez si Mr. Sauveur n'a pas attrapé la veritable courbe de question, qu'il ait toujours determiné les tangentes d'une autre courbe dont la soutendante avec la particule voisine de la courbe soit parcourue dans le moins de temps; mais je pretens qu'il n'a rien fait, vû qu'il suppose que le temps par la soutendante A C (fig. 86) et par la particule B C est un plus petit par rapport à A B absolument, au lieu que ce n'en est un qu'en consequence de la perpendicularité de la ligne D E sur la ligne A B, c'est-à-dire qu'il est vray seulement que le temps par A C, C B est plus petit que par tout autre A E, E B, prenant le point E dans la perpendiculaire D E en delà ou en deçà du point C. Or si vous prenez maintenant une autre ligne que D E, par exemple l'horizontale D F, vous y trouverez aussy un point G tel que le temps par A G, G B soit un plus petit à l'egard de tous les autres points qu'on pourroit s'imaginer sur la ligne D F. Il y a donc une autre courbe A G B qui passe par G, qui a la meme prérogative par rapport à la ligne D F que celle de Mr. Sauveur par rapport à D E; d'ou vous voyez qu'il y a une infinité de courbes de cette façon selon les diverses positions de la ligne D F ou D E; par quelle raison faut il presentement en choisir l'une plutot que l'autre? Mais en voyla assez sur le chapitre de Mr. Sauveur."

Caeterum perbene observasti in Salvatoris solutione neglectum verae methodi infinitesimalis, dum ille confundit diversorum graduum differentiales, aequando scilicet differentialem quantitatis infinite parvae cum differentiali quantitatis finitae, quae duae differentiales ad minimum uno gradu differunt; responderi quidem posse ipse notas, quod quantitates finitae quandoque differre possint differentiali secundi gradus, sed id isto loco non quadrat, nisi sta-

tuatur angulus EA(E) (fig. 81) infinities-infinite parvus. Quando aliquid quaerendum circa quantitates finitas et infinite parvas, optima mihi via videtur, ut primo omnes quantitates statuantur finitae, ut hic BF, quam considerarem tanquam finitam, unde communi modo indagarem quantitatem anguli FBD, quo generaliter cognito facerem in aequatione BF = 0, et sic prodiret quantitas anguli FBD et per consequens positio lineae BD, quam Salvator quaerit pro tangente curvae suae.

Largior quidem in istis, quae dedit Dn. Salvator, multum ingenii et acuminis inesse; patet tamen etiam illum nondum possidere genuinam methodum talia tractandi, sed quasi in tenebris palpare, cum interdum quaerat per longas ambages, quae uno ductu calculi absolvi possunt, teste problemate aequilibrii, quod in casu simplicissimo post 27 analogias institutas nondum ad finem perducere poterat, cum tamen nihil facilius fuerit, licet generaliter proponatur. Interim non dubito egregia ab eo expectari posse, si modo strenue hisce vacare velit. An sit in Academia Scientiarum ignoro, puto tamen non esse, cum enim Parisiis essem, ne nomen quidem audiveram; quis sit quidve muneris gerat, ex Hospitalio resciscam. Ipsum circa ludum Bassetae aliquid mathematice fuisse meditatum hactenus nesciebam; id videre optarem: nam frater meus jam a longis annis opus molitur, quod artem conjecturandi inscribet, ubi non solum omnivarios ludos mathematice tractandi, sed etiam alias in omni vitae genere probabilitates ad calculum revocandi modum traditurus est; nescio autem annon opus reliquerit imperfectum, saltem mea, quae olim contuli quaeque ipse non spernanda judicavit, jam vix non expunget solita sua simultate agitatus. Caeterum diu est quod Dn. Hugenius aliquid exhibuit de ludo aleae. Item in operibus mathematicis in folio (Ouvrages de Mathematique) quae paucis abhinc annis prodierunt Parisiis, aliquid videre est a Freniclio de combinationibus, ubi etiam agit de sorte investiganda certantium circa Electionem Senatorum Genuensium.

Ex quo Dno. Marchioni Hospitalio unam alteramve proprietatem curvae celerrimi descensus subindicavi, jam de novo sperat se ante Pascha penetraturum in solutionem, meam itaque oblatam ipsi mittere differo donec rursus petat: „Je vous prie (inquit) de ne me point envoyer vos solutions si elles ne sont pas parties, parceque cela m'ôteroit le plaisir de pouvoir penser à vôtre probleme que je trouve de plus en plus curieux, je vous prie seulement de les te-

nir toutes prêtes pour me les envoyer dans le terme de pâques qui est celuy que vous avez fixé." Ex Hollandia mihi rescriptum est Dn. Mackreelium viso meo programmate nuper impresso, quo problematis dilationem Eruditis significo, pro responso hoc tantum dedisse, que cela étoit bon pour les Allemands, mais que les Hollandois n'y repondroient pas. Tale judicium a sutore ultra crepidam judicante parum moror; credo Hugenium, mathematicorum Hollandorum maximum, si viveret, aliter judicaturum. Interim rescripsi ut Mackreelio indicetur, si solutionem intra terminum assignatum dederit, se centum florenos a me obtenturum, ne problema tanquam inutile quid infra dignitatem suam aestimet, cui solvendo ne opellam quidem perdere dignari velit.

Hisce diebus aliquid ad Acta misi de calculo exponentialium*), quod pro responsione inserviet ad ea quae Dn. Nieuwentiitius circa hanc materiam de novo opposuit; spero illum tandem acquieturum censura satis severa, nisi severiorem maluerit. Eodem Schediasmate respondi etiam Dno. Tschirnhausio, sed longe modestius, ita ut hoc forsan ipsum sit fortius excitaturum ad edenda quae premit.

Male sibi consulit Dn. Groningius, si operis Newtoniani editionem recudendam in se suscipit; quid enim expectandum ab Homine qui talia non intelligit, imo quem vix communis Geometriae limina transgressum credo; Tecum suspicor Hugeniana ibi adjicere voluisse, forsan quia videbat, cum hic esset, me nonnullo desiderio teneri illa videndi, atque sic thesaurum sibi esse non mediocrem, quem orbi literato impertiendo mirum quantum de publico mereri putabit; hinc non operae pretium duco, ut novas apud illum instantias facias nisi ultro communicaverit. Remitto hic Schediasma Tschirnhausianum maxima cum gratiarum actione. Vale etc.

Groningae d. 16 Febr. 1697.

P. S. Hasce Cursori traditurus accepi literas a Menkenio nostro qui cogat, ut excerpta mittam ex Considerationibus secundis Nieuwentiitii, objectionibus meis praefigenda; meas igitur ad Te in hunc diem 20. Febr. dimittendas distuli, ut interea excerpere et responsionem ad Dn. Menkenium uno involucro dimittere possem, quam proin ocyus ad eum deferendam cures, rogo.

---

*) Principia Calculi exponentialium seu percurrentium. Acta Erudit. 1697.

XLV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Credo ipsum Dnum. Salvatorem, intellectis judiciis, assensurum longe sese adhuc a proposito Problemate abfuisse. Itaque non est quod ejus tentatae solutioni amplius immoremur. Verissimum est ne illi quidem curvae exhibendae sufficere, quam quaesisse videri possit, et quae vereor ut sit possibilis, aut intelligibilis.

Domini Nieuwentiit ;Considerationes secundas accepi tandem, missu ipsius, ut videtur, Autoris, etsi ipse non apparuerit. Nam Bibliopola Batavus, cum alios libros Hanoveram mitteret, hunc extra ordinem adjecit, suggerente opinor Autore, vel ejus amico. Dici non potest, quam jucunda mihi fuerit harum considerationum inspectio, et quam effusos risus expresserit; usque adeo nugas agit Vir bonus. Exempli causa, vult numerum infinitum unum alio non esse majorem. Esto numerus infinitus m. Jam ipse agnoscit in calculo dari 2m; unde sequitur utique 2m esse majorem quam m, cum 2m sit duplus ipsius m. Hic noster respondet negando 2m esse duplum ipsius m. Et ut absurditatem cumulet absurditate, rationem reddit suae negationis, nempe 2m non fieri multiplicando numerum m per numerum 2, sed multiplicando numerum 2 per numerum m. Spectatum admissi risum teneatis amici. Qui talia concoquere potest, ab eo quis demonstrationes severas exigi ferat? Quis tulerit Gracchos de seditione querentes? Itaque constitui pro responsione, haec et similia quaedam, verbotenus excerpta, ad Acta mittere, judiciumque relinquere Lectori, annon talia recitasse sit refutasse. Vellem mihi datum fuisset inspicere quae pro Actis contra eum mittis; neque vereri debebas (quod Te fecisse opinor) ne quaedam peterem emolliri ut antea factum est. Neque enim ego indignationi Tuae intercedo.

Si qui in Batavis Problema Tuum se indignum dicunt, nae illi vel rem non intelligunt, vel vulpem imitantur, quae pyra cum attingere non posset, acerba esse dicebat. Dnum. Makreelium scio Dno. Nieuwentiit esse amicum; nam hic facit illius mentionem, et ille hujus Libellum priorem mihi, per quemdam iter hac facientem misit: sed non putabam, sive affectu erga amicum, sive invidia

erga alios, eo se abripi passurum, ut res pulcherrimas contemneret, cum famae suae jactura.

Certe si Hugenius viveret et valeret, vix quiesceret, nisi Problemate tuo soluto. Nunc nemo est, a quo solutionem facile expectem, nisi a Dno. Marchione Hospitalio, aut a Dno. Fratre Tuo, aut a Dno. Newtono, quibus adderem Dnum. Huddenium, Consulem Amstelodamensem, nisi dudum has meditationes seposuisset. Aliorum nescio an quisquam toto Orbe ;nunc Problemati isti par sit. Uret interim Batavos istos et horum similes nobis invidentes, quod Dnus. Marchio Hospitalius tam candide de methodis nostris judicavit. Repeto autem, quod initio dixi, recte facturum Te, si eam tantum partem solutionis Tuae edas, quae Analysin adhuc nonnihil involvit methodo, quam vocas indirectam. Mihi enim (nescio an et Tibi) consultum videtur nondum iu interiora admittere homines ingratos, et beneficium postea strenue dissimulaturos.

Gratias Tibi debeo, quod in Programmate Tuo honorificam mei mentionem facis. Problema*) quod subjecisti pure Analyticum nuper, otium nactus in itinere ad nundinas Brunsvicenses, consideravi in curru solus, et viam solvendi reperi, nescio an Tuae vel Fermatianae affinem, certe expeditam et commodam, et ni fallor generalem.

Videtur autem Tua solvendi ratio non omnes curvas complecti, quae quaesito satisfaciunt. Exempli gratia, cum curva quaeritur cujus rectangulum sub segmentis aequatur constanti, retentis Tuis valoribus pro x et y, in Actis Junii proximi assignatis, satisfaciet curva, in qua sit $y = bxx : , xx + bc$, posito bc esse valorem rectangulorum constantem. Haec autem curva in Tuarum numero non continetur, talesque alias possem assignare infinitas. Sed et Problema, quod in Actis Junii proponis et in Programmate per

*) Joh. Bernoulli hatte gezeigt, dass das Theorem: Wenn von einem Punkte innerhalb eines Kreises eine gerade Linie gezogen und nach beiden Seiten hin bis zur Peripherie verlängert wird, so ist das Rechteck aus beiden Theilen der Linie stets constant; nicht allein eine Eigenschaft des Kreises sei, sondern noch vielen andern Curven zukomme. Er nahm hiervon Veranlassung, das in Rede stehende allgemeine Problem zur Lösung vorzulegen: Quaeritur curva ejus proprietatis, ut duo illa segmenta, ad quamcunque potentiam datam elevata et simul sumta, faciant ubique unam eandemque summam. Die Analyse Leibnizens von diesem Problem folgt in der Beilage zu diesem Briefe.

transcendentes a Te solvi ais, potest solvi per ordinariam quoque. Sed venio ad Problema, cujus solutionem generalem Analystis proponis. Sit potentiae segmenti exponens e, segmenta ipsa sint DB, et D(B), posito punctum constans esse D, et puncta, quibus recta per D curvae occurrit, esse B et (B), et desiderari ut $DB^e + D(B)^e$ sit aequal. constanti b; dico, retentis valoribus tuis ipsarum x et y, quaesito satisfactum iri, si fiat $y = x^{2e+1} - bx^{e+1}, : c$, quanquam adhuc aliis modis infinitis itidem generalibus satisfieri, et ad formam Tuae, etiam Series satisfaciens concinnari possit, plus minusve pro arbitrio producenda. Ita vides me, in Tui gratiam, etiam hoc Problema tentasse; sed vix talia ultra promittere ausim. Atque adeo ut vetulus ille athleta Virgilianus: Hic cestus artemque repono. Vale etc.

Dabam Hanoverae 23 Febr. 1697.

Beilage.

Venio ad Methodum ipsam et problematis solutionem. Venit scilicet in mentem hoc problema posse solvi per radices aequationum. Nam si aequatio sit quadratica ad x, cujus ultimus terminus sit ab, utique rectangulum sub duabus radicibus aequationibus erit ab. Sit haec aequatio assumtitia: $xx + hx + ab = 0$ (1) quae duorum est graduum, quia agitur de duabus radicibus. Consideremus porro puncta B,(B) (fig. 92) esse in recta eadem, quae si sit data positione, datum quoque fore angulum ejus BDF ad rectam positione datam constantem DF; ducta ergo recta ordinatim applicata BF angulo constante DFB quocunque, patet dari rationem inter DB et FB. Sit DB, x, et BF, y, et fiet DB : BF seu $x : y = m : a$ (2) ubi patet m variari, prout alia atque alia assumitur recta. Ponamus jam h utcunque dari per m et a aequatione (3) ejusque ope tolli h ex aeq. (1), ita ex aeq. (1) ope aeq. (3) fiet aequatio (4) in qua exstabit m, non vero h. Jam ope aequationum (2) et (4) tollatur litera m, et habebitur aeq. (5) ad curvam quaesitam, quae ob sublatam m ad nullum certum angulum BDF erit astricta atque adeo succedet, quaecunque sit recta DB transiens per punctum fixum D. Ex. gr. sit $-h = aa : m$ (3) et ex aeq. (1) fiet $xx - \frac{aa}{m}x + ab = 0$ (4) unde per (2) tollendo m fiet $xx - ay + ab = 0$ (5) quae aequatio coincidit ei quam Dn. Joh. Bernoullius hoc casu assignat in Actis pro circulo.

Aliter: Sit $h = -m$ (3) et ex aeq. (1) fiet $xx - mx + ab = 0$ (4) ubi pro m substituendo $ax : y$ ex aeq. (2) fiet $xx - axx : y + ab = 0$ (5) seu fiet $yxx - axx + aby = 0$ seu $y = axx : , xx + ab$ seu $y^{-1} = a^{-1} + b . x^{-2}$, quae solutio non est inter Bernoullianas. Si angulus ad F sit rectus et DF sit z, fiet $xx = zz + yy$ et fiet $y = azz + ayy , : , zz + yy + ab$, quae utique aequatio non est ad circulum.

Venio jam ad problema a Dn. Joh. Bernoullio novissime propositum, ubi quaeritur ut sit $DB^e + D(B)^e =$ dato. Hic rursus satisfieri potest per radices aequationum. Sit aeq. (1) $x^4 - abxx + a^3h = 0$, erit ab summa quadratorum, et similiter $x^6 - a^2bx^3 + a^5h = 0$, erit a^2b summa cuborum. Et generaliter $x^{2e} - a^{e-1}b . x^e + a^{2e-1}h = 0$ (1) et $x : y = m : a$ seu $m = ax : y$ (2) et (3) h detur utcunque per m. Sit $h = m$ et ex aeq. (1) fiet $x^{2e} - a^{e-1}b . x^e + a^{2e-1}m = 0$ (4) ubi pro m substituendo valorem ex aeq. (2) sumtum fiet $x^{2e} - a^{e-1}b . x^e + a^{2e}x : y = 0$ (5) seu $\frac{1}{y} = a^{e-1}b . x^{e-1} - x^{2e-1} , : a^{2e}$. Sin sit (3) $h = ac : m$ (posito manere c, utcunque varietur m) fiet (4) $x^{2e} - a^{e-1}b . x^e + a^{2e}c : m = 0$ et in hac aeq. pro m substituendo valorem $ax : y$ ex aeq. (2) fiet $x^{2e} - a^{e-1}b . x^e + a^{2e-1}cy : x = 0$ seu fiet (5) $y = x^{2e+1} - a^{e-1}b . x^{e+1} , : c . a^{2e-1}$.

Haec methodus etiam prodesse posset pro inveniendis seriebus numericis, in quibus termini inter se certam habeant legem.

XLVI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Groningae d. 23 Febr. 1697.

Nuperrimas meas ultimo Cursore ad Te dimissas una cum inclusis ad Dn. Menkenium, haud dubie jam acceperis, quando hasce accipies. Operae pretium duxi, ut praesentes Dn. Hospitalii*) heri acceptas sine mora Tibi communicarem, ex quibus videbis ejus solutionem, fortunae an industriae tribuendam nescio.

*) Siehe die Beilage.

Ejus enim formula generalis $dx = \frac{\mp andy}{\sqrt{y^{2n} - aann}}$ meae solutioni apprime conspirat. Interim in hac methodo Hospitaliana subesse videtur paralogismus, quando infertur: C'est-à-dire que la somme des $y^n ds$ doit étre la plus petite; cum enim distantia centri gravitatis debeat esse brevissima, erit $\frac{\int y^n ds}{\int y^{n-1} ds}$, non vero $\int y^n ds$, ponendum = minimo. Hanc difficultatem Dno. Hospitalio hodie rescribo, una cum aliquali via qua ei occurri possit, dicendo dum curva AM (fig. 87) infinitis modis quidem variabilis est, ejusdem tamen manere possit longitudinis, seu ejus aggravationes ejusdem ponderis, adeoque $\int y^{n-1} ds$ summi possit pro constanti. Sed nec hoc mihi omnino satisfacit, non enim de unico curvae puncto M tantum determinando agitur. Tuam itaque libenter audiam sententiam. Si haec methodus sit bona, habemus jam tres perveniendi ad quaesitum, unam directam quae Tibi adeo placuit, alteram ex optica, tertiam ex statica petitam reducendo scilicet curvam descensus ad speciem funiculariae; talem ergo resolvendi si non aperuissem olim Parisiis modum Marchioni, nec nunc suam reperisset solutionem; et forsan plane non reperisset, si non in omnibus meis ad eum literis digitum sat prope intendissem, ut tandem vel sola conjectura veram curvam descensus divinare potuisset; miror adeoque quod non citius repererit. Alterum meum problema in programmate impresso propositum, ut video, etiam solvit, postquam ipsi generalem talia solvendi methodum tradidissem pronuper: sed unde hauserit, mentionem non faciet.

Plura impraesentiarum non addo, nisi quod recens mihi nata filiola etiam recentia studiis meis afferat impedimenta. Vale et favere perge etc.

P. S. Remitte, quaeso, literas Hospitalianas. Jam credo, me posse problema curvae catenariae directe solvere, nempe ex consideratione brevissimae distantiae centri gravitatis ab horizonte, quod memini Tibi fuisse olim ex valde quaesitis, dum illud per series efficere instituebas.

Beilage.

De l'Hospital an Joh. Bernoulli.*)

Je ne vous ecris que deux mots, Monsieur, pour vous marquer que j'ay receu vôtre derniere lettre dans laquelle vous m'envoyez la resolution de l'equation differentielle proposée dans les Actes de Leipsic par Mr. vôtre Frere, qui est tres simple comme tout ce que vous faites. Je crois enfin avoir resolu vôtre probleme de la ligne de la plus courte descente. Je trouve que c'est une cycloïde ordinaire qui a pour origine celui des deux points donnés qui est le plus elevé au dessus de l'horison, et dont le diametre du cercle generateur doit être tel qu'elle passe par l'autre point donné. Mais afin que vous ne croyez pas que je me sois servi de l'art de conjecturer, comme Mr. vôtre frere, voici la maniere dont je m'y sois pris, qui me paroist fort generale.

Probleme.

Trouver la nature de la courbe AM (fig. 87) telle que la somme des $y^n ds$ soit la plus petite qu'il est possible ($AP = x$, $PM = y$, la courbe $AM = s$, et n marque une puissance quelconque de y).

Pour resoudre ce probleme, je considere la courbe AM placée en sorte que la ligne AP soit horisontale et que dans chacun de ses points M il y ait un poids exprimé par $y^{n-1}ds$: cela étant il est visible que cette courbe ainsi chargée doit prendre une situation telle, que son centre de gravité approche le plus pres qu'il est possible de l'horisontale AP, c'est à dire que la somme des $y^n ds$ doit être la plus petit. Je mene à present la tangente MT, et considerant tous les poids repandus dans la courbe AM comme etant reunis dans le point T, il est evident que $MP:PT$ ou $dy:dx::\int y^{n-1}ds : a$ et partant $\int y^{n-1}ds = \frac{a\,dy}{dx}$ et prenant les diff. $y^{n-1}ds = \frac{a\,ddy}{dx}$ (dx est constante) donc $\frac{a\,dy\;ddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = dx \,.\, y^{n-1}dy$, dont l'integrale est $a\sqrt{dx^2+dy^2}$

*) Nach einer von Leibniz revidirten Abschrift.

$= \frac{y^n dx}{n}$, d'ou l'on tire l'equation differentielle $dx = \frac{\mp a n d y}{\sqrt{y^{2n} - a a n n}}$ qui exprime la nature de la courbe cherchée. Soit à present $n = -\frac{1}{2}$ qui est le cas proposé, et l'on aura $dx = \frac{a y d y}{\sqrt{4y - a a y y}}$ ce qui fait voir que la courbe se doit construire ainsi. Soit un cercle AO (fig. 88) dont le diametre soit sur la ligne AK; ayant mené l'ordonnée KO et pris OM egal à l'arc AO, je dis que le point M sera dans la courbe cherchée AM de la plus viste descente. Il est visible que cette courbe est décrite par la revolution du cercle AO autour de AP et qu'ainsi c'est une cycloide ordinaire.

Mandez moi, je vous prie, aussitost que vous aurez receu cette lettre, si j'ai bien rencontré. J'ai aussi trouvé la resolution suivante de vôtre autre probleme. Ayant decrit du centre A (fig. 89) et d'un rayon quelconque $AG = x$ la circonference GF, on prendra $AH = b x^m \sqrt[p]{(1 - x^p)^{n-1}}$ et ayant mené HF qui fasse sur AG un angle quelconque donné HAF, je dis que le point F ou elle rencontre la circonference GF sera à une courbe CEFD telle que $FA^p + AE^p$ fait toujours la mesme somme.

J'attens avec impatience vostre reponse, et suis, Monsieur, du meilleur de mon coeur tout à vous etc.

ce 15 (?) Fevrier 1697.

Quand je venai à Mr. Varignon, je ne manquerai pas de lui faire des reproches de vostre part.

XLVII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Per novissimum Cursorem ad Te dedi literas, quas redditas non dubito. Nunc vel ideo scribo, ut Hospitalianas a Te acceptas statim remittam. Suspicabar Dnum. Marchionem Hospitalium (cui de successu gratulabor) Problematis Tui solutionem tandem esse reperturum, ubi animum intenderet, ut ex novissimis meis videbis; interim non dubito Tuis litteris multum fuisse adjutum, unde

id ipsum fortasse hausit, quaerendum esse $\int y^n ds$ minimum. Dubitatio quidem Tua de legitimitate ratiocinationis qua utitur, ratione non caret. Revera enim posito ds elemento curvae, et ejus distantia ab horizonte posita y, et pondere quo gravatur unumquodque punctum posito $y^{n-1} ds$, momentum curvae ex axe erit summa factorum ex pondere ducto in distantiam, seu $\int y^n ds$; sed hinc non statim sequitur, centrum gravitatis curvae sic oneratae per y^{n-1} maxime descendere, cum distantia Centri gravitatis sit momentum semper divisum per pondus totum $\int (y^{n-1} ds)$.

Verum enim vero, quia pondus absolute sumtum potest intelligi datum, Problemate ita concepto, ut quaeratur curva, quae datum pondus data lege distributum per ipsam quamproxime horizonti admoveat, ideo res succedit feliciter, et dum momentum fit minimum, etiam centrum gravitatis maxime descendit. Et vicissim si curva detur, cujus sic oneratae centrum gravitatis maxime descenderit, etiam momentum maxime descendet, adeoque erit $\int y^n ds$ minimum, unde caetera consequantur.

In Catenaria fit $n = 1$, unde fit $\int y ds$ minima, data $\int y^{n-1} ds$, seu data $\int ds$, seu data s, curvae magnitudine.

Catenariam seu funiculariam, sine tangentium consideratione, ex sola consideratione maximi descensus dari posse, non est dubium; sed cum talia per Seriem quaererem, de maximis istis nondum satis eram meditatus.

Olim cum Catenariam nostram tractarem, notaveram in schedis ejus exemplo multa alia hujusmodi Problemata maximorum vel minimorum a curvis praestandorum posse solvi, et ad tangentium viam reduci; sed postea, cum Problema Tuum aggrederer, jam sciebam id non esse opus, et via haec nonnihil est indirecta. Sed abrumpo coactus, ut hoc cursore Tibi Tua remittam. Vale et fave etc.

Hanoverae 26. Febr. 1697.

XLVIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Venit etiam in mentem rursus quod de Domini Fratris tui Arte conjecturandi scripseras; ea erit haud dubie non contemnenda. Ego quoque talia jam olim sum meditatus, praesertim in usum Jurisprudentiae et Politicae. Voco Doctrinam de gradibus probabilitatis. An Dnus. Frater tuus aget etiam de arte, quam vocant, deciphrandi, quae utique a Mathematico tractari meretur: ea quae hactenus in eam rem extant, parvi sunt momenti. Vellem etiam oriretur aliquis, qui mathematice tractaret omne genus ludorum.

In Problematis tui Analytici solutione fortasse rectius signa mutassem et dixissem $y = -x^{2e+1} + bx^{e+1}, : c$. Revera tamen nihil refert, quae signa sumas, cum in arbitrio sit facere c quantitatem negativam. Dominus Lic. Menckenius haeret nonnihil, vereturque ne Tua in Nieuwentiitium sint asperiora. Ego, quanquam non viderim, quae in eum scripsisti, respondi tamen mihi videri non plane illi impune esse debere, quod tot tantaque absurda in brevem libellum congessit, ne exemplo ejus incitatus ignarissimus quisque de rebus non intellectis scribere cavillarique audeat.

Etiam Dnus. Frater ad me scripsit, Problema tuum sibi esse solutum, et mox alia difficiliora a se propositum iri; quod bene vertat. Misit solutionem ad Dnum. Menckenium, qui dubitat an lapsus termini sit expectandus, ut edatur ea solutio. Respondi haud dubie eousque differendam editionem, ne alii se praeventos querantur. Vale etc.

Dabam Hanoverae 5. Martii 1697.

XLIX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Binas Tuas novissimas successivis Cursoribus recte accepi. Quae notas de Nieuwentiitii Considerationibus, et ego notaveram; tot tantasque ineptias ibi contineri (ut dixeram) Tibi imaginari non

poteras, antequam illas vidisses; jam vero spectatum admissus, nec ipse risum tenes. Ridiculam illam distinctionem inter $2 \times m$ et $m \times 2$, quorum illud possibile, hoc impossibile dicit, etiam in excerptis, quae Tibi sub involucro ad Dn. Menkenium transmiseram, tanquam mirabile quid et in mathesi inauditum notavi, sed tamen laudando Virum ubique; affectabam enim nudam et historicam relationem harum Considerationum qualem Dn. Menkenius velut a suis excerptoribus factam desideraverat; nescio quo fato accidit, ut haec excerpta nondum acceperit, uti ex ejus novissimis intelligo. Si nondum miseris, rogo ut quantocyus mittas, quo suspicionem suam videat esse vanam, dum ex silentio meo credidit me admonitione sua (ut scilicet cum Nieuwentiitio mitius agerem) offensum fuisse. Interim mirari satis nequeo, quod Dn. Menkenius scribit, secundas istas Considerationes ad manus suas tandem pervenisse, sed nihil plane ibi deprehendisse censura adeo severa dignum, Auctorem omni modestia et humanitate, imo non nisi honorifice Tui nostrique mentionem facere, et per consequens sibi consultius videri, ut huic adversario publico scripto respondeam; ut verbo dicam, Dn. Menkenius meam responsionem (sane non est responsio, simpliciter enim inventa mea expono, ubi ad objectiones Nieuwentiitianas non nisi incidenter respondeo) Actis inserere declinat, idque, ut dicit, Tui praecipue causa; se enim non dubitare, quin meus procedendi modus Tibi sit summe displiciturus; vellem ut Dn. Menkenius meum schediasma (si imprimere nolit) Tibi videndum communicaret, quo ipse deliberares an ideo supprimendum esset, quod crassos Viri errores ridendo et quasi jocando aperuerim, abstinui enim ab omnibus invectivis et conviciis, nullasque admiscui acerbitates; quanquam in excessu non peccassem, nisi forte in defectu, etiamsi omnem acrimoniam in Nugatorem illum cumulassem. Quid nos juvat ab illo laudari pomposis et inanibus verbis, qui tamen re ipsa satis ostendit nihil minus quam nos nostraque in pretio habere; attende quaeso animum, annon passim Te Tuosque sequaces ut crassos Philosophos traducat qui finitum ab infinito et infinite parvo distinguere nesciant, qui ab imaginatione sua et a contemplatione figurarum non nisi finita repraesentare volentibus abstrahere non didicerint; attende, inquam, annon aperte satis dicat, differentiationes superiores a crassa nostra imaginatione originem suam traxisse. Nae quid hujus Viri blanditiae aliud sunt, quam Sirenum cantus, qui-

bus indoctos allicere, illis imponere, nostra inventa subdole explodere, extenuare et si posset delere conatum. Video quo tendat; si patimur illius nugas ampliari et altiores radices agere, si benigne semper respondemus, certe fovemus anguem in sinu. Mihi perinde est sive spernat sive aestimet problema meum sordidus ille Pararius (courretier) Mackrelius, qui lucro quotidie inhiando magis quam bonis literis excolendis idoneus est; credo utroque et affectu erga amicum Nieuwentiitium (hujus enim absurdus opinionibus et ipse praeventus) et invidia erga nos eo se abripi passum esse. Sed apposite eum comparas Vulpi in fabula pyra dicenti acerba cum attingere non posset, cujusejusdem fabulae etiam mentionem fecerat amicus meus, cum mihi egregium Mackrelii responsum perscriberet. Quidni addis etiam Wallisium (qui nil non solvisse jactat) iis quos problemati meo pares existimas? Huic et Neutono utrique bina exemplaria programmatis mei sub nudis involucris in Angliam transmisi; an autem acceperint nescio. Intelligo a Dno. Menckenio pervenisse nuper a fratre meo solutionem; vidistine illam? Dic quaeso promte, quid tandem prodierit tanto tempore dignum; credit enim Dn. Menkenius Te me ejus jam certiorem fecisse, sed postremae Tuae de hoc silent.

Sic ergo duas habemus novas solutiones, ab Hospitalio alteram, alteram a fratre, quas tamen non haberemus, nisi prior assignatus terminus prolongatus fuisset, id quod mirifice momordisset fratrem qui diu adeo problemati frustra insudavit, ut si non solvendo, saltem conjecturando curvam quaesitam circulum esse statueret. Puto jam tempus esse ut nostras solutiones Lipsiam mittas, quo omnes simul edantur; approbo quicquid Tibi visum fuerit de edenda vel non edenda methodo mea directa. Schediasma meum in Tuis est manibus; dele quod voles, gratum erit quocunque modo agas: posset interim mentio fieri (salvo Tuo meliori judicio) nobis esse methodum talia directe solvendi, quam communicaturos nos esse privatim petentibus; non enim aequum est ut justus cum injusto patiatur, et gratus cum ingrato excludatur.

Ecce jam quo pacto Catenariam vulgarem sine tangentium consideratione per methodum hanc directam determino. Esto curva quaesita AB (fig. 90) cujus elementum Bb, radii circuli osculatoris LBE, Lbe, secantes horizontalem ER angulo quocunque. Nunc, ut in curva celerrimi descensus feci, ita et hic centro L descriptos considero arculos concentricos Cc, Bb, Gc etc. ex quibus

eum quaero, qui ductus in suam distantiam ab horizonte faciat minimum (ob humillimum descensum centri gravitatis) ut habeam relationem inter LB et BC; unde deinde curvae determinatio. Si ergo LE constans ponatur a, et LB, x, erit BE, $a - x$; sunt autem Cc, Bb, Cc etc. ut LC, LB, LC etc. id est ut x, et CG, BH, CG etc. ut EC, EB, EC etc. id est ut $a - x$, ergo $x \times a - x$ seu $ax - xx$ debet aequari minimo, unde invenitur $x = \frac{1}{2}a$. Ex quo colligo curvam funicularíam ABD esse talem, ut radius osculatoris productus ad horizontalem ubique bisecetur ab ipsa curva, atque hoc perfecte respondet curvae nostrae olim inventae, quae si examinetur, reperietur habere hanc proprietatem, et horizontalem, a qua puncta curvae distare censentur, esse illam quae transit per centrum funiculariae R. Ast vide quid insoliti hic contingat, quod nondum satis diluere possum: summa ipsorum Bb in HB debet utique esse minimum, quia centrum gravitatis quam maxime descendit; interim (existente $x = \frac{1}{2}a$) $ax - xx$ non minimum, sed maximum est, id est $Bb \times HB$ majus quam $Cc \times GC$; et per consequens videtur hac ratione reperiri curva, cujus centrum gravitatis horizonti non quam proximum, sed potius ab eodem remotissimum est; haec nondum conciliata mihi fateor. Interim eodem modo omnes alias funicularias sine tangentium interventu determinari posse facile vides.

Quod ad dubitationem meam reponis pro legitimitate solutionis Hospitalianae, idem est, quod ipse ego Dno. Marchioni in sui defensionem simul suggessi, quando illi dubitationem meam movebam, nempe pondus curvae oneratae absolute sumtum posse intelligi datum; sed hoc si placet nondum ad amussim satisfacit, nam licet unius curvae portionis pondus sit datum, reliquarum tamen non item; videtur itaque considerata curvae portio indeterminata, et ipsum pondus considerandum esse ut indeterminatum. Ut dicam quod res est, haec solutio adeo parum evidens est, ut nisi ex nostris solutionibus veritatem perspectam haberemus, merito dubitarem an curva quaesita esset Cyclois; etiam ex Te quaeso an acquiesceres hac solutione, si nulla alia suppeteret? Quod quaerendum sit $\int y^n ds$ minimum, jam tum aperiebam Dno. Hospitalio, cum me rogaret, ut sibi problema mechanicum in pure Geometricum reductum exhiberem, sed ei postea facem multo clariorem accendi. Credo illum gaudio nimis perfusum ob insperatam

solutionis inventionem, confestim fratri meo nomen curvae communicasse, unde forsan et ipse demum in solutionem penetravit.

Problema pure analyticum quod in programmate priori subjeci, nite solvisti, et quod miror, cum infinitae sint solutiones, Tua illa ipsa est quae mea. En analysin meam, ut si solutionem edis, me quoque solvisse verbo attingere possis. Esto (fig. 91) DB, x; DC, z; exponens e, constans b, et alia utcunque assumta c. Ex hyp. $x^e + z^e = b$; reduco hanc aequationem ad aliam, ubi x et z analogam positionem utrobique observent (id quod fundamentum est hujus scrutinii) multiplicando per $x^e - z^e$, unde habetur $x^{2e} - z^{2e} = bx^e - bz^e$ seu $x^{2e} - bx^e = z^{2e} - bz^e$, unde sequitur quod DB.DC(x.z) seu BF.CH :: $cx \times \overline{x^{2e} - bx^e}$. $cz \times \overline{z^{2e} - bz^e}$, ergo si BF fiat $= cx \times \overline{x^{2e} - bx^e}$, etiam CH habebit valorem analogum $cz \times \overline{z^{2e} - bz^e}$; et per consequens curva ABC respondebit quaesito. Quod vero observas, meam solvendi rationem non omnes curvas complecti, libenter agnosco; sed oportet ut etiam agnoscas impossibile esse, ut una eademque methodus omnes solutiones exhibere possit, quod jam diu etiam respondi Dno. Hospitalio sciscitanti an possim demonstrare omnes solutiones possibiles comprehensas esse in illa serie quam in Actis exhibui; quae series etiamsi infinities-infinitas solutiones comprehendat, habeo tamen infinitas ut ita dicam methodos, quae totidem series diversas suppeditant. En quandam quam Hospitalio in eam rem communicavi: retentis iisdem literis oportet ut $xz = 1$; eligatur quantitas composita ex x et 1, quomodocunque ex. gr. $1 + x$, vel $1 + xx$, vel $1 + x^3$, vel $1 + x + xx$, vel $1 + xx + x^3$, vel $x + x^4$ etc. Sumamus simplicissimum $1 + x$; posita BF $= ax^m \times \overline{1+x}^n$, determinandae erunt m et n aut una per alteram, id quod sic facio: Natura curvae ABC cum sit ubique eadem, erit CH $= az^m \times \overline{1+z}^n$; sed ob simil. triang. DBF et DCH, $x \,.\, ax^m \times \overline{1+x}^n :: z \,.\, az^m \times \overline{1+z}^n$ vel $1 \,.\, x^{m-1} \times \overline{1+x}^n :: 1 \,.\, z^{m-1} \times \overline{1+z}^n$ et consequenter $x^{m-1} \times \overline{1+x}^n$ $= z^{m-1} \times \overline{1+z}^n =$ (ob $xz = 1$ seu $z = \frac{1}{x}$) $\frac{1}{x^{m-1}} \times \overline{1 + \frac{1}{x}}^n$

$$= x^{-m+1} \times \frac{\overline{x+1}^n}{x^n} = x^{-m+1-n} \times \overline{1+x}^n,$$ hinc dividendo primum et ultimum per $\overline{1+x}^n$, erit $x^{m-1} = x^{-m+1-n}$, id est $m - 1 = -m + 1 - n$ seu $n = -2m + 2$. Dico igitur si fiat

$BF = ax^m \times \overline{1+x}^{-2m+2}$, habebitur curva quaesita ABC, quae cum m sit arbitraria, infinitis modis variari potest, et ut puto, etiam Tua $y = bxx : , xx + bc$ ibi comprehenditur, ponendo $m = 2$. En igitur aliam seriem y seu $BF = ax^m \times \overline{1+x}^{-2m+2} + bx^p \times \overline{1+x}^{-2p+2} + cx^q \times \overline{1+x}^{-2q+2}$. etc. cujus termini tam conjuncti quam separati satisfaciunt. Eligendo $\overline{1+x+xx}$ et ponendo $BF = ax^m \times \overline{1+x+xx}^n$, eodem ratiocinio reperietur $n = 1 - m$ et per consequens erit y seu $BF = ax^m \times \overline{1+x+xx}^{-m+1}$, unde iterum series alia $y = ax^m \times \overline{1+x+xx}^{-m+1} + bx^p \times \overline{1+x+xx}^{-p+1} + cx^q \times \overline{1+x+xx}^{-q+1}$ etc. Hinc ad lubitum series innumerae construi possunt, quarum quaelibet infinities infinitas continet solutiones, et tamen nondum exhaustae sunt vel ad infinitesimam partem; vides ergo quam impossibile esset, generalem tentare methodum omnes possibiles complectentem. Problema quod in Actis solvendum relinquo et quod in programmate per transcendentes a me solvi dico, per ordinariam solvi posse nondum video; Tuum itaque modum per ordinariam solvendi libenter viderem. Vale etc.

Groningae 13 Martii 1697.

Adjunctas Dno. Menckenio citissime curandas rogo obnixe.

L.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gratum est, quod mea solutio secundi Problematis Tui a Tua non abludit. Video tamen methodos nostras differre, et cum Tuam mibi aliquo modo significaveris, meam vicissim mittam, quam spero, ob generalitatem et extensionem, Tibi non displicituram. Cum olim notassem locum ex Epistolis Cartesianis de Fermatio, has paucas voculas in excerptis meis annotaveram: Hoc fieri potest per radices aequationum. Haec verba diu multumque frustra consideravi, donec nuper, in curru dum solus Brunsvicum vehor, sensum eorum reperi, qui hic est. Perinde esse, ac si quaeratur curva, quae rectam propositam ita secet in duobus punctis, ut, sublata una ex duabus incognitis, curvae et rectae aequationem

localem ingredientibus, prodeat aequatio ad unam incognitam, cujus secundus terminus, exempli gratia, sit datus; posito enim segmenta vel ipsorum potentias esse radices aequationis, utique summa eorum aequabitur termino ejus secundo. Sit ergo punctum fixum D (fig. 92) unde educta recta secet curvam quaesitam in punctis B et (B) et debet $DB^e + D(B)^e$ esse aequale ipsi $a^{e-1}b$, constanti. BD sit x, fiet aequatio (1) $x^{2e} - a^{e-1}bx^e + a^{2e-1}h = o$. Hujus aequationis [$1^{mae}$] duarum radicum x^e, $(x)^e$ summa faciet $a^{e-1}b$. Praeterea quoniam puncta B et (B) cadunt in rectam, ideo ex B ordinatim applicatam BF vel (B)(F) ducendo ad directricem quamdam seu axem DF(F), et BF vocando y, utique ex natura rectae DB(B) erit (2) $x : y = m : a$, posito per rationem ipsius m ad constantissimam a exprimi angulum rectae hujus ad rectam primariam seu directricem.

Habemus ergo duas aequationes ex visceribus Problematis suppeditatas, unam unius incognitae, alteram ad rectam. Hinc jam possumus invenire aequationes ad curvam satisfacientem, via generali omnes modos possibiles complexa. Nempe assumatur relatio qualiscunque algebraica vel transcendens, apta inter m et h, intervenientibus ut lubet constantibus a, b, c etc., et haec relatio dabit aequationem tertiam, cujus ope tollatur m, si placet ex aequatione 2, et habebitur aequatio quarta, in qua extabunt x, y et h. Hanc denique conjungendo cum aequatione prima, quae etiam continet h, tollatur h, et habebitur aequatio quinta quaesita, solas continens indeterminatas x et y, quae proinde est ad curvam quaesitam. Si jam aequatio tertia assumatur satis simplex, verbi gratia $h = ac : m$, tunc pro aequatione quarta fiet $cy : x = h$, quem valorem ipsius h substituendo in aequatione prima, fiet aequatio quinta quaesita, nempe ad curvam, scilicet $y = -x^{2e+1} + a^{e-1}bx^{e+1}, : ca^{2e}$.

Ita vides, hac methodo omnes solutiones possibiles contineri semel in universum. Tua autem mihi multo majore artificio et ingenio opus habere videtur, ut analogae positiones bene formentur. Et meretur bene distincteque exponi, cum possit habere multos alios usus. Caeterum meam vides itidem latissime patere, etiamsi scilicet non duo, sed plura curvae puncta in unum conjuncta aliquid praestare debeant, ubi Tuo artificio uti difficilius foret. Idemque est si proprietas talis sit, ut curva quaesita non a recta, ut hactenus, sed ab alia curva sit secanda. Ubi vides no-

vum plane campum aperiri Analyseos localis generalissimae, pro quantocunque numero punctorum curvae et pro summis, rectangulis, potentiis etc. Nondum autem necesse puto, ut hanc methodum publicemus; itaque hactenus eam Tibi soli significare constitui. Rogo ut Tuos calculos pro curvis istis mihi distincte communices.

Dno. Menckenio scripsi denuo, ne supprimat justissimas censuras, praesertim cum mihi significaveris non esse acerbas, sed sale conditas. Dudum ei Tuas priores misi, nunc et alteras statim ad eum destinavi. Solutiones pro Actis mittam. Fateor Te, non sine magna ratione, in Dni. Marchionis solutione haesisse, atque etiam vidisse per Te remedium, quod cogitavi. Difficultas, quae superest, non est spernenda, quod scilicet curvae portio sit indeterminata, adeoque et pondus. Cogitandum interim relinquo, annon, hoc non obstante, pondus illud quodcunque, pro illa portione curvae, quaecunque ea sit, ut determinatum assumi possit. Et hoc memini me et olim observasse. Quidquid sit, haesissemus fateor non parum et spatium deliberandi pro meditatione attentiore petiissemus, nisi constitisset de successu, qui fecit ut accuratius inspicientes contenti esse possimus.

In Tua ratione perveniendi ad Funicularium, per viam descensus maximi, miror consensum eventus, cum in methodo ipsa sit difficultas: neque enim satis video, quomodo cum natura lineae cohaereat, ut ex arculis sumatur ille, cujus momentum ex horizontali sit minimum.

Video Te magnam lucem Dno. Marchioni Hospitalio accendisse, cum suppeditasti ipsi quaeri, ut $\int y^n ds$ sit minimum. Quod si adhuc clariorem, ut ait, facem ipsi accendisti, minus miror quod successit. Misit mihi suas solutiones utriusque Tui Problematis*), sed sine analysi, Actis inserendas, quas cum Tua mittam Dno. Menckenio, sed ita tamen ut tuae mentionem faciam in ipsa mea, per modum Epistolae, ubi pro merito et ipsam, et directam methodum commendabo, quam tamen nunc supprimam, quia probas. Interim, si quid adhuc vis Tuis verbis addi, significabis.

---

*) Der Vollständigkeit wegen mag noch die Auflösung des Problems der Brachystochrone, so wie sie vom Marquis de l'Hospital an Leibniz übersandt wurde, in der Beilage folgen.

Puto me Tibi de Domini Fratris Tui solutione in meis nuperis scripsisse et notasse, quod in suis ad me literis Cycloidem directe nominarit. Tunc cum prorogabamus terminum, consilium meum erat, suadere Tibi, ut primo termino elapso, Domino Marchioni et Domino Fratri solutionem mitteres, ita ut prorogatio pertineret ad extraneos nostrarum Methodorum; sed nescio quomodo oblitus sum. Semper suspicabar commercio Tuo futurum esse, ut Domino Marchioni res suboleret; sed cum tibi fundamenta debeat, eo minus id displicere debet.

Vellem nosse quae Domini Fratris Tui methodus fuerit: ait se hac occasione nova Problemata propositurum.

His scriptis, accipio literas Domini Menckenii, quibus video, non expectatis nostris, festinasse studiose recensionem Libri Nieuwentiitiani, quod mihi non parum displicet; ita enim videtur homo dixisse aliquid, cum dixerit nihil. Tua etiam contra ipsum sunt adjecta; sed cum priora non viderim, nescio quid sit resectum.

Peue oblitus eram adjicere curvam algebraicam Problemati priori Tuo satisfacientem, quam desiderabas, et nunc videbis, esse circulum; in eo enim utique factum ex quadrato unius segmenti in alterum segmentum erit semper idem, si punctum, ex quo recta educitur quae segmenta contineat, sit ipsum centrum, cum segmenta sint semper aequalia, nempe radii. Quomodo eam curvam tute investigaveris, videre gratum erit. Fortasse Juvenis ille Batavus, qui solutionem speravit, erit Nieuwentiitio docilior. Ubi nunc Dn. Frater tuus natu minimus agit, postquam ex Gallia rediit? Vale etc.

Dabam Hanoverae 19 Martii 1697.

Beilage.

Domini Marchionis Hospitalii solutio problematis de linea celerrimi descensus.

Problema hoc (de quo Galilaeus prop. 36. motus accelerati) cum difficile admodum mihi prima fronte visum est, tum valetudine utor adeo incerta, ut ab illo abstinere primum decreverim. Atque huic quidem sententiae eo firmius inhaerebam, quod intra sex menses ad illius discussionem concessos id a nemine solutum videretur, si tamen unum excipias geometram insignem Leibnitium, qui illud solvit non modo, sed et utpote omnium labore ac vigiliis

dignissimum, denuo proposuit geometris, alterumque sex mensium spatium, quo in id a pluribus incumbi posset, ab authore impetravit. Desidem hac in parte ac operis asperitate deterritum erexit me doctissimi authoris Bernoulli programma Cal. Jan. anni hujus 1697 editum, quo totius orbis geometras ad hujus problematis solutionem iterum invitat. Tanta igitur quaestionis hujus commendatio et fama me tandem victum compulere, ut illius solvendae studio in societatem laudis ac gloriae cum tantis geometris venirem. Nec spem fefellit eventus, imo superavit, cum id solverim problema methodo adeo generali, ut non Galilaei modo hypothesin, sed et aliam quamvis de descensu gravium possibilem complectatur. Quod autem in solutione problematis de curva funiculari praestiterunt olim Hugenius, Leibnitius et Bernoullius, id ego nunc a me nuda problematis hujus solutione praestandum censeo, meam scilicet alias palam facturus methodum, cujus tamen jam (exeunte Febr.) clarissimo problematis authori Bernoullio privatim copiam feci.

Problema.

Datis in plano verticali duobus punctis A et B, assignare mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens et moveri incipiens a puncto A brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.

Solutio.

Ducta per punctum superius datum A linea horizontali AC, describatur cyclois ordinaria quae incipiat a puncto A et cujus diameter AD circuli generatoris AEDF, qui volvitur super AC, talis sit, ut punctum describens A transeat per alterum punctum inferius datum B. Dico portionem AB cycloidis sic descriptae proposito satisfacere.

Si supponatur, quod celeritates acquisitae sint in ratione altitudinum emensarum, dico curvam quaesitam AB fore portionem circuli centrum habentis in horizontali AC et transeuntis per data puncta A et B. Unde liquet conjecturam Galilaei veram evadere in hac hypothesi, ab illius multum diversa.

Tandem si vocentur abscissa AC, x, applicata CB, y, et generaliter supponatur quod celeritas acquisita ex descensu per altitudinem CB exprimatur per y^m: dico naturam curvae quaesitae exprimi per aequationem differentialem $dx = \frac{m y^m dy}{\sqrt{1 - m m y^{2m}}}$.

LI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Novissimas meas ante octiduum ad Te datas acceperis procul dubio. Non expectata responsione, Tibi statim mittendam duxi solutionem Angli anonymi, quam nuperrime a Dno. Basnagio Bellavallio accepi. Pro excerptis ipsas misissem Transactiones, si ob nimiam molem non adeo incommodum id fuisset. Adjungo ecce Bellavallii literas, ut et schedulam alteram simul acceptam, quam incognitus mihi Auctor substituit priori Tibi jam communicatae ante octiduum; fatetur quidem Juvenem illum Hagiensem errasse, ita tamen ut dubitet an Anglus quaesito satisfecerit, ob rationem quam ibi vides, quod scilicet ascendere non sit descendere, sed pura puto est cavillatio. Sensus enim problematis est, ut quaeratur via ab uno puncto ad alterum, quam mobile citissime percurrat, sive demum illud fiat per descensum continuum, sive partim per descensum partim per ascensum; praeterquam quod a superiori ad inferius non ascenditur, sed descenditur, per quamcunque viam illud fiat. Non secus ac viator dicitur descendere ex monte, licet inter descendendum forte offendat asperitates et colliculos, quos non nisi ascendendo superare potest. Dn. Bellavallius mentionem facit quarundam Tuarum objectionum contra Principia Cartesii, quas mihi communicandas offert; respondeo ipsi hodie, eas mihi gratas fore, spero enim me quid singulare ibi reperturum praeter illud, quod observasti circa quantitatem motus. Auctorem Solutionis in Transactionibus publicatae puto esse Dn. Newtonum, quod conjicio exinde, quia scribit se accepisse duo exemplaria programmatis mei; verum et Newtono et Wallisio utrique misi duo exemplaria sub nudis involucris. Quod interim illum prae hoc suspicer, est quod Newtonum magis, quam Wallisium in recenti Infinitorum Geometria versatum videam. Caeterum enim cum veram solutionem jam publice extare videas, non puto multum cunctandum esse cum edendis nostris solutionibus. Illud quoque desiderarem, ut meo Schediasmati praefigeras diem, quo solutionem meam ad Te mittebam qui erat $\frac{21}{31}$ Julii 1696. Te celare non possum, quam varia sint judicia de isthoc problemate. Cl. Braunius, Collega meus, ostendit mihi literas a Professore quodam

Harderovicensi acceptas, quae ita ordiuntur: Redditae mihi gratissimae Tuae literae, una cum problemate Bernoulliano, quod quam primum in manus meas pervenit, cum Clariss. Collega Wynen communicavi, qui Te resalutat, et solutionem haud difficilem esse ait, modo determinetur hypothesis de terrae motu vel quiete, provocatque ad Stephanum de Angelis et Ricciolum qui similia fuse tractaverint. Iste Wynenius in Academia Harderovicensi Mathesin docet, sed quid, quaeso, motus Terrae vel quies hic ad rem facit? an quid vidisti in Stephano de Angelis et Ricciolo, per quod problema solvi possit? Me referens ad praecedentes meas hic abrumpo. etc.

Groningae d. 20 Martii 1697.

Remitte si placet literas Bellavallii, et schedam illam alteram de Juvene Hagiensi.

P. S. Novissimo Cursore accepi literas a Dn. Marchione Hospitalio, in quibus respondet taliter qualiter objectioni meae contra ipsius solutionem factae. Sed nihil dicit, nisi quod jam ego ipse ei dixerim, pondus scilicet curvae posse considerari ut datum, quod vero mihi nondum plene satisfacit. Se Tibi mittere ait generalem suam solutionem cum aliquot exemplis, ut eam simul cum nostris edi cures.

Beilage.

Excerptum ex Transactionibus Londinensibus mensis Januarii 169$\frac{6}{7}$.

Probl. I.

Investiganda est curva linea ADB (fig. 93), in qua grave a dato quovis puncto A ad datum quodvis punctum B vi gravitatis suae citissime descendet.

Solutio.

A dato puncto A ducatur recta infinita APCZ horizonti parallela et super eadem recta describatur tum Cyclois quaecunque AQP rectae AB (ductae et si opus est productae) occurrens in puncto Q, tum Cyclois alia ABC cujus basis et altitudo sit ad prioris basem et altitudinem respective ut AB ad AQ. Et haec Cyclois novissima transibit per punctum B et erit curva illa linea, in qua grave a puncto A ad punctum B vi gravitatis suae citissime perveniet. Q. E. J.

Probl. II.

Problema alterum, si recte intellexi (nam quae in Actis Lips. ab Auctore citantur ad id spectantia nondum vidi) sic proponi potest: Quaeritur curva KJL (fig. 94) ex lege, ut si recta PKL a dato quodam puncto P, ceu Polo utcunque ducatur, et eidem curvae in punctis duobus K et L occurrat, potestates duorum ejus segmentorum PK et PL a dato illo puncto P ad occursus illos ductorum, si sint aeque alta (id est vel quadrata vel cubi vel quadrato-quadrata etc.) datam summam $PK^q + PL^q$ vel $PK^{cub.} + PL^{cub.}$ etc. (in omni rectae illius positione) conficiant.

Solutio.

Per datum quodvis punctum A ducatur recta quaevis infinita positione data ADB, rectae mobili PKL occurrens in D, et nominentur AD, x et PK vel PL, y, sintque Q et R quantitates ex quantitatibus quibuscunque datis et quantitate x quomodocunque constantes et relatio inter x et y definiatur per hanc aequationem $YY + QY + R = 0$. Et si R sit quantitas data, rectangulum sub segmentis PK et PL dabitur. Si Q sit quantitas data, summa segmentorum illorum (sub signis propriis conjunctorum) dabitur. Si $QQ - 2R$ datur, summa quadratorum ($PK^q + PL^q$) dabitur. Si $Q^3 - 3QR$ data sit quantitas, summa cuborum ($PK^{cub.} + PL^{cub.}$) dabitur. Si $Q^4 - 4QQR + 2RR$ data sit quantitas, summa quadrato-quadratorum ($PK^{qq} + PL^{qq}$) dabitur. Et sic deinceps in infinitum. Efficiatur itaque, ut R, Q, $QQ - 2R$, $Q^3 - 3QR$ etc. datae sint quantitates et problema solvetur. Q. E. F.

Ad eundem modum Curvae inveniri possunt quae tria vel plura abscindant segmenta, similes proprietates habentia. Sit aequatio $Y^3 + Qyy + Ry + S = 0$, ubi Q, R et S quantitates significant ex quantitatibus quibuscunque datis et quantitate x utcunque constantes, et Curva abscindet segmenta tria. Et si S data sit quantitas, contentum solidum illorum trium dabitur. Si $QQ - 2R$ sit data quantitas, summa quadratorum ex tribus illis dabitur.

LII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Misi nuper cum quibusdam aliis solutionem Angli anonymi, quam Te accepisse non dubito. Quod Tua solutio secundi mei problematis a mea non abludat, tanto jam magis miror, quod per diversissimam a mea methodum Te eo pervenisse videam, cum tamen ex infinitis solutionibus, quae satisfaciunt, perfacile in aliam incidere potuisses, si modo pro aeq. $3h = ac : m$ assumsisses quamcunque aliam. Lubens credam Te multum in hac methodo indaganda adjutum fuisse voculis illis, quas in Epistolis Cartesianis notaveras: h o c f i e r i p o t e s t p e r r a d i c e s a e q u a t i o n u m; vellem scire quo loco haec verba extent, ut videam an de eadem materia agant; quem enim ante aliquod tempus mihi indicaveras locum, talia verba continere non video. Interim ut ad methodum Tuam redeam, perspexeris ex scripto illius Angli (quem Newtonum firmiter credo) consimilem, nisi omnino eandem exhibuisse, hoc tantum discrimine, quod ille omnes Tuas quinque aequationes, quae instituendae sunt, antequam ad quaesitam pervenias, una sola comprehendat artificio non ineleganti, ducta scilicet recta positione data et rectas ex polo egredientes transversim secante, quam ut abscissam, illas vero ut applicatas considerat. Potuisset tamen et ipse hanc viam adhuc magis abbreviare, ita non opus fuisset pro singulis potestatibus segmentorum novam quantitatem datam assignare, quandoquidem una generalis aequatio omnes continere potest. Ego enim solutionem universalissime conceptam ita enuncio: Si super recta positione data tanquam axe AD (fig. 95) concipiantur descriptae curvae datae qualescunque et quotcunque AE, AF, AG etc. voceturque AD, x, applicatae vero DE, DF, DG etc. q, r, s etc. ita ut q, r, s etc. intelligantur utcunque datae per x et constantes; dico si a puncto dato P ducatur utcunque recta PKLMN secans axem in D, sitque PK vel PL, y = radici hujus aequationis $y^{2e} - q^e y^e + r^{2e} = 0$, erit, posita AF recta et parallela ipsi AD, punctum K vel L in curva KIL hanc habente proprietatem ut $\square$ LPK sit perpetuo dato aequale: Si vero AE ponatur recta et parallela ipsi AD, erit KIL curva talis, ut $PK^e + PL^e$ faciat ubique eandem summam. Quod si fiat PK, vel PL vel PM, y = radici hujus aequationis $y^{3e} - q^e y^{2e}$

$+ r^{2e} y^e - s^{3e} = 0$ sitque AG recta et parallela ipsi AD, erit curva KILRM talis, ut solidum sub PK, PL et PM sit semper aequale; si vero AE sit recta et parallela ipsi AD, erit summa $PK^e + PL^e + PM^e$ semper eadem; sin AF esset recta et parallela ipsi AD, foret summa rectangulorum potestatum $PK^e PL^e + PK^e PM^e + PL^e PM^e$ constans. Eadem ratione invenitur curva KILRMSN, cujus segmenta quatuor PK, PL, PM, PN imperata praestent, sicque in altioribus; atque haec omnia fluunt ex notissimo illo principio algebraico, quod secundus aequationis terminus continet summam radicum, tertius summam rectangulorum radicum, quartus summam solidorum radicum etc. Hinc potest etiam construi curva, quae simul praestet duo ex requisitis: ex. gr. si curva KILRM debeat esse talis, ut non solum solidum sub PK, PL et PM, sed etiam aggregatum potentiarum $PK^e + PL^e + PM^e$ faciat idem ubique; dico si curvae duae AE et AG ponantur rectae et parallelae ipsi AD, satisfaciet curva KILRM utrique simul conditioni.

Vides quam amplum mihi aperuerim campum ex paucis, quae Tu et Anglus ille suppeditastis, ita ut jam lubenter agnoscam, quod mea solvendi ratio per positiones analogas (quae tamen multis occasionibus non contemnenda) tam uberes fructus simul producere nequeat; nam praeterquam quod majori et difficiliori artificio opus habet, etiam ad curvas plurium quam duorum segmentorum,[1] ut probe notas, adaptari posse nondum perspicio. Interim mihi sufficit, harum rerum me primum fuisse contemplatorem, nam quod de Fermatio dicis, haec eadem jam considerasse, sane de eo nihil certi constat. Quantum ad prius problema quod initio in Actis proposui, ubi desideratur curva ut solidum sub uno segmento et quadrato alterius sit constans, mea methodo alioqualem reperio curvam, si non algebraicam, saltem transcendentem; quod vero Tu notas (joco forte) etiam algebraicam satisfacere, nempe circulum, hic nihil aliud dicis (pace Tua id dixerim) quam quod a nemine ignorari potest; haecque solutio similis est illi quam olim Wallisius dederat Fermatio quaerenti cubum, qui additus omnibus suis partibus aliquotis faciat cubum, obtrudens iteratis vicibus unitatem pro numeris quaesitis, sed quam contenti fuerint hac solutione Fermatius et Freniclius, non est ut hic dicam. Interim hac methodo per radices aequationum moderamine quodam adhibita feliciter solvo problema per curvam pure

algebraicam sic: Aequationis $yy - qy + rr = 0$ radices sunt $y = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - rr} = PL$ et $y = \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - rr} = PK$; nunc quia ex hyp. $PL^2 PK = a^3$ constanti, erit $\frac{1}{2}qrr + rr\sqrt{\frac{1}{4}qq - rr} = a^3$, unde $q = \frac{a^6 + r^6}{a^3 rr}$; sic curva AE jam non est arbitraria, sed oportet esse talem ut assumta curva AF quacunque, DE sit $= \frac{a^6 + DF^6}{a^3 DF^2}$, quo facto dico radicem aequationis $yy - qy + rr = 0$ producere curvam optatam iKIL. Non secus operandum est in aliis, ut si quaereretur curva talis ubi non quidem summa, sed differentia potentiarum $PL^e - PK^e$ sit constans. Tunc enim q seu DE facienda est $= \sqrt[2e]{a^{2e} + 4DF^{2e}}$, et radix aequationis $y^{2e} - q^e y^e + r^{2e} = 0$ determinabit curvam quaesitam. Nescio quales alios meos calculos pro curvis istis desideres; si eos cupias quos institui pro illis in Actis editis, lubenter communicabo et si quid aliud hactenus observavi super hac materia.

Et ego miror, quod Dn. Menkenius adeo festinarit recensionem libri Nieuwentiitii, scribit se etiam a Te accepisse relationem prolixam ejus libri una cum mea, sed post festum. Videtur Dn. Menkenius scrupulosus nimis in edendis, quae vel in minimis quempiam offendere putat. Unde forsan consulto nostra expectare noluit. Et mea quoque ambo schediasmata quae adjecit non parum mutilavit, quod quidem non aegre fero, dummodo aliquibus in locis argumentorum pondus non simul imminuisset. Optarem interim, ut eadem mutilandi libertate usus fuisset in iis, quae olim Frater meus inepte adeo contra me effutivit, et ad quae respondere mihi nunquam licebit, nisi Tu te interponas arbitrum, vel omnino meas, ut promisisti, sustineas partes. In fragmento Actorum quod mihi misisti, video etiam D. T. Quadraturam universalem*), puto occasione meorum nupero Decembri editorum**) demum excogitatam, quidquid Auctor dicat illam sibi jam a multis

---

*) Quadratura universalis figurarum curvilinearum per series infinitas, simplici transpositione rectarum linearum formatas, per D. T. Acta Erudit. 1697.

**) J. B. Tetragonismus universalis figurarum curvilinearum per constructionem geometricam continuo appropinquantem. Acta Erudit. 1696.

annis fuisse familiarem; ob defectum figurarum capere non satis potui, an et quousque meo tetragonismo congruat. Virum hunc magni facio, sed male me habet ejus vanitas dum nobis inventa nostra ita invidet, ut nihil fere in lucem prodeat, quod sibi non diu ante cognitum fuisse velit.

In praecedentibus Tuis dicis, problema meum fratri solutum esse, sed mox ea occasione ab ipso alia longe difficiliora propositum iri. Videbimus ergo Quid dignum tanto ferat hic promissor hiatu. Pudeat illum, quod per integrum semestre omnibus suis viribus eo penetrare non potuerit, quo tamen et Tu et Anglus ille et ego praesertim, quem usque adeo despicit, intra aliquot horas nullo conatu pervenimus. Interim si publicum exercendum esset difficilioribus, sed parum utilibus, quibus nec ipse par est, forsan et ego proponere possem, quod multum negotii facesseret. Ex. gr. si lamina sit datae longitudinis, quaeritur quamnam curvaturam induere debeat, ut mobile super illa a dato puncto ad datum punctum citissime descendat. Sed vereor ne mihi reponeretur: Quaerit delirus cui non respondet Homerus.

Miror quod hactenus nullam in Actis relationem viderim Libri Dn. Marchionis Hospitalii, cum tamen illum jam diu procul dubio acceperit Dn. Menkenius. Vale et fave etc.

Groningae d. 3 Aprilis 1697.

In ratione mea perveniendi ad funiculariam per viam descensus, utique non levis latet difficultas; sed optarem ut illam tolleres, legitima enim oportet sit methodus ipsa, et necessarius nexus cum natura lineae, cum non solum procedat in funicularia ordinaria, quod accidenti cuidam ascribi posset, sed in omni alia sive aequaliter sive inaequaliter gravatus statuatur funis. Frater meus natu minimus, de quo quaeris, redux in patriam ex Gallia, non diu post iterum evolavit vagabundus. Et ad hoc usque Pascha Moguntiae egit, iter meditans in Germaniam, nisi forte jam aggressus spe incerta an alicubi conditionem invenerit, cogitat Berolinum in Pharmacopoeam Electoralem; si Tua commendatione eo pervenire posset nisi alibi commodiorem suaseris stationem, ipsi et mihi foret gratissimum. Lipsia transibit et forte Hanovera, si itineris ratio feret.

Misi Dn. Hospitalio meos modos solvendi curvam celerrimi descensus, quia petiit.

LIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum Guelfebytum irem, ferias illic acturus, mecum sumpsi quae ad Problemata Tua spectant, ut illinc Lipsiam expedirem, quae Actis inserenda viderentur; quod et feci. Et transmisi solutiones, tuam pariter et Hospitalianam mihi commendatam curvae Brachystochronae. Alteram Tuam methodum directiorem permissu Tuo omisi. . . . . Problema autem Tuum, non minus quam solutionem et praeclarum in Opticis usum ex merito commendavi, simulque institutum Problemata modeste proponendi laudavi.

His omnibus jam Lipsiam missis, post ferias demum Paschales, Hanovera accepi Tuas novissimas, quae illic haeserant, quod initio literas venientes mihi transmitti vetuissem, spem statim a feries redeundi; sed consilio deinde mutato, jussi mitti quae advenissent, et inter caeteras inveni quae a Belvallio accepta communicas. Solutionem Anglicam a Newtono esse suspicor: quoniam vero Lipsiensia semel expeditata erant, non putavi causam esse cur in gratiam Anglicanae solutionis adderem aliquid aut mutarem; quando Angli, nec nobis consultis, nec termino expectato, ad publicationem prorupere, et studium Tuum merito elogio non mactant, nec a nobis aliquid de solutione sua fieri postulant. Fateor tamen me, si maturius eam accepissem, fuisse iis adjecturum quae Lipsiam misi; sed nunc, post festum, satis jam fatigatus, ab opera nec necessaria, nec desiderata, non invitus abstinui.

Epistola Belvallii sale aliquo mordaci mihi aspersa videtur, veluti cum ait omne genus humanum a Te provocatum, cum brevitatem temporis ab Anglo impensum praedicat, et praemia honoris a Te distribuenda dicit. Poteris fortasse ironiam reddere ironiae, et ad Academiae Gallicae usum provocare, quae praemia iis tantum distribuit, qui nomina sua profitentur, simulque docere, ipsum solutionis Anglicae autorem Tibi non omnino ignotum videri, et methodos nostras rite applicare scienti unius diei spatium abunde sufficere, nescienti nec annos satis esse; Tuam vero provocationem nec exemplis apud Geometras frequentatis, nec utilitate in publicum carere, et plurimum prodesse ad eos ex somno excitandos, qui Cartesiana analysi vulgaribusque Methodis indormiunt.

Neminem enim solutionem hujus Problematis dedisse, nisi quis novas nostras Methodos sibi reddidisset antea familiares. Quod sane secure etiam de Anglo solutore dicere potes. Newtonum enim, partim nostra, partim nostris Analoga meditatum esse intento studio, satis constat.

Et Belvallii Epistolam, et Juvenis Hagiensis schedam utramque remitto. Hujus videtur laudanda voluntas, sed dubitatio de ascensu descensui mixto intempestiva est, satisque ostendit vim universalitatis ab ipso non satis perspectam, et veram solutionem etiam illa complecti debere, quae ipsi videntur excludenda.

Is qui Problema Tuum facile putat, si modo Hypothesis de motu aut quiete Terrae definiatur, vel parum in his rebus versatus sit oportet, vel rem fugitivo admodum oculo inspexit. Ricciolus et Stephanus ab Angelis, aliique disputavere quaenam futura esset linea gravium libere descendentium, supposito motu Terrae. Hoc ipsi Auctores istos nominanti videtur succurrisse, et imposuisse, non invito, quo facilius declinaret. Nunc intellectis conspirantibus aliorum solutionibus, quibus talis dubitatio in mentem non venit, lapsum suum si candore est praeditus, libenter agnoscet, et jam fatebitur, credo, Problema facile non esse, saltem sibi aliisque de sua tribu. Caeterum video Dno. Beauval ignotum non esse Juvenem Hagiensem, consiliaque etiam inter ipsos fuisse communicata. Per hunc ergo disces, credo, quis sit Juvenis.

Animadversiones quasdam extemporaneas in partem generaliorem Principiorum Cartesii ad Dominum Basnagium *) miseram, tum ut legeret Hugenius, tum ut Cartesiani quidam, quibus communicandae erant, viderent me non sine ratione ab ipso dissentire. Has lectas (si tanti videntur) per occasionem ad Dnum. Gerhardum Mejerum, Theologum Bremensem, mittere aliquando poteris, additis Transactionibus Anglicanis pro me Tibi missis, si quid scilicet aliud illis inest, quam quod mihi descriptum jam communicasti. Ex prioribus meis videbis Newtonum suam secundi Tui Problematis solutionem ex eodem mecum fonte derivasse, sed circuitu tamen non necessario usum esse. Vale etc.

Dabam Guelfebyti 15. April. 1697.

---

*) Dominus Basnagius ist dieselbe Person, die vorher Dn. Beauval genannt wird; der Name dieses Mannes ist vollständig: Basnage de Beauval.

P. S. Scriptis jam literis, novissimas Tuas accipio. Cur aequationem $h = ac:m$ assumserim, causa est quod ea ratione prodire viderem aliquid simplicius, quam ponendo $h = m$, quod prius consideraveram. Nam si $h = m$, prodit non y, sed $\frac{1}{y} = bx^{e-1} - x^{2e-1}$. Vides autem valores istos duos ipsius h, ut sit vel $\frac{1}{m}$ vel m, esse simplicissimos. Per quinque aequationes, praeter necessitatem quidem, consulto tamen processi, quia sic melius patet principium inventionis et latitudo solutionis. Linearum ductus sub elegantiori facie rem ipsam artemque reddit involutiorem. Tantumque abest, ut Dn. Newtonus ex suo compendio rem proponendi, aliquid utile duxerit, ut potius involutus nonnihil haud satis animadverterit una eademque aequatione locali comprehendi posse solutionem pro omnibus segmentis. Praeterea considerandum, lineam quae curvam quaesitam in punctis conspirantibus secat, posse esse aliam, quam rectam, in aliis Problematibus; quae omnia distincte intelliguntur meo procedendi modo, ut ne nunc quidem, viso Newtoniano, inde recedere velim. Egregia sunt quae porro addis, et profecto meretur haec materia amplius excoli; est enim velut nova quaedam linearum curvarum seu locorum Geometria. Interim quia Tua procedendi Methodus, qua ad cogitationem tam pulchram tamque utilem ductus es, etiam alios usus habere potest, et ipsi per se Analysi aliquid addit, rogo ut eam distincte conscribas, una cum iis quae inde duxisti, et mihi communices, perinde ac si altera illa nondum innotuisset. Caeterum videris non observasse quod de Circulo satisfaciente locutus Te ridere jusseram. Et licet fatear non esse magni faciendas tales solutiones qualis ista per Circulum, aut Wallisiana, quam citas per unitatem, sunt tamen verae, et ex earum rerum numero, quae nulla quidem cum laude dicuntur, et tamen interdum non bene omittuntur. Si quis, exempli causa, dixisset, Problema cui Wallisius per unitatem satisfacit, non esse solubile in numeris rationalibus, peccasset, etiamsi nulla alia reperiri posset solutio. Item, si Tu dixisses Problema non esse solubile, nisi in transcendentibus, fuisses refutatus per eum, qui Circulum Tibi objecisset. Et solutio perfecta utique istas quoque, etsi nugatoriae videri possint, comprehendere debet. Per me ergo licet quasi nugatorias appelles, vel semi-ridiculas, modo non plane usu carere fatearis.

Oportet ut in literis mentem meam non bene explicuerim, cum ita a Te accepta est, quasi ego istam notationem (quod desideratum fieri possit per radices aequationum) in Epistolis Cartesii repererim. Reperi eam in meis excerptis, seu notatis, ante multos annos consignatis, cum Epistolas Cartesii forte volverem, ubi re tunc considerata, de modo haec annotaveram obiter. Cum igitur Problema Tuum inspiciens, meminissem promissorum Fermatii, et praeterea recordarer me illa olim legentem meas quasdam meditationes habuisse; quaesivi illam schedam, et forte prae multis aliis conservatam, promte reperi, ubi haec quae dixeram verba mea deprehendi, quae primo aspectu non intellexi, donec in curru explicatio in mentem veniret.

Dni. Marchionis Hospitalii Librum spero jam in Acta relatum esse; nam et ego admonui Dnum. Menckenium ne nimis differatur . . . .

Considera quaeso, ut hoc obiter addam, an Tua constructio, qua facis $PL^2 . PK = a^3$ non simul faciat $PK^2 . PL = a^3$; nam videbis pro hoc eumdem prodire Calculum, seu valorem ipsius a, qui prodit pro illo ex ipsa natura radicum ambiguarum. Quod si jam sit $PK^2 . PL = a^3 = PL^2 . PK$, fiet $PK = PL = a$, id est, P erit centrum circuli per K et L transeuntis, radiusque a. Ita incidemus in eam solutionem, quam recusas. Itaque amplius aliquid requiri puto, ut ambiguitati isti obnoxii non simus. Et viam video, dum rumpuntur laquei seu vinculum ambiguitatis separanturque radices actuali extractione.

Utique non temere fieri oportet, quod via illa quam inisti in omni genere Funiculariae succedit; sed hoc aliunde fieri necesse est, nam ipsa via per se consecutionem non ostendit. Itaque amplius deliberandum censeo, et ipse quoque, rem attentius meditans, video perinde esse in Tua methodo, ac si quaeramus parallelarum seu condescriptarum eam, cujus momentum ex recta horizontali est minimum vel maximum.

Pene annotare oblitus eram non esse necesse, ut peculiarem Calculum pro differentiis quaeras, sed ejusdem esse Calculi, facere ut summa potestatum a segmentis, et ut differentia sit constanti aequalis. Nam, si una radix sit negativa, secundus terminus erit differentia duarum radicum, ut si sit $yy - qy - rr = 0$ pro $yy - qy + rr = 0$, priore modo q est differentia, posteriore jam usurpato summa. Quod si esset $yy + qy - rr = 0$, $-q$ esset

excessus radicis negativae super affirmativam, adeoque q maneret differentia.

P. P. S. S. His omnibus scriptis, in manus meas veniunt l'Histoire des Ouvrages des Sçavans Domini Basnage-Beauval, ubi complectitur menses Decembrem, Januarium, Februarium; ibi p. 284 inserit Problema Tuum, sed verba, ubi de me loqueris aliter interpretatus est, quasi scilicet ego dilationem a Te petierim, solutionem sub exitum termini promittens, unde Lector me solutionem tunc nondum habuisse et tanto tempore indiguisse credet. Idque etiam videtur fecisse, ut Angli illius promptitudinem nobis quodammodo exprobrasse videatur. Itaque rogo, ut eum per occasionem moneas, me quoque statim solutione fuisse potitum.

LIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Negotia quaedam per aliquot hebdomades me detinentia responsionem hanc huc usque retardarunt. Gratias habeo non mediocres pro officio praestito in transmittendis nostris solutionibus, praesertim pro commendatione, qua meam prosecutum Te esse ais, sed forsan praeter meritum. Non recordor me posuisse aliquid quod poterat accipi in aliorum contemtum, saltem non viventium. Sed miror quod dicis Dn. Hospitalium durinscule in me scripsisse et quasi exprobrasse provocationem meam; gestio scire propria ipsius verba: non est profecto de quo glorietur, cum tantum non totam suam solutionem ex mea penu depromserit; sed non prima vice est, quod imitatur cornicem alienis pennis superbientem; tale quid olim ab ipso expertus sum, sed dedi et dabo veniam meo quondam benefactori, dummodo mihi posthac insultando (ut jam videtur facere) non abutatur longanimitate mea.

Cum nuper Dn. Menkenio scriberem, misi etiam solutionem Anglicam, ut de illa faceret quod vellet. In Transactionibus Philosophicis a Dn. Sloane mihi missis, quantum ex idiomate Anglico intelligo, nihil praeterea continetur quod operae pretium sit, mittam tamen si desideras. In eundem fere modum quo consulis re-

scripsi Bellavallio: non opus esse longo tempore ad solvendum problema nostrum illis qui nostra calleant, atque adeo me non mirari, Anglum illum (Newtonum esse suspicari me dicebam) secundo statim die a receptione problematis solutione fuisse potitum, cum methodo aut nostra aut nostrae simillima utatur; sed alium hac destitutum si prima applicationis die non ad solutionem pervenerit, nec secundo die, sed nec post annum eo perventurum esse. Interim Bellavallius, miror, nec respondit, nec animadversiones Tuas promissas mihi misit. Inspexi locum quem indicasti Febr. de histoire des ouvrages des Sçavans; indigne admodum fero, quod ita pessime egerit interpretem verborum meorum; quam primum ipsi scribam, culpare incuriam non obliviscar.

Verum est Dn. Newtonum suo modo proponendi et solvendi problema meum secundum, rem ipsam praeter necessitatem involutiorem reddidisse, dum pro diversis potestatibus diversas aequationes quaerit; meo tamen modo quo methodum Newtonianam correxi et amplificavi, mihi videor rem satis clare explicasse, dum omnes casus una eademque aequatione comprehendi, adeo ut hoc in passu methodus illa ita correcta Tuae per 5 aequationes procedendi non cedat, imo brevitate et simplicitate quodantenus illam praeferrem; et credo facile etiam applicari posse, quando linea secans in puuctis (ut dicis) conspirantibus non est recta, sed curva. Jam quia petis, aperiam prima mea cogitata circa hanc materiam; methodus qua initio usus sum, per sat magnas ambages me eo deducebat; ejus me tamen eo minus pudet, quod nonnullius utilitatis esse posse dicis. Sic itaque procedebam pro invenienda curva, ubi rectangulum segmentorum sit datum. Esto (fig. 96) DB, x et BE, y; ponatur $y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + ex^{\varepsilon}$ etc. (quousque libuerit); per hyp. $CD = \frac{1}{x} = x^{-1}$; ob simil. triangul. DBE, DCF, $CF = ax^{\alpha-2} + bx^{\beta-2} + cx^{\gamma-2} + ex^{\varepsilon-2}$ etc. $=$ (ob analogam relationem punctorum C ad F et B ad E) $ax^{-\alpha} + bx^{-\beta} + cx^{-\gamma} + ex^{-\varepsilon}$ etc. Comparentur jam harum duarum serierum termini (sed non earundem literarum, secus enim omnes aequationes identificarentur) ut inveniantur potentiae et coefficientes; in hunc modum $ax^{\alpha-2} = bx^{-\beta}$, $bx^{\beta-2} = ax^{-\alpha}$, et $cx^{\gamma-2} = ex^{-\varepsilon}$, $ex^{\varepsilon-2} = cx^{-\gamma}$ etc. unde elicitur $b = a$, $\beta = 2 - \alpha$ et $e = c$, $\varepsilon = 2 - \gamma$ etc.; ergo substitutis valoribus

pro b, β, e, ε etc. reperietur haec series infinitas continens solutiones $y = ax^{\alpha} + ax^{2-\alpha} + cx^{\gamma} + cx^{2-\gamma}$ etc. quam in Actis dedi. Quod si segmenta non ex communi puncto D egrediantur, sed ad axem aliquem parallelae constituantur, id est, si quaeritur curva GHF (fig. 97) ut ducta, ad positione datam DE, recta GFE in angulo dato GED rectangulum segmentorum GEF seu CDB sit datum: reperietur eadem methodo (positis EF seu DB, x; FB, $y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + ex^{\varepsilon}$ etc.) haec series $y = ax^{\alpha} + ax^{-\alpha} + cx^{\gamma} + cx^{-\gamma}$ etc.

Per analogiam relationis punctorum haec duo aliter ita solvuntur. Sit DB, x; DE, z; per hyp. $xz = 1$, ideoque etiam $x^n z^n = 1$ (n est potestas arbitraria, ut solutio tanto generalior evadat) multiplicetur utrumque per $x^{-n} - z^{-n}$ (quod facio ut x et z utrobique possint habere positionem analogam) erit enim $z^n - x^n = x^{-n} - z^{-n}$ seu $x^n + x^{-n} = z^n + z^{-n}$; hinc si fiat (fig. 97) $BF = x^n + x^{-n}$ seu $CG = z^n + z^{-n}$, prodibit curva quaesita FHG; sed facienda est (fig. 96) $BE = x \,.\, \overline{x^n + x^{-n}}$ seu $CF = z \,.\, \overline{z^n + z^{-n}}$, tunc satisfiet quaesito.

Ecce jam modum quo tunc temporis problema solvere institueram, quando summa potestatum segmentorum datur, $DB^n + DC^n = 1$ (sed ridebis prolixitatem). Quaerebam prius curvam ABCG (fig. 90) cujus segmentorum summa esset constans, $DB + DC = 1$; in hunc finem ponatur iterum DB, x; BE, $y = a + bx + cxx + ex^3 + fx^4$ etc. Ex proportione DB (x) . DC (1—x) : : BE $(a + bx + cxx + ex^3 + fx^4$ etc.) CF invenitur

$$
\begin{aligned}
CF = \frac{a}{x} & - a \\
& + b - bx \\
& \qquad + cx - cxx \\
& \qquad\qquad + exx - ex^3 \\
& \qquad\qquad\qquad + fx^3 - fx^4 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + gx^4 - gx^5 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + hx^5 - hx^6 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{etc.} \quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

ex analogia vero relationis punctorum in curva, ponendo in serie $a + bx + cxx + ex^3$ etc. $1 - x$ loco x, habetur

$$
\begin{aligned}
CF = &+ a \\
&+ b - bx \\
&+ c - 2cx + cxx \\
&+ e - 3ex + 3exx - ex^3 \\
&+ f - 4fx + 6fxx - 4fx^3 + fx^4 \\
&+ g - 5gx + 10gxx - 10gx^3 + 5gx^4 - gx^5 \\
&+ h - 6hx + 15hxx - 20hx^3 + 15hx^4 - 6hx^5 + hx^6 \\
&\text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Continuatis hoc modo quousque libuerit (quo magis vero continuantur, eo solutio erit generalior et fecundior) comparentur utrinque dimensionum ipsius x aequalium coefficientes $a = 0$, $-a + b = a + b + c + e + f + g + h$ etc., $-b + c = -b - 2c - 3e - 4f - 5g - 6h$ etc., $-c + e = +c + 3e + 6f + 10g + 15h$ etc., $-e + f = -e - 4f - 10g - 20h$ etc., $-f + g = +f + 5g + 15h$ etc., $-g + h = -g - 6h$ etc., $-h = +h$; quibus rite collatis prodibit $a = 0$, $f = -2c - 2e$, $g = c + e$, $h = 0$, ita ut b, c, e maneant arbitrariae; caeterarum vero substitutis valoribus reperietur aequatio talis $y = bx + cxx + ex^3 - \overline{2c - 2e}\,x^4 + \overline{c + e}\,x^5$, quae exprimet naturam curvae ABCG, in qua summa segmentorum erit constans $DB + DC$. Hac autem inventa, altera illa, ubi potestatum summa dari debet, facillime construitur, abscindendo tantum (fig. 98) Dc ex DC, Db ex DB, Dg ex DG, Da ex DA, quae sint ut $\sqrt[n]{DC}$, $\sqrt[n]{DB}$, $\sqrt[n]{DG}$, $\sqrt[n]{DA}$ etc., habebitur nova curva abcg, ubi segmentorum potestates $Db^n + Dc^n$ seu $Da^n + Dg^n$ facient ubique eandem summam, prout requirebatur.

Vides quam longa via incesserim; sed aliam tunc non quaerebam, contentus scilicet attigisse scopum; biduo enim post cum talia iterum meditarer, sese ultro offerebat facilior ille solvendi modus, quem in anterioribus meis Tibi communicavi, cujus ope statim incidi in curvam transcendentem, cujus segmenti quadratum ductum in alterum segmentum producat solidum datum, et quidem sic: Sit (fig. 96) DB, x; BE, $y = x^m . \overline{1 + x}^n$ (loco $\overline{1 + x}^n$ possem assumere quamcunque aliam quantitatem compositam) jam si $CD \times DB^q = 1$, erit $CD = \frac{1}{xx}$; ergo propter $DB . DC :: BE . CF$ erit $CF = x^{m-3} . \overline{1 + x}^n$; sed ob analogiam relationis punctorum

B et C ad E et F, erit $CF = \frac{1}{xx}^{m} \cdot \overline{1 + \frac{1}{xx}}^{n} = x^{\overline{-2m-2n}} \overline{xx+1}^{n}$, ergo $x^{m-3} \cdot \overline{1+x}^{n} = x^{\overline{-2m-2n}} \cdot \overline{xx+1}^{n}$; ergo etiam logarithmi $\overline{m - 3}\, lx + n\, l\overline{1+x} = -\overline{2m-2n}\, lx + n\, l\overline{xx+1}$, unde $m = \frac{-\overline{2n+3}\, lx - n\, l\overline{1+x} + n\, l\overline{xx+1}}{3\, lx}$; si itaque x elevetur ad hanc dimensionem m et multiplicetur per $\overline{1+x}^{n}$, habebitur aequatio pro curva quaesita, quae ope logarithmicae construi potest, et per consequens ex earum numero, quas percurrentes appellavi.

Nunquam negavi veritatem solutionis per circulum, sed aliud est verum esse, aliud satisfacere intentioni proponentis; an credis me non praevidisse circulum? licet illum non diserte excluserim, excluditur tamen eo ipso quod nemini non obvius est; adde etiam quod neque circulus satisfaciat, quando segmenta non in puncto coeunt, sed quando ad axem sunt parallelae ut in fig. 97. Cum itaque proponentis scopus sit acumen solutoris explorare, neminem putabam fore, qui mihi circulum ut solutionem legitimam, qualem ego desiderabam, obtrusurus esset; sed Tuum mihi ingenium satis superque perspectum est, atque ideo non dubitavi, quin joco id fuerit, quod allegaveris circulum *).

Jubes me considerare, an constructio mea qua in praecedentibus meis feci $PL^2 . PK = a^3$, non simul faciat $PK^2 . PL = a^3$, ideoque $PK = PL = a$, id est, annon curva mea KIL sit circulus, cujus centrum P, et sic annon incidamus in eam curvam, quam recuso; sed, pace Tua, ipse videris rem non satis considerasse. Minime enim sequitur, si $PL^2 . PK = a^3$, ideo etiam esse $PK^2 . PL = a^3$; neque pro hoc idem calculus prodit. Sed etiam nulla ambiguitas radicum hic adest, quia non promiscue consideravi quadratum alterutrius segmenti sive majoris sive minoris, sed sumsi consulto segmenti seu radicis majoris quadratum, quod multiplicavi per segmentum minus seu radicem minorem. Hinc longe alia curva prodiret, si assumeretur $PK^2 . PL = a^3$, quae

---

*) Im Commercium epist. folgen hierauf die Worte: Ast nescio, an a quopiam minus mihi familiari hunc circulum tolerassem. Sie sind in dem an Leibniz gesandten Schreiben so durchstrichen, dass auch nicht das Geringste davon zu lesen ist.

tamen nihilominus satisfaceret. Verum quid opus est verbis, si contrarium ejus quod putas, res ipsa probat? Constructio mea erat talis: Assumta curva quacunque AF (fig. 99) cujus applicata DF vocetur r; fiat alia AE, cujus applicata DE seu q sit $\frac{a^6 + r^6}{a^3 rr}$; dico, si sumatur PL = radici majori et PK = radici minori, hujus aequationis $yy - qy + rr = 0$ curvam KIL fore quaesitam. De veritate hujus constructionis non dubitas, quia in praecedentibus vidisti rationem, sed urges KIL esse circulum cujus centrum P; quid si autem ostendam PK et PL juxta constructionem meam esse variabiles? numquid sententiam mutabis? Radices dictae aequationis sunt $y = \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - rr}$ et $y = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - rr}$; substitue valorem assignatum ipsius q et habebis y seu $PK = \frac{r^4}{a^3}$, et y seu $PL = \frac{a^3}{rr}$, quarum utraque variabilis est, nisi ponas r constantem, id est, AF rectam et parallelam ipsi AD, quo solo casu KIL esset circulus cujus P centrum. Vides etiam simul quod $PL^2 . PK$ seu $\frac{a^6}{r^4} . \frac{r^4}{a^3} = a^3$ constanti; non autem $PK^2 . PL$ seu $\frac{r^8}{a^6} . \frac{a^3}{rr} = \frac{r^6}{a^3}$. Sublata Tua difficultate, jam alia se prodit, videtur enim (cum PK, PL prodeant in quantitatibus rationalibus) puncta L et K non esse in eadem curva, sed in duabus diversae naturae; si hoc est, erit methodus Newtoniana fallax, et Tua quoque laborabit, quia eodem fundamento nitatur. Vale et ama etc.

Groningae d. 15 Maji 1697.

LV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Nihil fuit in verbis Domini Marchionis Hospitalii, de quo ipsi dica scribi posset, nec quicquam tale puto in mente ejus fuisse. Veritus sum tamen, ne quidam secius interpretarentur aut (propter mentem ipsius licet) pro aculeo acciperent, si diceretur problema tanquam omnium labore et vigiliis dignissimum totius orbis Geome-

tris fuisse a Te propositum. Talia enim jactantiae alicujus exprobrationem tacitam continere videri possent. Cum etiam interpres latinus schediasmatis a Domino Marchione haud dubie Gallice conscripti Dominum Marchionem problema Johannis Bernoullii solvisse diceret, utrobique Dominum stare debere putavi idque Dn. Marchionis menti conforme fuisse non dubito, cum in Gallico nemo nominetur facile quin ipsi ascribatur „Monsieur“. Interea vides non ideo esse, cur ipsi succenseas. Quod monere necessarium duxi, ne alicujus simultatis inter vos autor sim. Gratias ago pro Tua methodo solutionis curvae per duorum quorumcunque punctorum certo modo inter se relatorum conspirationem determinatae; et vellem eam produci etiam ad plura puncta, non quia ad haec Problemata necesse est, quae aliter commodius solvimus, sed quia in aliis utilis esse potest. Caeterum cum de problemate aliquo solvendo agitur, meus scopus non solet esse, quem memoras, explorare acumen solutoris, sed vel praestari aliquid utile aut elegans, vel saltem augeri artem meditandi. Et solutio, quae non comprehendit omnes constructiones, etiam facillimas, habet aliquid imperfecti. Et jam notavi tales proferentem non laudari, sed interdum tamen excludentem culpari.

Cum viderem eamdem Tibi prodire q vel DE, sive ponamus y esse $\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - rr}$ sive y esse $\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - rr}$, festinatio alia agentis fecit, ut vererer, ne incideres in Circulum; sed bene mones, quod et statim attendenti patet, id per se caveri, et cessare hic ambiguitatem mutatis signis, adeoque non esse necessarium in tali casu, ut formulas extrahibiles quaeramus. Quod vero occasione eorum, quae de formulis extrahibilibus seu in rationales abeuntibus ad separandas inter se diversas radices dixi, vereris ne separatio ista contingat nobis invitis, et diversae radices sint ad diversas curvas; id censeo non esse metuendum: vel enim non fiet extractio, vel si succedet, destruetur id quo radices distingui possent. Quod si hoc non fiat, utique curva proveniens non erit apta ad scopum, sed vitanda. Et vitabitur sane, si extractionem indefinitam non procuremus nova explicatione ipsius x. Itaque ambo frustra aliquid mali veriti sumus; utiles tamen sunt dubitationes istae ad res penitius noscendas. Caeterum sive per quinque illas aequationes simplicissimas et semel in universum valentes mecum procedas, sive non, res eadem est; post inven-

tionem supprimi aut larvari possunt, interim exhibent progressum, et velut gradus mentis in inveniendo.

Etsi incassum laborassem, Dn. Fratrem tuum tibi reconciliare nitendo, non ideo poeniteret boni consilii, in quo vel voluisse sat est. Ignosce interim, si dicam nos saepe de aliis pejus aliquid vereri, quam res ipsa jubet, idque permissum esse, hactenus ut nobis caveamus; non ultra tamen. Atque ita concilio duas regulas sibi oppositas, quarum una (justitiae) jubet quemlibet praesumi bonum, altera (prudentiae) nemini facile esse fidendum. Morosum esse Dn. fratrem tuum, ipse mihi agnoscere nonnihil experiri visus sum. Fieri etiam potest ut Tibi invideat (quemadmodum judicas) et ut gratum ipsi futurum fuerit, si fortuna te magis jussisset pendere ab ipso; talia prava quidem, sed tamen humana sunt; ut vero implacabili odio Te prosequatur, non ausim judicare. Scis voluntatem humanam, ut JCti ajunt, ambulatoriam esse, nec facile de corporis, de animi autem curatione nunquam esse desperandum. Ut video, plures adhuc fratres habes praeter duos mihi auditos Laudandum censeo natu minimum, quod varias rerum vices vult experiri; et puto si qua vacabit statio Berolini, ipsi in copiis Electoris agenti prae aliis apertum fore. Possum illic commendare amicis, sed talibus, quibus ut de statione ejusmodi inquirant committere non ausim. Hoc alii facient facilius commodiusque.

Dominus Frater Tuus in literis, quibus mihi solutionem suam significat, proponit mihi observationem quamdam suam dioptricam, nempe si vitrum plano-planum ad axem visionis valde obliquum statuatur, dextrum per illud incipere apparere sinistrum et vicissim, supero tamen et infero situm suum servante; causam se ex principiis opticis nondum reperire potuisse. Hanc inquisitionem in responsione declinavi, cum longe aliis sim occupatus, et talia attentionem non vulgarem requirant. Venit postea in mentem, saepe fieri ut plana habeantur, quae circularia sunt ex centro admodum longinquo, vel alterius figurae; atque ita quaerendum foret, an ex quacunque distantia hoc ipsi apparuerit, et an in pluribus eodem modo. Si quid hic suppeditare poteris, operae pretium facies. Quaesivit etiam de Machina mea Arithmetica, cujus et nuper et olim visae Dn. de Tschirnhaus in novissima Libri sui editione meminit. Respondi nihil eam penitus habere commune nec cum Logarithmis, nec cum Rhabdologia Neperiana, quam alii postea in rotulis vel aliis formis exhibuere, et magnorum numerorum multi-

plicationes vel divisiones aeque esse in ea faciles ac parvorum, et nullis opus esse additionibus vel subtractionibus auxiliaribus in multiplicando vel dividendo: sed Machinam esse sumtuosam, et multarum rotarum instar horologii, nam interrogaverat an mediocri pretio haberi posset. Duo exempla habeo; sed malo rem eo deducere, ut plura elaborentur, antequam publicem. Rudimenta olim Galli Anglique viderunt. Magno cum applausu Hugenius, qui inspexerat, aliquoties admonuit ut absolvi curarem, quod non sine magno sumtu taedioque factum est, dum varie mihi cum opificibus fuit confligendum. Sed nunc contentus sum inventum ab interitu vindicatum esse. Productus multiplicationis potest in jam eloborato exemplo ascendere ad 12 notas, multiplicandus vero numerus ad notas 8, ne quis rem in exiguis tantum numeris exhibitam putet. Sed hoc occasione literarum Domini Fratris Tui. Vale.

Dabam Hanoverae 26 Mai 1697.

P. S. His jam scriptis, mitto quae in Actis Maji de Curva Brachystochrona variorum solutiones editae sunt, uti ad me misit Dominus Menckenius, cum Literis 22 Maji datis. Volui ut statim acciperes, quia Dominus Frater Tuus Tibi potissimum nova Problemata proponit *), termino et praemio statuto; quod videtur faciendum sibi putasse, quia Problemata quae proponit, mihi non satis elegantiae per se, vel utilitatis habere videntur, nisi quod forte artem inveniendi augebunt. Gaudeo interim, quod verba ejus nihil habent amari vel aculeati, imo commendationem Problematis Tui continent. Judicabis ipse, an putes per Problemata ejus augeri posse artem inveniendi, quo casu Te digna erunt.

Dum haec scribo, non possum mihi temperare, quin problemata considerem. Prius de curva, quae ex omnibus suae speciei et baseos promtissime ad perpendiculum datum accedat, determinatum numerum requirit, qui quantumvis prope verum (si rationalis non sit) haberi potest. In altero problemate (Isoperimetrorum) invenio aliquid obscuritatis. Nam si (fig. 100) linea BFN datae magnitudinis baseosque BN talis est assumenda, ut area NBZN fiat maxima, utique et area NBFN erit maxima (quippe ad maximam in ratione data constante PZ ad PF, ut ponit); ergo linea BFN erit circularis, BZN elliptica, cum tamen ipse neget NBFN aream esse maximam. Aliud est si ratio PZ ad

*) Siehe die Beilage zu diesem Briefe.

arcum BF sit data constans, ubi mihi quoddam Catenae genus obvenit, ni fallor. Sic figuram concipio, nam Dominus Menkenius non misit.

Videbis et Dnum. Tschirnhausium sua adjecisse. Sed de Cycloide videtur sibi solutionem non adscribere, etsi ejus mentionem faciat. Suspicatur, quod miror, adhuc alias curvas posse satisfacere, et putat problemata talia, quae proposuimus, esse valde laboriosa, et solere ab iis proponi, qui casu vias faciles repererunt; in quibus omnibus vides quantum absit ab eo, quod res est. Putat etiam Hugenii Librum de Cycloide mirum quantum nostrae inquisitioni profuisse, cum tamen de eo nemo nostrum, vel per somnium cogitaverit, nisi re aliunde comperta. Ita etiam loquitur, quasi et alterum Tuum problema solveret, nec tamen quantum video, solvit. Alia etiam nobis rursus promittit etc.....

Beilage.

Jac. Bernoullii solutio problematum Fraternorum peculiari Programmate Cal. Jan. 1697 *Groningae, nec non Actorum Lips. mense Junio et Decembr.* 1696 *et Febr.* 1697 *propositorum, una cum Propositione reciproca aliorum.*

Geometrae methodum de Maximis et Minimis ad illa duntaxat Problemata huc usque adhibuerunt, in quibus ex infinitis partibus seu functionibus unius datae curvae aliqua maxima minimave requiritur, neque cogitarunt de ejus applicatione ad talia, ubi ex ipsis infinitis curvis non datis una desideratur, cui maximum aliquod minimumve competat, licet et haec subtilitate inventionis et utilitatis praestantia caeteris minime sint inferiora. In eorum numero est, quod Frater mense Junio primum proposuit, cujusque solutioni terminum elapsi anni finem statuit, Problema de invenienda Curva Oligochrona, per quam descendendo grave a dato puncto brevissimo tempore perveniat ad aliud datum punctum. Quanquam autem hac Fratris provocatione me non teneri existimabam, nihilominus cum superaccessisset humanissima Celeberrimi Domini Leibnitii invitatio, laborem solutionis amplius subterfugere non potui. Postquam enim hic vir, litteris die 13 Septembris ad me datis, significasset se solvisse Problema, juxtaque desiderare ut et alii tentarent: ad ejus sollicitationem aggressus sum quod alias intactum reliquissem, idque optato protinus successu: solu-

tionem enim sexto Octobris jam habui, et ab illo tempore amicis ostendi. Cur autem non potius ad Acta communicarim, causa est, quod cum terminum solutionis in exterorum gratiam ad Pascha usque praesentis anni prorogatum intelligerem; ego interea speculationem ad alia quoque difficiliora Problemata nunc una proponenda promovere statuissem. Priusquam vero ad solutionem praesentis Problematis accedam, sequens praemitto Lemma.

Si curva ACEDB (fig. 101) talis sit, quae requiritur, hoc est, per quam descendendo grave brevissimo tempore ex A ad B perveniat, atque in illa assumantur duo puncta quantumlibet propinqua C et D: dico, portionem curvae CED omnium aliarum punctis C et D terminatarum curvarum illam esse, quam grave post lapsum ex A brevissimo quoque tempore emetiatur. Si dicas enim, breviori tempore emetiri aliam CFD, breviori ergo emetietur ACFDB, quam ACEDB, contra hypothesin.

Esto igitur in plano utcunque ad horizontem inclinato (nec enim verticale sit, necesse est) curva desiderata ACB (fig. 102) per quam descendens grave ex A breviori tempore perveniat ad B, quam per aliam quamcunque in eodem plano positam; et sint in illa sumta ubivis duo puncta C et D infinite propinqua ductaeque intelligantur recta horizontalis AH ejusque perpendicularis CH et huic normalis DF, bisectaque CF in E, compleatur parallelogrammum DE ducta recta EJ. Quaeritur in hac puuctum G, id est, inclinatio particularum curvae CG, GD ad se invicem, quae faciat, ut tempus descensus per CG + tempus descensus per GD (quod sic denoto $t.CG + tGD$, intellige semper post lapsum ex A) sit minimum. Ad hoc indagandum intelligatur in recta EJ aliud punctum L, sic ut GL sit incomparabiliter minor ipsa EG, ductisque CL, DL, super C et D descripta concipiantur arcuum elementa LM, GN; erit, ex natura minimi, $tCL + tLD = tCG + tGD$, adeoque $tCG - tCL = tLD - tGD$, quo posito, sic arguo:

$$\left.\begin{aligned} CE : CG &= tCE : tCG \\ CE : CL &= tCE : tCL \end{aligned}\right\} \text{ ex natura descens. grav.}$$

Ergo $CE : CG - CL(MG) = tCE : tCG - tCL$

Sed $MG : GL = EG : CG$ (ob sim. tr. MLG, CEG).

Quare $CE : GL = EG \times tCE : CG(tCG - tCL)$.

Pariter

$$\left.\begin{array}{l} EF : GD = tEF : tGD \\ EF : LD = tEF : tLD \end{array}\right\} \text{ ex natura desc. gravium}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Ergo} & EF : LD - GD(LN) = tEF : tLD - tGD \\ \text{Sed} & LN : \quad LG \quad = GJ : GD \text{ (ob sim. tr. } LNG,\ GJD) \end{array}$$

$$\text{Quare } EF(CE) : LG = GJ \times tEJ : GD \times (tLD - tGD)$$

$$\text{ideoque } EG \times tCE : CG \times (tCG - tCL) = GJ \times tEF : GD \times (tLD - tGD).$$

$$\text{et permut. } EG \times tCE : GJ \times tEF = CG \times (tCG - tCL) : GD \times (tLD - tGD)$$

$$= (\text{ex nat. minimi, ut dictum}) = CG : GD.$$

$$\text{Sed } EG \times tCE : GJ \times tEF = \frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GJ}{\sqrt{HE}}, \text{ ex nat. desc. gr.}$$

$$\text{quare } \frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GJ}{\sqrt{HE}} = CG : GD.$$

Ubi in transitu considerandum proponimus Celeberrimo Domino Nieuwentiit usum differentio-differentialium (quae ipse immerito explodit) in eo, quod assumere coacti fuimus particulam GL ipsis EG, GJ infinite parvis infinities adhuc minorem, absque quo non video quomodo ad solutionem Problematis via patuisset. Sunt enim EG, GJ elementa abscissarum AH, quemadmodum CG, GD elementa ipsius curvae, et HC, HE ipsae ejus applicatae, earumque elementa CE, EF, adeo ut Problema ad puram Geometriam redactum huc redeat, ut inveniatur curva, quae elementa sua habeat composita ex elementis abscissarum directe, et radicibus applicatarum inversa: qua quidem proprietate Isochronam illam Hugenianam nunc et Oligochronam futuram, tritam nempe notamque Geometris Cycloidem, gaudere deprehendo; quod in fig. 103, ubi ACP semi-cycloidem, CM, CN duas ejus tangentes, RQP semi-circulum genitorem refert, ita porro demonstro:

$$\begin{array}{l} GD : GJ = GN : GX^{*} = VP : VX = VR : RX = \sqrt{RP} : \sqrt{RX} (\sqrt{HE}) \\ GJ : EG = \ldots\ldots\ldots\ldots = GJ : EG \\ EG : CG = CS : CM^{*} = QS : QP = RS : RQ = \sqrt{RS} (\sqrt{HC}) : \sqrt{RP} \end{array}$$

*) ex nat. Cycloid.

$$\text{Ergo } GD : CG = \sqrt{RP} \times GJ \times \sqrt{HC} : \sqrt{HE} \times EG \times \sqrt{RP}$$

$$= EJ \times \sqrt{HC} : EG \times \sqrt{HE} = \frac{GJ}{\sqrt{HE}} : \frac{EG}{\sqrt{HC}}. \text{ Q. E. D.}$$

Quod si nunc determinanda sit Cyclois, quae transeat per data puncta A et B, describenda est super basi horizontali AH quovis circulo genitori Cyclois AT, quae ductam rectam AB, et productam, si sit opus, secet in T; quemadmodum enim recta AT est ad rectam AB, sic diameter circuli genitoris Cycloidis AT est ad Diametrum genitoris quaesitae AB.

Alterius generis nec minus elegans Problema foret, si jam porro quaereretur, quaenam ex infinitis Cycloidibus (aut saltem Circulis, Parabolis aliisve curvis) per A transeuntibus, ac super eadem basi AH constitutis, illa sit, per quam descendens grave minimo tempore ex A ad datum perpendiculum ZB appellat. Qui speculationem de maximis et minimis promovere volet, tentabit. Nobis sufficiat proposuisse.

Atque ita curva haec, quae tot Mathematicorum ingeniis exercita fuit, ut nihil in illa eruendum restare videretur, nova proprietate conspicuam sese nobis sistit, quam velut perfectionum suarum colophonem, quasi nihil futuris saeculis debitura, sub finem adhuc praesentis adipisci voluit, postquam initio ejusdem natales, ac medio dimensiones omnes cum aliis praeclaris affectionibus accepisset.

Caeterum monendum est, quod iisdem insistendo vestigiis, pari facilitate reperiri possit curva, quam mobile per medium inaequalis densitatis vel raritatis latum minimo tempore percurrat, quae quidem convenienter principio Leibnitiano Mense Junio 1682 demonstrato, eadem reperiatur necesse est cum Curva refractionis, quam Hugenius in Tractatu de Lumine pag. 44 contemplatur, et cujus identitatem cum illa, quam primo consideravit Celeberrimus Dnus. Leibnitius Mense Septembre 1692 pag. 446, nosque mense Junio 1693 pag. 254 construximus, conscio Fratre jam olim deprehendi.

Sed per has speculationes ad alia quoque difficiliora Problemata patet accessus, qualia sunt, quae de Figuris Isoperimetris formari possunt. Quaeritur ex. gr. quaenam ex iis omnium sit capacissima (vulgo creditur esse circulus, et recte, sed sine demonstratione); quaenam centrum gravitatis areae et peripheriae suae habeat a basi remotissimum, quam Frater observavit esse Funiculariam, sed ex diverso fundamento etc. Haec itaque et talia per Methodum maximorum ei resolvenda proponimus. Praesertim vero, si vicem reddere volet, sequens generale tentabit.

Quaeritur ex omnibus Isoperimetris super communi basi BN constitutis illa BFN (fig. 104) quae non ipsa quidem maximum comprehendat spatium, sed faciat, ut aliud curva BZN comprehensum sit maximum, cujus applicata PZ ponitur esse in ratione quavis multiplicata vel submultiplicata rectae PF vel arcus BF, hoc est, quae sit quotacunque proportionalis ad datam A et rectam PF, curvamve BF? Huic ne detrectare possit, adjungimus alterum quod de infinitis Cycloidibus supra motum fuit, majoremque cum suo affinitatem habet. Et cum iniquum sit, ut quis ex labore in alterius gratiam et cum proprii temporis dispendio rerumque suarum damno, suscepto nihil emolumenti percipiat, prodit nonnemo, pro quo caveo, qui soluturo Fratri ultra laudes promeritas, honorarium quinquaginta imperialium decrevit, hac tamen lege, ut intra tertium ab hujus publicatione mensem se suscepturum promittat, ipsasque solutiones finito anno, utcunque licet per quadraturas exhibeat. Hoc enim elapso si nemo dederit, meas exhibeo.

Haec itaque occasione Problematis Physico-Mathematici a Fratre mense Junio primum propositi hac vice dicta sufficiant. Quae ibidem de Complanatione superficierum Conoidicarum attigit, cum me propius spectarent, jam mense Octobri pertractavi. Nobilissimum Tschirnhausium uterque eodem mense Junio notavimus. Unicum igitur in Schediasmate Fraterno superest, quod, ne quid intactum praetereamus, enucleandum restat, methodus videlicet, quam celavit, inveniendi curvam ex sola data relatione ipsorummet curvae punctorum ad se invicem. Quaerenda sit ex. gr. curva AEC (fig. 105) talis, ut projecta utcunque ex dato puncto D recta DC, secante curvam in C et E, rectangulum CDE aequetur constanti spatio, puta unitati, quod primum est exemplum Fratris. Ad datam positione rectam DG ordinatim applicentur EF, CG in angulo arbitrario, et fit $DE = x$, $EF = y$, $DC = z$ et $CG = t$, erit per hypothesin CDE seu $xz = 1$ et $x = z^{-1}$; dein propter sim. Tr. DEF et DCG, EF seu $y = tx : z = tz^{-2}$. Fundamentum solutionis: Talis supponatur aequatio seu relatio inter x et y, ut substitutis ipsarum valoribus modo inventis, similis vel eadem inter z et t relatio resultet, quae inter x et y, quod hic ita fit: Pono $y = ax^m = bx^n$, erit facta substitutione $tz^{-2} = az^{-m} + bz^{-n}$ sive $t = az^{-m+2} + bz^{-m+2}$, quae ut assimiletur priori $ax^m + bx^n$, comparo az^{-m+2} cum bx^n, et bz^{-n+2} cum ax^m, ac reperio utrobique $b = a$, nec non $n = z - m$; unde concludo, naturam cur-

vae quaesitae esse $y = a x^m + a x^{2-m}$ vel, quod eodem modo ostendetur, $y = a x^m + a x^{2-m} + b x^n + b x^{2-n}$.

Haud absimiliter solvuntur duo sequentia, quae habet, Problemata pag. 266, quorum posterius in Programmate suo generaliter ita proponit, ut loco utriusque segmenti sumatur quaecunque ipsorum potestas quae sit m. Huic curva satisfacit, quae exprimitur per $y = x (x^m - x^{2m})^n$. Quae vero ultimo subjungit pag. 267, sed absque solutione, his curvae satisfaciunt mechanicae, quarum natura est $y = x (a + \int dx : x l x)^n$ pro fig. 2; et $by + cyy + cy^3$ etc. $= (a + \int dx : x l x)^n$ pro fig. 3 (intellige per $l x$ logarithmum ipsius x). Quanquam tacere non possum, assumi hic aliquid dubiae et suspectae veritatis, videlicet portiones semper esse unius ejusdemque numero curvae, quae eadem aequatione denotantur. Dari enim possunt exempla in contrarium, saltem in curvis mechanicis, ubi hoc non contingit, eademque aequatio diversas numero curvas designat, quod vel ex his ipsis exemplis liquet, quandoquidem haec aequationes $y = x (a + \int dx : x l x)^n$ etc. non magis quadrant pro hypothesi $xzz = 1$, quam pro quavis alia xz^3, aut xz^4 aut $xz^p = 1$; quibus tamen hypothesibus omnibus unam eandemque curvam satisfacere implicat. Hoc itaque ulteriori Lectorum scrutinio perpendendum relinquimus.

Pene haec absolveram, cum perferrentur ad nos Acta mensis Novembris, in quibus Nobilis Auctor Meditatorum Geometricorum, eodem mense Anni 1695 publicatorum, motis sibi scrupulis nonnullis satisfacere ac sua vindicare satagit, eoque ardentius in nobis desiderium accendit videndi penitiusque introspiciendi tam praeclara inventa. Dixi enim me nullatenus dubitare, quin pro excellenti quo pollet acumine, quicquid pollicitus est praestare possit, atque optare tantum, ut speciminum loco talia promat, quae etiam iis, quibus de vastissimo Viri ingenio aliunde non constat, persuadere queant, quo nomine ipsum iterata vice et perhumaniter pulsandum censemus. Nam quod proprietatem spectat, quam focis curvarum attribuit, cum ea quibusvis punctis, adeoque non focis, qua focis, competat, difficulter quis capiat, quid haec ad naturam focorum, aut curvarum per focos cognoscendam conducat. Quemadmodum etiam intellectu haud facile existimo, quomodo quae fig. 1 et 3 de Ellipsi et Parabola ostendit, ad omnes alias etiam dissimiles et diversorum generum curvas applicari possint, cum illa duntaxat ejusdem generis et speciei curvis quadrent

ac praesertim posterius illius tantum generalioris consectarium sit, quod jam Anno 1692 exhibui. Et quod ultimo docet de abscindendis ex quavis curva portionibus in data ratione, hoc plane fallere dixi in Parabola, quod etiam agnoscere videtur Acutissimus Auctor; aut si dubitet, ego paratus sum demonstrare: unde, si nihil aliud, saltem hoc novo exemplo roborari opus haberet.

LVI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Placet quod de Dno. Marchione Hospitalio scribis, nihil in ipsius verbis fuisse, quod me nimis laedere posset: non opus erat, ut adderes honoris titulum, quem interpres omiserat, partim quia genius linguae latinae hanc omissionem facile patitur, imo postulat, partim quia Hospitalius ipse revidendo translationem addidisset titulum, si id, ut dicis, ipsius menti fuisset conforme.

Videris approbare solutionem meam pro curva habente $PL^2PK = a^3$, substituendo in radicibus $y = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - rr}$ et $y = -\sqrt{\frac{1}{4}qq - rr}$ loco q valorem $\frac{a^6 + r^6}{a^3rr}$: interim revera hac substitutione radices in rationales abeunt, nec tamen destruitur id, in quo distinguuntur; proveniunt enim diversae, una $y = \frac{r^4}{a^3}$, altera $y = \frac{a^3}{rr}$. Quid ergo hic censendum? Unamne an duas diversas producunt curvas? Sed supposito hanc curvam non aptam esse, sed vitandam, quid judicas de altera illa percurrente per Logarithmos inventa?

Quod attinet observationem Fratris de vitro plano-plano, eam jam olim Eruditis Parisiis proposueram; qui autem omnes illud ipsum responderunt, quod Tu jam suspicaris, et quod ego ab initio Fratri dixeram scilicet, vitra non perfecte plana esse, sed aliquantulum convexa, et quidem cylindrice potius quam sphaerice, quia dextra cum sinistris, non vero supera cum inferis mutantur. Caeterum, quantum memini, observationem hanc in unico tantum vitro fecit, quod alicui fenestrae hypocausti domus suae erat insertum, cujus facies magnam aream respicit, ita ut non nisi objecta

multum distantia situm suum permutaverint, propioribus vero eundem retinentibus; praeterea oculus spectatoris ad minimum sex septemve passibus distare debebat a vitro valde obliquo; in minori distantia permutatio objectorum nulla fiebat. An vero in majori res successisset, dicere non possumus, quia ob angustiam conclavis major distantia non dabatur.

De Machina tua arithmetica jam aliquoties rogare volui, quod viderem illius mentionem fieri in Medicina mentis Tschirnhausii; vellem illam videre libenter, vel saltem descriptionem ejus accuratam. Potestne etiam usui quotidiano inservire? nam cum illam adeo sumtuosam et tot rotarum apparatu fabricatam dicas, vereor ne curiosa magis sit quam utilis. Quaestor noster Spanhemius nuper mihi monstrabat hujusmodi machinam arithmeticam simpliciorem plurimis cylindrulis instructam, quorum superficiebus varii numeri erant adscripti; isti cylindruli super axiculis circumaguntur pro ratione multiplicationis vel divisionis: plenum tamen usum probe mihi non poterat explicare, saltem dicebat inventorem ejus esse Gallum Parisinum.

Gratias ago pro Communicatione fragmenti Actorum: potuisses hoc labore supersedere, nam biduo ante Tuas heri acceptas, id est ante triduum, accepi literas Dni. Menkenii, una cum eodem fragmento et figuris. Schediasma Fratris quod ibi habetur, facit ut ita prompte Tibi respondeam. Dicit ab initio se non existimasse se teneri provocatione mea, interim per schedulam illam manu propria scriptam et a Marchione Hospitalio mihi communicatam clare ostendere possum, quod problemati huic diu misere et tamen gratis insudaverit, donec tandem post omnes exantblatos labores nullam aliam solvendi viam invenerit, quam eam ipsam, quam tu uno die reperisti, et quidem modo longe breviori; quid enim, bone Deus! opus est tot analogiis, quibus utitur, cum unica nobis sufficiat. Dicit deinde pari facilitate reperiri posse curvam refractionis seu quam mobile per medium non uniforme minimo tempore percurrat; qui fit ergo, ut non observaverit hujus curvae identitatem cum nostra brachystochrona. Sed missis his, accedo ad ea, quae me speciatim concernunt. Suntne haec illa longe difficiliora, de quibus Tibi tanta pompa scripserat? haec, inquam, quae de figuris Isoperimetris, de maximo descensu Centri gravitatis, de citissimo appulsu ad datum perpendiculum etc. proponit; parturiunt montes etc. Imo haec, quae partim jam diu inter nos

agitata fuere, partim quae simplicissima tantum sunt Consectaria eorum, quae in hoc ipso mense Actorum publicavi. Scis enim, quod jam pronuper Tibi communicaverim modum solvendi funicularium per methodum meam directam, sine interventu tangentium, considerando tantum maximum descensum centri gravitatis; vides autem iterum, quo animo erga me constitutus sit, dum fictum suum non neminem pro quo cavere dicit, introducit, qui soluturo mihi ultra laudes promeritas (ne detractare possim) honorarium 50 imperialium decreverit, hac scilicet ratione credens, se quam optime propalaturum imbecillitatem methodorum mearum, suarum vero excellentiam, et per consequens toti erudito orbi ostensurum, quanto post se intervallo me relinquat. Tacite tamen omnes etiam Mathematicos simul provocat, dum suas solutiones promittit, si elapso hoc anno nemo dederit. Sed ecce quam male iis cedat, qui omnia sua pede metiri solent; haud dubie haec problemata fratri fuerunt laboriosa, multumque negotii facesserunt, forsan per ambages ob prolixitatem inimitabiles caeca fortuna ad solutionem deductus est, cum alia prorsus ageret; hinc non credidit possibile esse, ut ullus alius ex destinato vadum tentare, nedum superare auderet vel posset. Interim cogita, quaeso, quantus dolor! quanta tristitia! quando viderit, in ipso isto Actorum Majo, ubi tam temere mihi insultat, ubi tam alto supercilio sua problemata proponit, neque ad eorum solutionem invidiose invitat, quando, inquam, viderit ibidem jam contineri (implicite quidem, sed quae, vel ab infante, tanquam Corollarium facile deduci possit) solutionem meam sui Problematis, imo ipsius praecise, pro cujus solutione mihi promittit honorarium 50 imperial. et quod plus est, solutionem infinities generaliorem quam Problema postulat. Quaerit enim Frater, quaenam ex infinitis Cycloidibus (fig. 106) per A transeuntibus, et super eadem basi AH constitutis, illa sit, per quam descendens grave minimo tempore ex A ad datum perpendiculum ZB appellat. Pone loco perpendiculi ZB aliam quamvis rectam positione datam in quovis angulo cum horizonte, et sic problema universalissime conceptum solvo facillime hoc modo. Sit (fig. 107) horizontalis AZ, positione data recta ZB, punctum datum A: dico Cycloidem AB descriptam super AZ et occurrentem rectae ZB ad angulos rectos, fore illam per quam grave a puncto A citissime pervenerit ad datam positione ZB.

Hoc utique immediate sequitur ex proprietate curvae meae Synchronae, quam ostendi normalem esse omnibus Cycloidibus ex A et super AZ descriptis. Hinc tangens Synchronae erit perpendicularis Cycloidi per punctum contactus transeunti, quod punctum determinat brevissimum descensum ad tangentem per naturam Synchronae, quia hoc solum punctum tangentis est in ipsa Synchrona, reliqua sunt extra. Si itaque ponatur ZB tangere aliquam Synchronam, erit punctum B contactus; ergo etc. Ostendendum vero restat (ne quid Frater desideret) quomodo Cyclois AB ducenda sit, ut occurrat normaliter rectae ZB, id quod sic facio. Super ZG diametro perpendiculari ad AZ et ad lubitum assumta, describatur circulus $Z\beta G$, secans rectam ZB in β; quo puncto delineetur Cyclois $\alpha\beta$. Jam si fiat ut arc. αZ ad ZG, ita AZ ad quartam, erit haec diameter circuli genitoris Cycloidis quaesitae AB. Si ducatur AB parallela ipsi $\alpha\beta$, erit B punctum citissimi appulsus.

En itaque Problema plenissime solutum, quod poteris Fratri per occasionem indicare, et simul monere, ut promissam summam apud Te deponat; Te enim Judicem nostrum constituam, non dubito quin id sis, consentiente Fratre. Sciat enim Frater, quod si promissis stare non vellet, non me, sed pauperes, quibus hanc summam destinavi, sit defraudaturus: me enim pudet capere emolumentum ex hac solutione, quam sine ullo **labore**, sine ullo **temporis dispendio**, sine ullo **mearum rerum damno**, non **intra tres menses**, quos mihi pro deliberatione ad suscipiendum concedit, sed intra tria horae minuta adinveni. Alterum Problema, quod de Isoperimetris proponit (quod nescio an etiam comprehendatur sub honorario, quidquid sit illud) pari facilitate solvi, et quidem etiam longe universalius, quam a Fratre postulatur. Nil in hoc Problemate obscuritatis inest, ut putas, sed ob defectum figurae (credo) male intellexisti.

Quaerit enim ex **omnibus Isoperimetris** (fig. 108) **super communi basi BN constitutis, illam BFN, quae non ipsa quidem comprehendat maximum spatium, sed faciat, ut aliud curva BZN comprehensum sit maximum, cujus applicata PZ ponitur esse in ratione quavis multiplicata vel submultiplicata (NB. Non dicit multipla vel submultipla, ut Tu intelligis) rectae PF, vel arcus BF, hoc est, quae sit quotacunque**

proportionalis ad datam A et rectam PF, curvamve BF. Brevius ita proponi potest: Quaeritur ex omnibus Isoperimetris BFN illa, ut facta alia curva BZN, cujus applicata PZ sit ut potestas quaecunque ipsius PF, spatium NBZN sit omnium maximum. Hujus solutionem, pro hac vice, sine methodo solvendi, ob brevitatem temporis exhibebo, ut affirmare possis, me tertio die post visum Fratris schediasma Tibi solutiones problematum ejus perscripsisse. Sit ergo numerus potestatis n; PF seu BG, x; et BP seu GF, y; recta arbitria a; fiat GF seu $y = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}}$; dico punctum F fore in curva optata BFN. Hinc statim patet, si n sit 1, curvam fore circularem; si vero n sit 2, id est, si PZ sint ut quadrata ipsarum PF, erit curva PFN illa ipsa quam format linteum a fluido stagnante expansum, quam Frater etiam suae Elasticae tribuit. Si vero n sit $\frac{1}{2}$, id est si PZ sint in subduplicata ratione ipsarum PF, erit curva BFN iterum Cyclois vulgaris, cui proinde hic singulare quid accidit, quod $\int dy \sqrt{x}$ sit omnium maximum, et (posito arcu BF, t) $\int \frac{dt}{\sqrt{x}}$ (ut ex citissimo descensu patet) omnium minimum. Sic itaque Cyclois egregia gaudet proprietate.

Caeterum generaliter observo, quod fratri non ita obvium erit, quod quotiescunque n sit fractio, cujus numerator sit unitas, denominator vero numerus par, erit curva quaesita BFN talis, ut ope rectificationis Circuli construi possit; si vero denominator sit numerus impar, erit tunc curva quaesita BFN semper algebraica. Sit exempli gratia $n = \frac{1}{3}$, id est sint PZ in ratione subtriplicata ipsarum PF, erit GF seu $y = 2a - \overline{2a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} \sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}$. Hinc, ut puto, non mediocris affulget lux pro instituendis summationibus quantitatum differentialium, quae reducuntur ad hanc formulam $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}}$: determino enim casus ubi fiunt absolute summabiles, item et illos, qui requirunt extensiones circularium, et denique illos, qui neque summabiles neque circulares existunt. Quid si jam problema universalissime proponam et solvam, si scilicet loco quod PZ secundum Fratrem debeat esse ratione certae potestatis ipsius PF, jam sit quomodocunque composita ex PF et datis; id est, si PZ sit aequalis ipsi GH applicatae curvae

datae BH, quae loco quod secundum Fratrem est ex Parabolarum genere, a me supponitur qualiscunque: annon multo plura praestitero quam a me exigitur? Si ergo in eadem proportione honorarium promissum augere teneretur Frater, non puta omnes ipsius opes suffecturas. Ecce autem solutionem: positis quae prius, appelletur GH, X (quae datur ex BG seu x); ergo datur spatium BGH seu $\int X\,dy$ algebraice, vel saltem transcendenter; ergo datur etiam $\int \frac{X\,dx}{x}$. Sit itaque $\int \frac{X\,dx}{x} = \xi$; dico, facta GF seu $y = \int \frac{\xi\,dx}{\sqrt{aa - \xi\xi}}$, fore F in curva quaesita BFN, quae scilicet ex omnibus Isoperimetris illa est, cujus applicatae FP productae ad Z, ita ut PZ sit = GH, efficiunt spatium NBZN, omnium quae ita fieri possunt maximum.

Hoc ipso momento, quo haec paulo acrius meditor, mirabilem deprehendo curvarum convenientiam, quod enim modo supra Cycloidi singulare credidi, dum in illa $\int dy\sqrt{x}$ est maximum et $\int \frac{dt}{\sqrt{x}}$ minimum; jam video hoc omnibus hisce curvis esse commune. Dico enim si BFN curva talis sit, ut $\int x^m dx$ sit maximum, fore etiam semper $\int \frac{dt}{x^m}$ minimum. Vellem aliquis hanc necessitatem a priori demonstraret.

Ne quid omittam (quamvis non necessarium, certus enim sum, nec ipsum fratrem solvisse) ex abundanti tamen Te certiorem facio, quod etiam geometrice solverim problema de invenienda curva, non tantum ex omnibus Cycloidibus, ut supra facile praestiti, sed ex omnibus alterius ejusdem speciei et baseos, quae promptissime non solum ad perpendiculum, sed ad quamvis rectam positione datam accedat; unde vides plane non determinatum curvarum numerum requiri, ut opinaris. Definio enim praecise, sive per quadraturas sive per rectificationes, illam ipsam quae ex infinitis suae speciei quaesito respondet. Et quidem res perpetuo eo recidit, ut

prius determinetur Synchrona curvarum datae speciei, quae curvae si sint Cycloides, Synchrona facile determinatur; est enim illa quae omnibus Cycloidibus est normalis, ut supra ostendi. Sed si curvae datae sint alterius speciei, exempli gratia, circulares vel parabolicae (quos casus non solvisse, sed nude aliis proposuisse contentum se dicit Frater) hoc opus, hic labor est. Tunc enim Synchrona curvis specie datis amplius non perpendicularis est, sed inclinationem ad illas ubique variat. In hoc profecto praecipue aliquid me praestitisse puto, in quo plus negotii frater reperiret, quam forte per totam suam vitam expediet, non obstante quod jam visurus est (si nondum viderit) constructionem meam Synchronae Cycloidum; neque ego facile eo penetrassem, nisi genius quidam, albus an ater sit nescio (ut cum Theologo quondam nostro loquar) peculiare mihi artificium inspirasset, quocum etiam alia problemata solvo insolubilia antehac mihi visa. Vides ergo quousque intra triduum progressus fuerim, cum prius ne per somnium quidem de hisce cogitaverim. Nil superest, nisi ut Te rogem, ut instiges Dnum. Menkenium, ut quamprimum, et si fieri possit hoc mense, publicum moneat, me brevi adeo temporis spatio potitum esse solutionibus problematum a Fratre mihi prae aliis propositorum, longeque plura praestitisse quam petierat: solutiones vero ipsas me exhibiturum, quam primum ille praemium, a se mihi promissum, a me vero pauperibus destinatum, Tibi Judici harum rerum fere soli intelligenti remiserit, ut illud mihi, si solutiones meas legitimas deprehenderis, adjudices, sin minus, Fratri reddas.

Prout Dnus. Tschirnhausius loquitur in suo Schediasmate *), videtur materiam hanc non satis intelligere. Facit quidem mentionem Cycloidis, minime tamen problema solvit: unde conjicio, Dnum. Menkenium ipsi communicasse solutiones nostras, antequam imprimerentur. Si videret demonstrationem meam Syntheticam, quam suppressisti, non dubito, quin mutaturus esset sententiam, in qua est, quasi plures aliae curvae praeter Cycloidem possent satisfacere.

Accepi literas a Domino Marchione Hospitalio et a Belvallio, ille significat Dnum. De la Hire praetendisse se triplici via perve-

---

*) De methodo universalia Theoremata eruendi, quae Curvarum naturas simplicissimas exprimunt. De Problemate item Bernoulliano etc. per D. T. Act. Erudit. 1697 p. 220.

nisse ad solutionem problematis celerrimi descensus, sed semper deceptum fuisse, quippe qui invenerit Parabolam cubicalem. Dominus Belvallius promittit se revocaturum per occasionem errorem commissum in recensione problematis mei, ubi de Tua solutione agitur; misit etiam fasciculum Observationum Tuarum in Philosophiam Cartesianam, quas perlegere nondum vacavit. Juvenem illum Hagiensem, qui problema meum tentavit, esse Filium Domini Dierckens, Praesidis in Curia Brabantiae; utrumque et Patrem et Filium maxime his studiis delectari, ex literis Belvallianis disco.

Pulchre utique agis, non nego, neque Te poenitere debet, quod fratrem mihi reconciliare niteris; sed doleo saltem operam Tuam perditam, ut olim illam Domi. Carcavi idem tentare volentis inter Cartesium et Robervallium. Non est quod putes me pejus aliquid vereri de fratre, quam res ipsa jubeat. Utinam semper satis de ipso veritus fuissem, potuissem sane unum et alterum declinare quod ab ejus nequitia mihi sustinendum fuit. Vae mihi, si fortuna me jussisset pendere ab ipso. Praeter hunc fratrem morosum habeo duos alios, natu sc. minimum de quo jam audiisti, et alterum, natu me majorem, qui partem pingendi callet, sed parum exercet, quia in patria publico quodam munere fungitur. Oblitus sum nuper Tibi gratias agere pro gratulatione de nata mihi filiola; sed tristis eheu! illius obitus qui ante duas septimanas accidit mihi jam in memoriam revocat, quod congaudere Tuum repente adeo in condolere mutatum fuerit. Vale etc.

Groningae 7. Junii 1697.

Rogo ut has literas asservare velis, ut solutiones meas (quandocunque opus sit) producere possis.

Remitto hac vice ex Actis tantum fratris schediasma, ne literae nimium gravarentur; quod restat alia occasione remittam.

Cures quaeso inclusas sine mora ad Dn. Menckenium.

